MATEMATICKÁ ANALÝZA 1 - ZIMNÍ SEMESTR 2024–2025
PŘEDNÁŠKA

LUBOŠ PICK

1. Logika, množiny a základní číselné obory

1.1. **Logika.** *Logika* je věda o formální správnosti myšlení. Formálně logická správnost spočívá ve správnosti **vyvození** závěru z předpokladů.

Výrokem nazveme jakékoli tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé), nebo že neplatí (je nepravdivé).

Příklady.
- Dnes neprší. (Je výrok. Pravdivost posuďte sami.)
- Beroun je hlavní město USA. (Je výrok, (zatím) nepravdivý.)
- Ahoj! (Není výrok.)
- Kéž by už byl konec hodiny! (Není výrok.)
- Desetinný rozvoj čísla π obsahuje nekonečný počet nul. (Neví se, zda je to pravda, ale je to výrok.)

Z výroků lze vytvářet nové složitější výroky pomocí logických operací.

Negací výroku A rozumíme výrok „Není pravda, že platí A.“, případně „Neplatí A.“ Negaci výroku A značíme $\neg A$.

Konjunkcí výroků A a B nazveme výrok „Platí A a zároveň platí B.“, případně „Platí A a platí B.“, „Platí A i B.“ Konjunkci výroků A a B značíme $A \wedge B$, někdy také $A \,\&\, B$.

Disjunkcí výroků A a B nazveme výrok „Platí A nebo platí B.“ Disjunkci výroků A a B značíme $A \vee B$.

Implikací nazýváme výrok „Jestliže platí (výrok) A, potom platí (výrok) B.“ Takové spojení výroků A a B značíme $A \Rightarrow B$. Výroku A říkáme **předpoklad** a výroku B **závěr**. Místo výroku „Jestliže platí A, potom platí B.“ používáme také následující obraty.
- Jestliže platí výrok A, pak platí výrok B.
- Výrok A implikuje výrok B.
- Z výroku A plyne výrok B.
- Předpokládejme, že platí výrok A, potom platí výrok B.
- Nechť platí výrok A. Potom platí výrok B.
- Výrok A je postačující podmínkou pro platnost výroku B.
- Výrok B je nutnou podmínkou pro platnost výroku A.

Ekvivalencí výroků A a B nazýváme výrok „Výrok A platí právě tehdy, když platí výrok B.“ Ekvivalenci výroků A a B značíme $A \Leftrightarrow B$. Místo „Výrok A platí právě tehdy, když platí výrok B.“ používáme také následující obraty.
- Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.
- Výrok A je ekvivalentní s výrokem B.
- Výrok A je nutnou a postačující podmínkou pro platnost výroku B.

Následující tabulky uvádějí pravdivostní hodnoty výše definovaných logických operací v závislosti na pravdivosti výroků A a B.

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Poznámky.

- Logická spojka *nebo* u disjunkce není vylučující, tj. disjunkce zůstává v platnosti i když platí oba výroky A a B.
- Je-li premisa implikace A nepravdivá, pak implikace platí vždy bez ohledu na platnost závěru B (jinými slovy, z nepravdivého výroku plyne jakýkoli výrok).

Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů (které nazýváme prvky) do jediného celku. Je-li a prvkem množiny A, pak píšeme $a \in A$. Pokud a není prvkem A, píšeme $a \notin A$. Jestliže každý prvek množiny A je i prvkem množiny B, potom říkáme, že A je podmnožinou B a píšeme $A \subset B$. Prázdnou množinou nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek.

Predikátem v logice rozumíme vlastnost, kterou nějakému předmětu přisuzujeme, nebo mu ji upíráme. Predikátová logika se věnuje studiu predikátů a vyšetřování vlastností kvantifikace.

Definice. Výrokovou formou budeme nazývat výraz

$$V(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

z něhož vznikne výrok dosazením prvků $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_m \in M_m$ z daných množin $M_1, \dots, M_m$.

Definice. Nechť $V(x)$, $x \in M$, je výroková forma. Výrok

$$\textit{Pro všechna } x \in M \textit{ platí } V(x).$$

zapisujeme ve tvaru:

$$\forall x \in M\colon \; V(x).$$

Symbol $\forall$ nazýváme **obecným kvantifikátorem**.

Výrok

$$\textit{Existuje } x \in M, \textit{ pro které platí } V(x).$$

zapisujeme ve tvaru:

$$\exists x \in M\colon \; V(x).$$

Symbol $\exists$ nazýváme **existenčním kvantifikátorem**.

Poznámka. Kvantifikátory stejného typu lze libovolně přehazovat, například

$$\forall x \; \forall y\colon V(x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall y \; \forall x\colon V(x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x, y\colon V(x,y).$$

Na druhé straně ale kvantifikátory různého typu obecně přehazovat nelze, aniž by se změnil smysl výroku. Výrok

$$\exists x \; \forall y : \quad V(x,y)$$

sice implikuje výrok

$$\forall y \; \exists \, x\colon V(x,y),$$

ale opačná implikace obecně neplatí. Například výrok

$$\forall y \in \mathbb{N} \; \exists x \in \mathbb{N}\colon x > y$$

platí, ale

$$\exists y \in \mathbb{N} \; \forall x \in \mathbb{N}\colon x > y$$

nikoli.

Příklad. Nechť M je množina osob přítomných v posluchárně a nechť $W(x,y)$ znamená: osoba x zná příjmení osoby y. Zkoumejte platnost výroků

$$\forall x \in M \; \exists y \in M\colon W(x,y),$$
$$\forall y \in M \; \exists x \in M\colon W(x,y),$$
$$\exists x \in M \; \forall y \in M\colon W(x,y),$$
$$\exists y \in M \; \forall x \in M\colon W(x,y).$$

1.2. **Základní metody důkazů.** V matematice vycházíme z několika základních tvrzení, která nedokazujeme. Taková tvrzení nazýváme **axiomy**. Všechna další tvrzení jsou potom odvozována z axiomů a tvrzení již dokázaných. Matematické tvrzení, které považujeme za důležité nebo zajímavé samo o sobě, většinou nazýváme **větou**. K označení tvrzení, které má pomocný charakter, tj. potřebujeme jej pouze k důkazu jiných tvrzení, používáme zpravidla slovo **lemma**. **Definice** vymezují nové pojmy, věty a lemmata hovoří o vlastnostech těchto pojmů a vztazích mezi nimi. Matematická teorie je tak tvořena axiomy, definicemi, větami, lemmaty a důkazy.

Nejčastěji bývá matematická věta formulována ve tvaru implikace, tj. pokud platí předpoklad A, pak platí závěr B. Důkazem je pak posloupnost správných úvah vedoucích od předpokladů věty k jejímu závěru. Mezi základní typy důkazů patří:

- přímý důkaz,
- nepřímý důkaz,
- důkaz sporem,
- důkaz rozborem případů,
- důkaz matematickou indukcí.

konec 2. přednášky (4.10.2024)

Značení. Množinu všech **přirozených** čísel, tj. množinu všech čísel $1, 2, 3, \ldots$, budeme značit $\mathbb{N}$, množinu všech **celých** čísel $\mathbb{Z}$, množinu všech **racionálních** čísel, tj. množinu čísel tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$, budeme značit $\mathbb{Q}$ a množinu všech **reálných** čísel $\mathbb{R}$. **Iracionálním** číslem rozumíme každé reálné číslo, které není racionální.

