Příklad 1 [PD – analýza] Uvažujeme hru ,,vězňovo dilema" (s opakováním). Vzhledem ke strategiím D^* (zrada), T^* (půjčka za oplátku) a C^* (spolupráce) byla na přednášce odvozena výplatní matice ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2/3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Vektor $p = (x, y, z)$ je zastoupení jednotlivých druhů v populaci. Příslušná RD má tvar

$$x' = \frac{1}{3}x(4xy - 6y - 3x + 3)$$
$$y' = \frac{1}{3}xy(4y - 1)$$

kde x jsou D^*-hráči, y jsou T^*-hráči a rovnice pro z (C^*-hráči) byla vyloučena díky vztahu $x + y + z = 1$.

Analyzujte chování řešení v trojúhelníku $\{x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$; tedy zejména:

- vyšetřete chování na hranách trojúhelníku
- najděte stacionární body, vyšetřete jejich stabilitu
- určete oblasti, kde $x' > 0$ resp. $x' < 0$ a kde $y' > 0$ resp. $y' < 0$. Načrtněte průběhy řešení.

Příklad 2 [Odvození RD s mutací]. Připomeňme značení: N je celková velikost populace, N_i je počet i-hráčů a p_i jejich procentuální zastoupení, tj. $N_i = p_i N$. Odvození replikátorové rovnice vychází ze vztahu

$$N_i(t + \delta) = \delta c N_i(t) W_i(p(t)) + (1 - \delta) N_i(t);$$

tj. v čase $t + \delta$ je δ-část i-populace nahrazena potomstvem $cN_i(t)W_i(p(t))$ a část $1 - \delta$ zůstává.
Nechť $\theta \in (0, 1)$ je pevné. Odvoďte zobecněnou RD za předpokladu:

(a) $1-\theta$ část narozené populace je stejná jako rodič, zatímco část θ náhodně vybere jeden z typů $\{1, \ldots, n\}$.

(b) $\delta(1-\theta)$ část populace je nahrazena potomstvem (stejného typu jako rodič), zatímco $\delta\theta$ část populace náhodně zmutuje na jeden z typů $\{1, \ldots, n\}$.

Kontrola: $\sum_i p_i = 1$ by se mělo zachovávat.

Příklad 3 [Bifurkace hyperbolických stacionárních bodů.] Jsou dány hladké funkce $F(x), M(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Nechť $F(a) = 0$ a $\nabla_x F(a)$ je regulární. Ukažte pomocí „věty o implicitní funkci“, že rovnice

$$G(\theta, x) = (1-\theta)F(x) + \theta M(x) = 0$$

má pro malá θ řešení tvaru $x = \hat{x}(\theta)$, kde $\hat{x}(\cdot)$ je hladká funkce, splňující $\hat{x}(0) = a$. Spočítejte $\hat{x}'(0)$.

Řešte nejprve obecně; poté aplikujte na hyperbolické stacionární body soustavy z Příkladu 1, kde $M = (1/3-x, 1/3-y)$ odpovídá „mutující“ perturbaci.

Nápověda.

1 – $(1,0)$ je asymptoticky stabilní, $(3/4, 1/4)$ je sedlo. Úsečka $\{(0,\eta);\ 0 \le \eta \le 1\}$ je tvořena nehyperbolickými stac. body. Stabilitu lze vyšetřit na základě kvalitativní analýzy (znaménka x', y').