Příklad. Dokažte, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq ab$.

Důkaz. Provedeme přímý důkaz tvrzení. Vezměme libovolná čísla $a, b \in \mathbb{R}$. Potom platí $(a-b)^2 \geq 0$. Upravíme-li tuto nerovnost, dostaneme $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. Odtud již snadno plyne dokazovaná nerovnost $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq ab$. □

Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2k$, nebo $n = 2k - 1$, přičemž oba případy nemohou nastat zároveň. V prvním případě říkáme, že n je **sudé**, a ve druhém, že je **liché**.

Důkaz. K důkazu první části tvrzení použijeme matematickou indukci. Pro $n = 1$ položme $k = 1$. Potom máme $1 = 2 \cdot 1 - 1$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$, a chceme tvrzení dokázat i pro číslo $n + 1$. Podle indukčního předpokladu existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2k$, nebo $n = 2k - 1$. V prvním případě platí $n + 1 = 2k + 1 = 2(k + 1) - 1$, ve druhém $n + 1 = 2k$. V prvním případě je tedy hledaným číslem $k + 1$ a ve druhém k.

Pokud by číslo $n \in \mathbb{N}$ bylo zároveň liché i sudé, pak by existovala $k, l \in \mathbb{N}$ taková, že $n = 2k = 2l - 1$. Potom $2(l - k) = 1$, a tedy $l - k = \frac{1}{2}$. Číslo $l - k$ je celé, na rozdíl od čísla $\frac{1}{2}$, což je spor. Metodou důkazu sporem jsme odvodili i druhou část tvrzení. Tím je tvrzení příkladu dokázáno. □

Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že je-li n^2 liché, potom je i n liché.

Řešení. Provedeme nepřímý důkaz. Předpokládejme, že neplatí, že n je liché. Potom je podle předcházejícího příkladu sudé. Tedy existuje $k \in \mathbb{N}$ splňující $n = 2k$. Potom $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Protože $2k^2 \in \mathbb{N}$, plyne odtud, že n^2 je sudé. Podle předcházejícího příkladu není n^2 liché. Tím je tvrzení dokázáno metodou nepřímého důkazu.

Příklad (Bernoulliova nerovnost)**.** Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, platí $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Důkaz. Použijeme matematickou indukci. Označme symbolem $V(n)$ výrokovou formu

$$\forall x \in \mathbb{R},\, x \geq -1 : (1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Pro $n = 1$ výrok $V(1)$ zřejmě platí. Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n)$. Použitím nerovnosti $1 + x \geq 0$, která platí díky předpokladu $x \geq -1$, dostáváme z indukčního předpokladu

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x,$$

neboť $nx^2 \geq 0$ pro každá $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$. Platí tedy $V(n+1)$. Podle principu matematické indukce odtud plyne tvrzení. $\square$

Příklad (Bernoulliova nerovnost II)**.** Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -2$, platí $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Důkaz. Použijeme upravenou matematickou indukci. Označme symbolem $V(n)$ výrokovou formu

$$\forall x \in \mathbb{R},\, x \geq -2 : (1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Dokážeme, že

(a) platí $V(1)$ a $V(2)$,
(b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n) \Rightarrow V(n+2)$.

Pro $n = 1$ výrok $V(1)$ zřejmě platí. Pro $n = 2$ plyne $V(2)$ z následujícího odhadu:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x.$$

Tím je ověřen bod (a). Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n)$. Použitím zřejmé nerovnosti $(1+x)^2 \geq 0$, která platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, dostáváme z indukčního předpokladu

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+2} &= (1+x)^n(1+x)^2 \geq (1+nx)(1+x)^2 \\ &= 1 + (n+2)x + (2+x)nx^2 + x^2.\end{aligned}$$

Protože $x^2 \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $2 + x \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}, x \geq -2$, platí $(2+x)nx^2 + x^2 \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}, x \geq -2$. Odtud dostáváme pro každé $x \geq -2$ nerovnost $(1+x)^{n+2} \geq 1 + (n+2)x$. Tím je dokázána implikace (b), a tedy i Bernoulliova nerovnost. $\square$

Při důkazu výroku

$$\forall x \in M : V(x)$$

často postupujeme následujícím způsobem. Zvolíme $x \in M$ pevné, ale libovolné, tj. o x předpokládáme pouze to, že je prvkem M, a nic dalšího. Postupnými dedukcemi ukážeme platnost výroku $V(x)$ pro toto x. Tím je pak důkaz proveden.

Při důkazu výroku

$$\exists x \in M : V(x)$$

máme dvě možnosti. Buď přímo nalezneme nějaké $x \in M$, pro které platí $V(x)$, nebo takové $x \in M$ nenalezneme, ale dokážeme, že alespoň jedno musí existovat. Tyto postupy nazýváme po řadě **konstruktivním důkazem** a **nekonstruktivním důkazem**. Nekonstruktivní důkaz také někdy nazýváme **existenčním důkazem**.

Příklad. Dokažte, že existuje $x \in \mathbb{R}$ takové, že platí $x + 2 = 0$.

Příklad. Dokažte, že existuje $x \in \mathbb{R}$ takové, že platí $e^x - 2 = x$.

1.3. **Množiny a množinové operace.**

Definice. **Sjednocením** množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B. Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$.

Je-li $\mathcal{A}$ systém množin, pak jeho **sjednocení** $\bigcup \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, pro které existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $a \in A$.

Definice. **Průnikem** dvou množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li dvě množiny prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.

Je-li $\mathcal{A}$ neprázdný systém množin, pak jeho **průnik** $\bigcap \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, které pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňují $a \in A$.

Definice. **Rozdílem množin** A a B (značíme $A \setminus B$) nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B.

Definice. **Kartézským součinem** množin $A_1, \dots, A_n$ nazveme množinu všech uspořádaných n-tic

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{[a_1, a_2, \dots, a_n];\ a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Věta 1.1 (de Morganova pravidla). *Nechť X je množina a $\mathcal{A}$ je neprázdný systém množin. Pak platí*

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}$$

a

$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}.$$

Důkaz. Provedeme důkaz prvního z uvedených tvrzení. Máme dokázat dvě inkluze, a sice

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} \subset \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}$$

a zároveň

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} \supset \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}.$$

konec 3. přednášky (9.10.2024)

Je-li $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{A}$, znamená to, že x patří do X, ale nepatří do sjednocení $\bigcup \mathcal{A}$. Tedy $x \notin A$ pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$. To ale znamená, že pro každé $A \in \mathcal{A}$ je $x \in X \setminus A$, a tudíž $x \in \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}$. Tím je první inkluze dokázána.

Nechť $x \in X \setminus A$ pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$. Tedy $x \in X$, ale $x \notin A$ pro každou $A \in \mathcal{A}$. Takže $x \notin \bigcup \mathcal{A}$. Tudíž $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{A}$, čímž je završen důkaz druhé inkluze.

Druhé de Morganovo pravidlo lze dokázat obdobně. □

1.4. Zobrazení.

Definice. Nechť A a B jsou množiny. **Binární relací** (nebo krátce **relací**) mezi prvky množin A a B rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. Nechť $R \subset A \times B$ je binární relace. Místo zápisu $[a, b] \in R$ někdy píšeme $a\,R\,b$. Pokud $A = B$, říkáme, že R je **relace na** A.

Definice. Nechť A a B jsou množiny a nechť $R \subset A \times B$ je binární relace. Pak relaci $R^{-1} \subset B \times A$ definovanou předpisem

$$[x, y] \in R^{-1} \Leftrightarrow [y, x] \in R$$

nazýváme **inversní relací** k relaci R.

Definice. Nechť A a B jsou množiny. Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme **zobrazením** (někdy též **funkcí**) z množiny A do množiny B, jestliže platí

$$\forall x \in A\ \forall y_1, y_2 \in B\colon \big(([x, y_1] \in F\ \&\ [x, y_2] \in F) \Rightarrow y_1 = y_2\big).$$

Poznámka. Je-li F je zobrazení z množiny A do množiny B, pak pro každé $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $[x, y] \in F$. Pokud pro dané $x \in A$ takové y existuje, je určeno jednoznačně. Značíme je symbolem $F(x)$.

Definice. Nechť F je zobrazení z množiny A do množiny B. **Definičním oborem** zobrazení F nazýváme množinu

$$\{x \in A; \exists y \in B\colon F(x) = y\},$$

kterou značíme $\mathcal{D}(F)$. **Oborem hodnot** zobrazení F nazýváme množinu

$$\{y \in B; \exists x \in A\colon F(x) = y\},$$

kterou značíme $\mathcal{H}(F)$. **Grafem** zobrazení F rozumíme množinu

$$\{[x, F(x)] \in A \times B; x \in \mathcal{D}(F)\},$$

kterou značíme $\operatorname{graf}(F)$.

Značení. Nechť A a B jsou množiny. Potom symbolem

$$F\colon A \to B$$

značíme fakt, že

- F je zobrazení z A do B,
- $A = \mathcal{D}(F)$,
- $\mathcal{H}(F) \subset B$.

Hovoříme o **zobrazení množiny** A do množiny B.

Definice. Nechť $f\colon A \to B$, $M \subset A$, $P \subset B$.

- **Obrazem** množiny M při zobrazení f rozumíme množinu

  $$\{y \in B; \exists x \in M\colon f(x) = y\},$$

  kterou značíme $f(M)$.
- **Vzorem** množiny P při zobrazení f nazveme množinu

  $$\{x \in A; f(x) \in P\},$$

  kterou značíme $f^{-1}(P)$.

Definice. Nechť $f\colon A \to B$. Řekneme, že f je

- **prosté** (**injektivní**), jestliže

  $$\forall x, y \in A\colon (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y),$$

- **„na“** (**surjektivní**), jestliže

  $$\forall y \in B\ \exists x \in A\colon f(x) = y,$$

- **bijekce** (**vzájemně jednoznačné**), jestliže je zároveň prosté a „na“.

Poznámka. Nechť zobrazení f je definováno předpisem $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Je-li $A = B = [0, \infty)$, pak $f : A \to B$ je bijekce. Je-li $A = \mathbb{R}$ a $B = [0, \infty)$, pak $f : A \to B$ je „na“, ale není prosté. Je-li $A = [0, \infty)$ a $B = \mathbb{R}$, pak $f : A \to B$ je prosté, ale není „na“. Je-li $A = B = \mathbb{R}$ pak $f : A \to B$ není ani prosté, ani „na“.

Definice. Nechť $f\colon A \to B$ a $C \subset A$. Pak zobrazení $g\colon C \to B$ definované předpisem $g\colon x \mapsto f(x)$ pro $x \in C$ nazýváme **restrikcí** (též **zúžením**) zobrazení f na množinu C. Zobrazení g označujeme symbolem $f|_C$.

Definice. Nechť f a g jsou zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f$ je definováno předpisem $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$ taková, že $f(x) \in \mathcal{D}(g)$. Zobrazení $g \circ f$ nazýváme **složeným zobrazením**, přičemž g nazýváme **vnějším** zobrazením a f nazýváme **vnitřním** zobrazením.

Definice. Nechť $f\colon A \to B$ je prosté. Pak **inversní zobrazení** k f je definováno jako inversní relace k f. Inversní zobrazení k f značíme f^{-1}.

Poznámka. Je-li $f\colon A \to B$ prosté, pak

$$f^{-1}\colon f(A) \to A.$$

Poznámka. K neprostému zobrazení nelze definovat inversní zobrazení.

1.5. **Mohutnost množin.**

Definice. Nechť X je množina. Potom **potenční množinou** množiny X rozumíme množinu všech podmnožin množiny X. Značíme ji symbolem $\mathcal{P}(X)$.

Definice. Říkáme, že množiny A, B **mají stejnou mohutnost** a píšeme $A \approx B$, jestliže existuje bijekce A na B. Říkáme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny** B a píšeme $A \preceq B$, jestliže existuje prosté zobrazení A do B. Symbol $A \prec B$ značí situaci, kdy platí $A \preceq B$, ale neplatí $A \approx B$.

Definice. Řekneme, že množina X je **konečná**, jestliže je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $X \approx \{1, \dots, n\}$. Řekneme, že množina X je **nekonečná**, jestliže není konečná. Řekneme, že množina X je **spočetná**, jestliže je buď konečná, nebo $X \approx \mathbb{N}$. Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá **nespočetná**.

Poznámka. Konečné množiny jsou například množiny $\emptyset$, $\{1, 2, 3\}$, $\{x\}$. Nekonečné spočetné množiny jsou například množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$. Nespočetné množiny jsou například množiny $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $(0, 1)$, $\{\{a_1, a_2, a_3, \dots\}; a_n \in \{0, 1\},\ n \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

konec 4. přednášky (11.10.2024)

Věta 1.2 (Cantorova–Bernsteinova)**.** *Nechť X, Y jsou množiny splňující $X \preceq Y$ a $Y \preceq X$. Potom $X \approx Y$.*

Věta 1.3 (Cantorova)**.** *Nechť X je množina. Pak $X \prec \mathcal{P}(X)$.*

Důkaz. Zobrazení $\psi\colon X \to \mathcal{P}(X)$ definované předpisem $\psi(x) = \{x\}$, je prosté, takže platí $X \preceq \mathcal{P}(X)$.

Zbývá ukázat, že množiny X a $\mathcal{P}(X)$ nemají stejnou mohutnost. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že existuje bijekce $\varphi\colon X \to \mathcal{P}(X)$. Označme $A = \{x \in X; x \notin \varphi(x)\}$. Zobrazení φ je bijekce, a proto můžeme nalézt $a \in X$ takové, že $\varphi(a) = A$. Pokud $a \in A$, pak podle definice množiny A platí $a \notin \varphi(a)$, což je spor, neboť $\varphi(a) = A$. Pokud $a \notin A$, pak podle definice množiny A platí $a \in \varphi(a) = A$, což je opět spor. Tím je předpoklad existence bijekce φ přiveden ke sporu a tvrzení je dokázáno. $\square$

Věta 1.4 (vlastnosti spočetných množin)**.**

(a) *Každá podmnožina spočetné množiny je spočetná.*
(b) *Jestliže A je množina a existuje $f\colon A \to \mathbb{N}$ prosté, potom je A spočetná.*
(c) *Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.*
(d) *Obraz spočetné množiny je spočetná množina.*
(e) *Každá nekonečná množina obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.*

1.6. **Reálná čísla.** Množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ lze popsat jako množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností:

- vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah,
- vztah uspořádání a operací sčítání a násobení,
- vlastnost suprema.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}:\ x + (y + z) = (x + y) + z$ (**asociativita sčítání**),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}:\ x + y = y + x$ (**komutativita sčítání**),
- $\exists w \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}:\ w + x = x$ (prvek w je určen jednoznačně, značíme jej 0 a říkáme mu **nulový prvek**),
- $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists z \in \mathbb{R}:\ x + z = 0$ (z je tzv. **opačné číslo** k číslu x, je určeno jednoznačně a značíme je $-x$),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}:\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (**asociativita násobení**),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}:\ x \cdot y = y \cdot x$ (**komutativita násobení**),
- $\exists v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \forall x \in \mathbb{R}:\ v \cdot x = x$ (prvek v je určen jednoznačně, značíme jej 1 a říkáme mu **jednotkový prvek**),
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{R}:\ x \cdot y = 1$ (prvek y je určen jednoznačně a značíme jej x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}:\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (**distributivita**).

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}:\ (x \leq y\ \&\ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (**tranzitivita**),

- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ (x \leq y \ \& \ y \leq x) \Rightarrow x = y$ (**slabá antisymetrie**),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ x \leq y \vee y \leq x$,
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ (0 \leq x \ \& \ 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$.

Značení. Symbol $x \geq y$ znamená totéž, jako $y \leq x$. Symbolem $x < y$ budeme značit situaci, kdy $x \leq y$, ale $x \neq y$ (tzv. **ostrá nerovnost**). Reálná čísla, pro něž $x > 0$ (resp. $x < 0$), budeme nazývat **kladnými** (resp. **zápornými**). Reálná čísla, pro něž $x \geq 0$ (resp. $x \leq 0$), budeme nazývat **nezápornými** (resp. **nekladnými**).

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že $x \in \mathbb{R}$ je

- **horní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,
- **dolní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$.

Řekneme, že množina A je

- **shora omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je horní závorou množiny A,
- **zdola omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je dolní závorou množiny A,
- **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Číslo $G \in \mathbb{R}$ splňující

- $\forall x \in A \colon x \leq G$,
- $\forall G' \in \mathbb{R}, G' < G \ \exists x \in A \colon G' < x$,

nazýváme **supremem** množiny A. Má-li množina A supremum, je toto určeno jednoznačně a značíme je $\sup A$.

III. Vlastnost existence suprema

- Každá neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.

Věta 1.5 (existence a jednoznačnost množiny reálných čísel)**.** *Existuje čtveřice* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *splňující podmínky I–III, přičemž je těmito podmínkami určena jednoznačně v následujícím smyslu. Pokud čtveřice* $(\tilde{\mathbb{R}}, \oplus, \odot, \leq^*)$ *splňuje mutatis mutandis podmínky I–III, pak existuje bijekce* $\varphi : \mathbb{R} \to \tilde{\mathbb{R}}$ *taková, že pro každé* $x, y \in \mathbb{R}$ *platí*

- $\varphi(x + y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$,
- $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$,
- $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq^* \varphi(y)$.

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Číslo $g \in \mathbb{R}$ splňující

- $\forall x \in A \colon g \leq x$,
- $\forall g' \in \mathbb{R}, \ g < g' \ \exists x \in A \colon x < g'$,

nazýváme **infimem** množiny A. Má-li množina A infimum, je toto určeno jednoznačně a značíme je $\inf A$.

Poznámka. Jestliže existuje $\sup A$, potom $\sup A$ může a nemusí být prvkem A (obdobně pro infimum).

konec 5. přednášky (16.10.2024)

Příklady. Uvedeme několik jednoduchých příkladů množin a jejich suprem.

- $A = [0, 1]$, pak $\sup A = 1$ a $\sup A \in A$,
- $B = [0, 1)$, pak $\sup B = 1$ a $\sup B \notin B$,
- $C = [0, 1] \cup \{2\}$, pak $\sup C = 2$ a $\sup C \in C$,
- $D = \{1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, pak $\sup D = 1$ a $\sup D \notin D$,
- $E = \{x \in \mathbb{Q}; x \leq \sqrt{2}\}$, pak $\sup E = \sqrt{2}$ a $\sup E \notin E$.

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že a je **největší prvek** (**maximum**) množiny A, jestliže $a \in A$ a a je horní závorou množiny A. Obdobně definujeme **nejmenší prvek** (**minimum**) A. Maximum a minimum jsou určeny jednoznačně (pokud existují) a značíme je $\max A$ a $\min A$.

Poznámka. Jestliže existuje $\max A$, potom platí $\max A \in A$ (obdobně pro minimum). Jestliže existuje $\max A$, potom existuje i $\sup A$ a platí $\max A = \sup A$ (obdobně pro minimum a infimum).

Příklady. Ve výše uvedených příkladech existují maxima množin A, C, neexistují maxima množin B, D, E, existují minima množin A, B, C, D a neexistuje minimum množiny E.

Poznámka. Jestliže existuje $\sup A$, potom $\sup A$ je nejmenší horní závorou množiny A. Jestliže existuje $\inf A$, potom $\inf A$ je největší dolní závorou množiny A.

Definice. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujeme jeho **absolutní hodnotu** předpisem

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jestliže } x \geq 0, \\ -x, & \text{jestliže } x < 0. \end{cases}$$

Poznámka. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$. Potom platí:

(a) $|x| \geq 0$,
(b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(c) $|x| = |-x|$,
(d) $||x|| = |x|$,
(e) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\colon\ |\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$,
(f) $|x| = \max\{x, -x\}$,
(g) $|x + y| \leq |x| + |y|$,
(h) $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

Tvrzení (g) nazýváme **trojúhelníkovou nerovností** reálných čísel.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Definujeme množiny

$$\begin{aligned} (a,b) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}, & [a,b] &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}, \\ (a,b] &= \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}, & [a,b) &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}, \\ (-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R}; x < b\}, & (-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}, \\ (a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x\}, & [a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}, \\ (-\infty,\infty) &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pak množiny (a, b), $(-\infty, b)$, (a, ∞) a $(-\infty, \infty)$ nazýváme **otevřenými intervaly**, množinu $[a, b]$ nazýváme **uzavřeným intervalem** a množiny $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, b]$ a $[a, \infty)$ nazýváme **polouzavřenými intervaly**.

Poznámka. Prázdná množina je intervalem, neboť $(a, a) = \emptyset$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Každá jednoprvková podmnožina $\mathbb{R}$ je intervalem, neboť $[a, a] = \{a\}$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Poznámka. Množina $A \subset \mathbb{R}$ je interval právě tehdy, když platí

$$\forall x, y \in A\ \forall z \in \mathbb{R}\colon (x < z < y \Rightarrow z \in A).$$

Věta 1.6 (existence infima)**.** *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je zdola omezená neprázdná množina. Potom existuje infimum množiny M a označíme-li*

$$-M = \{x \in \mathbb{R}; -x \in M\},$$

pak platí $\inf M = -\sup(-M)$.

Důkaz. Množina $-M$ je zřejmě neprázdná. Nechť $K \in \mathbb{R}$ je dolní závorou M. Pro každé $x \in -M$ platí $-x \in M$, takže $K \leq -x$, tedy $x \leq -K$. Odtud plyne, že $-K$ je horní závorou $-M$. Množina $-M$ je tedy shora omezená. Z vlastnosti III plyne existence suprema $-M$, které označíme G. Dokážeme, že prvek $g = -G$ je infimem množiny M. Pro každé $x \in M$ platí $-x \in -M$, tedy $-x \leq G$, takže $g \leq x$. Číslo g je proto dolní závorou M. Tím je ověřena první podmínka z definice infima. Předpokládejme, že $g' \in \mathbb{R}$ a $g < g'$. Položme $G' = -g'$. Potom $G' < G$, a z druhé vlastnosti suprema tedy vyplývá, že existuje $y \in -M$ takové, že $G' < y$, takže $-y < g'$. Protože $-y \in M$, je tím ověřena i druhá podmínka z definice infima. $\square$

Věta 1.7 (existence celé části reálného čísla)**.** *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno číslo $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $k \le x < k+1$.*

Důkaz. Jednoznačnost. Nechť $k, j \in \mathbb{Z}$ splňují $k \neq j$, $k \le x < k+1$ a $j \le x < j+1$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $j < k$. Potom $k \le x$ a $x < j+1$, takže $0 < k-j < 1$. Protože $k - j \in \mathbb{Z}$ a $0 < k-j$, platí $1 \le k-j$. To je spor s tím, že $k-j < 1$.

Existence. Označme $M = \{n \in \mathbb{Z}; n \le x\}$. Číslo x je horní závorou M, a proto je M shora omezená. Ukážeme, že M je neprázdná. Předpokládejme, že $M = \emptyset$. Pak pro každé $n \in \mathbb{Z}$ platí $x < n$, a proto je množina $\mathbb{Z}$ zdola omezená. Množina $\mathbb{Z}$ je neprázdná, a tedy existuje infimum g množiny $\mathbb{Z}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{Z}$ platí $g \le n$. Je-li $n \in \mathbb{Z}$, pak i $n-1 \in \mathbb{Z}$, a proto $g \le n-1$. Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ potom platí $g+1 \le n$. Prvek $g+1$ je tedy dolní závorou množiny $\mathbb{Z}$, což je spor s tím, že $g = \inf \mathbb{Z}$. Množina M je tudíž neprázdná. Existuje tedy supremum $G \in \mathbb{R}$ množiny M. K němu nalezneme $k \in M$ takové, že $G - 1 < k$. Pak platí $G < k+1$, a tedy $k+1 \notin M$. Odtud a z toho, že $k \in M$, plyne $k \in \mathbb{Z}$ a $k \le x < k+1$. $\square$

Definice. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom číslo $k \in \mathbb{Z}$ splňující $k \le x < k+1$ (jehož existenci a jednoznačnost zaručuje Věta 1.7), nazýváme **celou částí** čísla x a značíme je symbolem $[x]$.

Věta 1.8 (Archimédova vlastnost reálných čísel)**.** *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $x < n$.*

Důkaz. Zvolme $x \in \mathbb{R}$. Položme $n = \max\{[x]+1, 1\}$. Potom zřejmě $n \in \mathbb{N}$. Jestliže $x \le 0$, pak $x < 1 \le n$. Jestliže $x > 0$, pak dle Věty 1.7 platí $x < [x]+1 \le n$. Číslo n tedy má požadované vlastnosti. $\square$

konec 6. přednášky (18.10.2024)

Věta 1.9 (hustota $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pak existuje $y \in \mathbb{Q}$ takové, že $a < y < b$.*

Důkaz. Protože $b - a > 0$, je $\frac{1}{b-a} \in \mathbb{R}$. Podle Věty 1.8 nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\frac{1}{b-a} < n$. Je tedy $na + 1 < nb$. Položme $y = \frac{[na]+1}{n}$. Potom $y \in \mathbb{Q}$ a podle Věty 1.7 platí

$$a = \frac{na}{n} < \frac{[na]+1}{n} \le \frac{na+1}{n} < \frac{nb}{n} = b.$$

$\square$

Poznámka. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pak existuje $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ takové, že $a < z < b$.

1.7. **Komplexní čísla.** Množinou **komplexních čísel** $\mathbb{C}$ rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic $[a, b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, přičemž pro komplexní čísla $x = [a, b]$ a $y = [c, d]$ definujeme operace sčítání a násobení předpisy

- $x + y = [a + c, b + d]$,
- $x \cdot y = [ac - bd, ad + bc]$.

Nechť $x = [a, b] \in \mathbb{C}$. Pak prvek a nazýváme **reálnou částí** komplexního čísla x a prvek b nazýváme **imaginární částí** x. **Absolutní hodnotou** komplexního čísla x rozumíme nezáporné reálné číslo $|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dále definujeme $0 = [0, 0]$, $1 = [1, 0]$ a $i = [0, 1]$. **Komplexně sdruženým číslem** k x rozumíme číslo $\overline{x} = [a, -b]$. Symbol $-x$ značí číslo $[-a, -b]$ a symbol $\frac{1}{x}$ značí pro $x \neq 0$ (jednoznačně určené) komplexní číslo splňující $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

2. Limita posloupnosti

2.1. Vlastní limita posloupnosti.

Definice. (Nekonečnou) posloupností reálných čísel rozumíme každé zobrazení $n \mapsto a_n, n \in \mathbb{N}$, množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Takovou posloupnost obvykle značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, případně jen $\{a_n\}$. Číslo a_n nazýváme **n-tým členem** této posloupnosti.

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Posloupnost $\{a_n\}$ splňující $a_n = c$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ se nazývá **konstantní**.

Definice. Nechť $q \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **geometrickou posloupností**.

Definice. **Fibonacciova posloupnost** je zadána následujícím způsobem: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, platí $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$. Říkáme, že posloupnost je zadána **rekurentně**.

Poznámka. Posloupnost může být zadána velmi rozmanitými způsoby, jak ukazují například posloupnosti $\{n\text{-té prvočíslo}\}$, $\{n + 2018\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n!}\}$, **look and say sequence**.

Poznámka. Symbol $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, případně $\{a_n\}$, označuje posloupnost, tedy zobrazení $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$, zatímco symbol $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ značí **množinu všech členů** této posloupnosti, tedy podmnožinu $\mathbb{R}$. Známe-li $\{a_n\}$, pak známe i $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$, ale nikoli naopak. Zadání posloupnosti kromě informace o oboru hodnot totiž navíc udává pořadí prvků z tohoto oboru. Například posloupnosti $\{(-1)^n\}$ a $\{(-1)^{n+1}\}$ jsou různé, ale mají stejnou množinu všech členů, a to $\{-1, 1\}$.

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \colon |a_n - A| < \varepsilon.$$

Řekneme, že $\{a_n\}$ **má vlastní limitu**, neboli **konverguje** (je **konvergentní**), jestliže existuje reálné číslo A takové, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou A, tedy

$$\exists A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \colon |a_n - A| < \varepsilon. \tag{1}$$

Jestliže posloupnost nemá vlastní limitu, pak říkáme, že **diverguje** (je **divergentní**).

Věta 2.1 (o libovolně malých veličinách)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, platí $|a - b| \leq K\varepsilon$, potom $a = b$.*

Důkaz. Předpokládejme, že a a b jsou různá. Potom $|a - b| > 0$. Položme $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2K}$. Potom $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, a tedy podle předpokladu platí $0 < |a - b| \leq K\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$, což je spor. □

konec 7. přednášky (25.10.2024)

Věta 2.2 (jednoznačnost limity)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A, B \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou A a zároveň posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou B. Potom platí $A = B$.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity nalezneme přirozená čísla n_A, n_B taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_A$, je $|a_n - A| < \varepsilon$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_B$, je $|a_n - B| < \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Potom platí $n_0 \geq n_A$ i $n_0 \geq n_B$, a tedy $|a_{n_0} - A| < \varepsilon$ i $|a_{n_0} - B| < \varepsilon$. Odtud a z trojúhelníkové nerovnosti máme

$$\begin{aligned} |A - B| &= |A - a_{n_0} + a_{n_0} - B| \\ &\leq |A - a_{n_0}| + |a_{n_0} - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Protože $|A - B| < 2\varepsilon$ pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, podle Věty 2.1 platí $A = B$. □

Značení. Jestliže posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu, pak tato limita je určena jednoznačně a označujeme ji symbolem $\lim a_n$, případně $\lim_{n\to\infty} a_n$. Je-li limitou posloupnosti $\{a_n\}$ reálné číslo A, pak píšeme $\lim a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $a_n \overset{n\to\infty}{\to} A$, nebo $a_n \to A$.

Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = c$. Dokažte, že $\lim a_n = c$.

Řešení. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Položme $n_0 = 1$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, takže podle definice limity dostáváme $\lim a_n = c$.

Příklad. Dokažte, že $\lim(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = 0$.

Řešení. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Díky Archimédově vlastnosti nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > \frac{4}{\varepsilon^2}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$|\sqrt{n+2} - \sqrt{n} - 0| = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon,$$

takže z definice limity plyne, že $\lim(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = 0$.

Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{n\}$ nemá vlastní limitu.

Řešení. Zvolme $A \in \mathbb{R}$ a položme $\varepsilon = 1$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$. Podle Archimédovy vlastnosti nalezneme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ takové, že $n > |A| + 1$. Potom platí

$$|n - A| \geq n - |A| \geq |A| + 1 - |A| = 1 = \varepsilon.$$

Tedy neplatí $\lim n = A$. Protože A bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že posloupnost $\{n\}$ nemá vlastní limitu.

Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{(-1)^n\}$ nemá vlastní limitu.

Řešení. Zvolme $A \in \mathbb{R}$ a položme $\varepsilon = 1$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$. Jestliže je $A \geq 0$, díky Archimédově vlastnosti nalezneme liché $n \in \mathbb{N}$ splňující $n \geq n_0$. Potom platí

$$|(-1)^n - A| = |-1 - A| = 1 + A \geq 1 = \varepsilon.$$

Jestliže je $A < 0$, díky Archimédově vlastnosti nalezneme sudé $n \in \mathbb{N}$ splňující $n \geq n_0$. Potom platí

$$|(-1)^n - A| = |1 - A| = 1 - A \geq 1 = \varepsilon.$$

Tedy neplatí $\lim n = A$. Protože A bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že posloupnost $\{n\}$ nemá vlastní limitu.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech jejích členů je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech jejích členů je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

Poznámky. Posloupnosti $\{(-1)^n\}$, $\{\frac{1}{n}\}$ a $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$ jsou omezené. Posloupnost $\{n\}$ je omezená zdola, ale nikoli shora. Posloupnost $\{(-1)^n n!\}$ není omezená zdola ani shora.

Věta 2.3 (charakterisace omezenosti posloupnosti)**.** *Posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ je omezená právě tehdy, když existuje číslo $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq K$.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Díky omezenosti množiny $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ nalezneme čísla $A, B \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $A \leq a_n \leq B$. Položme $K = \max\{|A|, |B|\}$. Pak zřejmě platí $-K \leq a_n \leq K$, a tedy $|a_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$ Nechť $K \in \mathbb{R}$ splňuje $|a_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak $-K \leq a_n \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a tedy množina členů posloupnosti $\{a_n\}$ je omezená. □

Poznámka. Omezená posloupnost nemusí být konvergentní. Příkladem je posloupnost $\{(-1)^n\}$, která je omezená a divergentní.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq a_{n+1}$,
- **rostoucí** jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$,
- **nerostoucí** jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$,
- **klesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$,
- **monotónní**, jestliže je neklesající nebo nerostoucí,
- **ryze monotónní**, jestliže je rostoucí, nebo klesající.

Příklady. Každá konstantní posloupnost je monotónní (oběma způsoby), není však ryze monotónní. Posloupnost $\{(-1)^n\}$ není monotónní. Posloupnosti $\{\frac{1}{n}\}$ a $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$ jsou klesající. Posloupnost $\{n\}$ je rostoucí.

Poznámka. Výrok „posloupnost je neklesající“ není negací výroku „posloupnost je klesající“ (podobně pro nerostoucí a rostoucí).

Věta 2.4 (limita posloupnosti a absolutní hodnota)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel a* $A \in \mathbb{R}$. *Nechť* $\lim a_n = A$. *Potom* $\lim |a_n| = |A|$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon\ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí podle trojúhelníkové nerovnosti odhad $||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \varepsilon$. Protože ε bylo zvoleno libovolně, dokázali jsme výrok

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon\ ||a_n| - |A|| < \varepsilon.$$

To ale podle definice znamená, že $\lim |a_n| = |A|$. □

konec 8. přednášky (30.10.2024)

Poznámka. Z výroku $\lim |a_n| = |A|$ obecně neplyne výrok $\lim a_n = A$. Jestliže například $a_n = \{(-1)^n\}$, $n \in \mathbb{N}$, potom $\lim |a_n| = 1$, ale $\lim a_n$ neexistuje.

Věta 2.5 (nulová limita posloupnosti a absolutní hodnota)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel. Potom* $\lim a_n = 0$ *právě tehdy, když* $\lim |a_n| = 0$.

Důkaz. Podle definice limity je $\lim a_n = 0$, právě když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon\ |a_n - 0| < \varepsilon,$$

zatímco $\lim |a_n| = 0$, právě když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon\ ||a_n| - 0| < \varepsilon.$$

Protože

$$||a_n| - 0| = ||a_n|| = |a_n| = |a_n - 0|\,,$$

jsou oba výroky ekvivalentní. □

Věta 2.6 (charakterisace existence limity posloupnosti)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel a* $A \in \mathbb{R}$. *Pak* $\lim a_n = A$ *právě tehdy, když existuje* $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, *takové, že*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon |a_n - A| < K\varepsilon. \tag{2}$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť $\lim a_n = A$. Pak z definice limity plyne, že (2) platí pro $K = 1$.

$\Leftarrow$ Nechť $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, je číslo splňující (2). Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{K}$. Podle (2) k tomuto ε' existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < K\varepsilon' = \varepsilon$. Protože ε bylo zvoleno libovolně, dokázali jsme výrok

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon |a_n - A| < \varepsilon.$$

To podle definice limity znamená, že $\lim a_n = A$. □

Poznámka. V definici limity posloupnosti může být nerovnost $n \geq n_0$ ekvivalentně nahrazena nerovností $n > n_0$. Podobně nerovnost $|a_n - A| < \varepsilon$ může být ekvivalentně nahrazena nerovností $|a_n - A| \leq \varepsilon$.

Věta 2.7 (vztah konvergence a omezenosti posloupnosti)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *je konvergentní posloupnost reálných čísel. Potom je* $\{a_n\}$ *omezená.*

Důkaz. Podle předpokladu nalezneme $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim a_n = A$. Položme $\varepsilon = 1$. Podle definice limity nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je $|a_n - A| < 1$. Množina $\{|a_n|; n \in \mathbb{N}, n < n_0\}$ je konečná, a tedy je omezená. Nechť $M \in \mathbb{R}$ je její horní závora. Potom podle trojuhelníkové nerovnosti pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí

$$|a_n| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A|,$$

a tedy

$$|a_n| \le \begin{cases} M, & \text{pokud } n \in \mathbb{N}, 1 \le n < n_0, \\ |A|+1, & \text{pokud } n \in \mathbb{N}, n \ge n_0. \end{cases}$$

Nyní položme $K = \max\{M, |A|+1\}$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \le K$, a $\{a_n\}$ je tedy omezená. $\square$

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nazýváme **vybranou posloupností** z posloupnosti $\{a_n\}$, případně **podposloupností** posloupnosti $\{a_n\}$.

Poznámka. Posloupnosti $\{a_n\}$, $\{a_{n+1}\}$, $\{a_{n+k}\}$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n+1}\}$, $\{a_{n^2}\}$ jsou příklady podposloupností posloupnosti $\{a_n\}$.

Věta 2.8 (limita vybrané posloupnosti)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel a $A \in \mathbb{R}$. Jestliže $\lim a_n = A$, pak $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.*

K důkazu věty budeme potřebovat následující lemma.

Lemma. *Nechť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $n_k \ge k$.*

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Protože $n_1 \in \mathbb{N}$, zřejmě máme $n_1 \ge 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ platí $n_k \ge k$. Potom platí $n_{k+1} > n_k \ge k$, neboť $\{n_k\}$ je rostoucí, a tedy $n_{k+1} \ge k+1$. Tím je tvrzení podle principu matematické indukce dokázáno. $\square$

Důkaz Věty 2.8. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \ge n_0\colon\ |a_n - A| < \varepsilon. \tag{3}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \ge n_0$, platí díky lemmatu nerovnost $n_k \ge k \ge n_0$, a tedy podle (3) dostaneme $|a_{n_k} - A| < \varepsilon$. Tím je věta dokázána. $\square$

Poznámka. Jestliže existují dvě podposloupnosti posloupnosti $\{a_n\}$ mající různé limity, pak je $\{a_n\}$ divergentní. Kdyby totiž posloupnost $\{a_n\}$ měla vlastní limitu A, pak by obě podposloupnosti musely mít podle Věty 2.8 limitu A, což by byl spor.

Poznámka. Předchozího poznámka nám umožňuje alternativním způsobem dokázat, že posloupnost $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ je divergentní. Platí totiž $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$ a $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = -1$. Nalezli jsme dvě podposloupnosti s různými limitami, takže $\lim(-1)^n$ neexistuje.

Věta 2.9 (aritmetika vlastních limit)**.** *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}$, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Potom platí:*

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,
(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,
(c) *jestliže navíc $B \neq 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n \neq 0$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity existují přirozená čísla n_A, n_B taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_A$, je $|A - a_n| < \varepsilon$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_B$, je $|B - b_n| < \varepsilon$. Položíme-li $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$, pak pro $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, platí obě uvedené nerovnosti.

(a) Z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, platí

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (A + B)| &= |(a_n - A) + (b_n - B)| \\ &\le |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Dokazované tvrzení tedy vyplývá z Věty 2.6 pro $K = 2$.

(b) Posloupnost $\{b_n\}$ je konvergentní, a tedy podle Věty 2.7 je také omezená. Jinými slovy existuje $L \in \mathbb{R}, L > 0$, takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|b_n| \le L$. Úpravou výrazu $a_n b_n - AB$ a použitím trojúhelníkové nerovnosti dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$,

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |(a_n b_n - b_n A) + (b_n A - AB)| \le |a_n b_n - b_n A| + |b_n A - AB| \\ &= |b_n|\,|a_n - A| + |A|\,|b_n - B|\,. \end{aligned}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, dále platí

$$|b_n|\,|a_n - A| + |A|\,|b_n - B| < L\varepsilon + |A|\varepsilon = (L + |A|)\varepsilon,$$

a tedy

$$|a_n b_n - AB| < (L + |A|)\varepsilon.$$

Dokazované tvrzení tedy vyplývá z Věty 2.6 pro $K = L + |A|$.

konec 9. přednášky (1.11.2024)

(c) Obdobnými úpravami jako v důkazech předchozích tvrzení dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| &= \left|\frac{a_n B - A b_n}{b_n B}\right| = \left|\frac{a_n B - AB + AB - A b_n}{b_n B}\right| \\
&\leq \left|\frac{a_n B - AB}{b_n B}\right| + \left|\frac{AB - A b_n}{b_n B}\right| \\
&= \frac{|a_n - A|}{|b_n|} + \frac{|A|\,|b_n - B|}{|b_n|\,|B|}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Podle definice limity nalezneme ke kladnému číslu $\frac{|B|}{2}$ takové $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí

$$|B - b_n| < \frac{|B|}{2}.$$

Tedy podle trojúhelníkové nerovnosti pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí

$$\frac{|B|}{2} > |B - b_n| \geq |B| - |b_n|,$$

a tudíž

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|B|}. \tag{5}$$

Položme $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, platí podle (4) a (5)

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| \leq \frac{2}{|B|}\,|a_n - A| + \frac{2\,|A|}{B^2}\,|b_n - B| < \frac{2}{|B|}\varepsilon + \frac{2\,|A|}{B^2}\varepsilon = \left(\frac{2}{|B|} + \frac{2\,|A|}{B^2}\right)\varepsilon.$$

Tvrzení tudíž plyne z Věty 2.6. □

Věta 2.10 (limita součinu členů omezené posloupnosti a posloupnosti s nulovou limitou)**.** *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, přičemž $\lim a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Potom $\lim a_n b_n = 0$.*

Důkaz. Protože $\{b_n\}$ je omezená, nalezneme číslo $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, splňující $|b_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Protože $\lim a_n = 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, tudíž platí

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| < K\varepsilon.$$

Podle Věty 2.6 platí $\lim a_n b_n = 0$. □

Poznámka. Tvrzení Věty 2.10 neplyne z Věty 2.9, protože posloupnost $\{b_n\}$ nemusí mít vlastní limitu.

Příklad. Spočtěte $\lim(3 + (-1)^n)(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$.

Řešení. Víme že $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = 0$. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $2 \leq 3 + (-1)^n \leq 4$, takže posloupnost $\{3 + (-1)^n\}$ je omezená. Z Věty 2.10 tedy plyne, že

$$\lim(3 + (-1)^n)(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = 0.$$

Poznámka. Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, potom platí

$$|a - b| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon < a - b < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad b - \varepsilon < a < b + \varepsilon.$$

Věta 2.11 (limita posloupnosti a uspořádání). *Nechť* $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *jsou posloupnosti reálných čísel,* $A, B \in \mathbb{R}$, $\lim a_n = A$ *a* $\lim b_n = B$.

(a) *Nechť* $A < B$. *Potom existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *platí* $a_n < b_n$.
(b) *Nechť existuje* $n_1 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, *platí* $a_n \geq b_n$. *Potom* $A \geq B$.

Důkaz. (a) Položme $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$. Pak podle definice limity nalezneme $n_A \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_A$, platí $a_n < A + \varepsilon$ a $n_B \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_B$, platí $b_n > B - \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$a_n < A + \varepsilon = \frac{A+B}{2} = B - \varepsilon < b_n.$$

(b) Předpokládejme, že $A < B$. Potom podle tvrzení (a) nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < b_n$. Položme $m = \max\{n_0, n_1\}$. Pak $a_m < b_m \leq a_m$, což je spor. Tedy $A \geq B$. □

Poznámka. Z toho, že existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n > b_n$, neplyne $A > B$. Příkladem jsou posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ definované předpisy $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 0$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Podobně z výroku $A \leq B$ neplyne existence $n_0 \in \mathbb{N}$ takového, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \leq b_n$. Příkladem jsou posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ definované předpisy $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Věta 2.12 (o dvou strážnících). *Nechť* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *a* $\{c_n\}$ *jsou posloupnosti splňující:*

(a) *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *platí* $a_n \leq c_n \leq b_n$,
(b) *existuje* $A \in \mathbb{R}$ *takové, že* $\lim a_n = A$ *a* $\lim b_n = A$.

Potom $\lim c_n = A$.

Důkaz. Označme $\lim a_n = A$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu podle předpokladu (b) existují $n_A, n_B \in \mathbb{N}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_A$, platí

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_B$, platí

$$A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon.$$

Položme $n_1 = \max\{n_0, n_A, n_B\}$. Potom odtud a z předpokladu (a) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí

$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon,$$

a tedy $|c_n - A| < \varepsilon$. □

Poznámka. Důležitou součástí tvrzení Věty 2.12 je existence limity posloupnosti c_n. Věta 2.12 tudíž není bezprostředním důsledkem Věty 2.11.

Příklad. Spočtěte $\lim \sqrt[n]{n}$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[n]{n} \geq 1$, můžeme psát $\sqrt[n]{n} = 1 + \theta_n$, kde $\theta_n \geq 0$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom podle binomické věty platí

$$n = (1+\theta_n)^n \geq 1 + n\theta_n + \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2.$$

Protože platí $n - 1 \geq \frac{n}{2}$, dostáváme

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2 \geq \frac{n^2}{4}\theta_n^2.$$

Odtud a z monotonie odmocniny plyne $\frac{2}{\sqrt{n}} \geq \theta_n$. Uvedená nerovnost platí pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, a tedy $\lim \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$, takže podle Věty 2.12 máme $\lim_{n\to\infty} \theta_n = 0$. Odtud plyne dokazované tvrzení.

Příklad. Nechť $A \in \mathbb{R}$, $A > 0$. Spočtěte $\lim \sqrt[n]{A}$.

Řešení. Nechť nejprve $A \geq 1$. Pomocí Archimédovy vlastnosti (Věta 1.8) nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > A$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $1 \leq \sqrt[n]{A} \leq \sqrt[n]{n}$. Z věty o dvou strážnících plyne $\lim \sqrt[n]{A} = 1$.

Nechť nyní $A \in (0,1)$. Potom podle věty o limitě podílu (Věta 2.9(c)) a podle již dokázaného tvrzení platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{A} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{A}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{A}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

2.2. **Nevlastní limita posloupnosti.**

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $\{a_n\}$ má **limitu rovnou** ∞, jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n > K.$$

Řekneme, že $\{a_n\}$ má **limitu rovnou** $-\infty$, jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n < K.$$

Má-li posloupnost limitu rovnou ∞, nebo $-\infty$, říkáme, že má **nevlastní limitu**. Jestliže má posloupnost limitu rovnou ∞, pak říkáme, že **diverguje** k ∞. Jestliže má posloupnost limitu rovnou $-\infty$, pak říkáme, že **diverguje** k $-\infty$.

konec 10. přednášky (6.11.2024)

Definice. **Rozšířenou množinou reálných čísel** budeme nazývat množinu $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a budeme ji značit $\mathbb{R}^*$.

Operace sčítání. Sčítání rozšiřujeme takto:

- $\forall a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \colon \infty + a = a + \infty = \infty$,
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \colon -\infty + a = a + (-\infty) = -\infty$.

Operace odčítání. Operace odčítání dvou reálných čísel a, b je definována jako součet čísla a a čísla opačného k b, tj. $a - b = a + (-b)$. Pro rozšíření této operace postačí definovat čísla opačná k ∞ a $-\infty$ a použít předchozí rozšíření operace sčítání. Definujeme $-(\infty) = -\infty$ a $-(-\infty) = \infty$.

Operace násobení. Definujeme:

- $\forall a \in (0,\infty) \cup \{\infty\} \colon a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$,
- $\forall a \in (0,\infty) \cup \{\infty\} \colon a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$,
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0) \colon a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty$,
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0) \colon a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty$.

Operace dělení. Operace dělení dvou reálných čísel a, b je definována jako součin čísla a a inverzního prvku k b, tj. $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$. Pro rozšíření operace dělení postačí tedy definovat $\frac{1}{\infty} = 0$ a $\frac{1}{-\infty} = 0$.

Následující výrazy tedy nejsou definovány:

$$\infty + (-\infty), \quad -\infty + \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0.$$

Relace uspořádání. Definujeme:

- $\forall a \in \mathbb{R}^* \colon -\infty \leq a$,
- $\forall a \in \mathbb{R}^* \colon a \leq \infty$.

Absolutní hodnotu rozšíříme na $\mathbb{R}^*$ tak, že klademe $|\infty| = \infty$ a $|-\infty| = \infty$.

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ a $G \in \mathbb{R}^*$. Předpokládejme, že platí následující podmínky:

(a) $\forall a \in A \colon a \leq G$,
(b) $\forall G' \in \mathbb{R}^*, G' < G\ \exists a \in A \colon G' < a$.

Pak G nazýváme **supremem** množiny A. Obdobně definujeme **infimum** množiny A.

Poznámka. Pro neprázdnou a shora omezenou podmnožinu reálných čísel se pojem suprema v množině $\mathbb{R}$ shoduje s pojmem suprema v $\mathbb{R}^*$. Shora neomezená podmnožina $\mathbb{R}$ nemá v $\mathbb{R}$ supremum, v $\mathbb{R}^*$ je však tímto supremem ∞. Podobně zdola neomezená množina v $\mathbb{R}$ má infimum v $\mathbb{R}^*$ rovné $-\infty$. Konečně pro prázdnou množinu platí podle definice $\inf\emptyset = \infty$ a $\sup\emptyset = -\infty$, pokud uvažujeme supremum a infimum vzhledem k $\mathbb{R}^*$. Supremum a infimum jsou určena jednoznačně a budeme je značit obvyklým způsobem.

Věta 2.13 (jednoznačnost limity podruhé)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, která má limitu rovnou $A \in \mathbb{R}^*$ a zároveň má limitu rovnou $B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí $A = B$.*

Důkaz. Dokázali jsme již, že nejvýše jedno reálné číslo může být limitou posloupnosti $\{a_n\}$ (Věta 2.2). Zbývá dokázat, že nemůže nastat žádný z případů:

(a) $\{a_n\}$ je konvergentní a současně má limitu ∞,
(b) $\{a_n\}$ je konvergentní a současně má limitu $-\infty$,
(c) $\{a_n\}$ má limitu ∞ a současně $-\infty$.

Případ (a). Předpokládejme pro spor, že platí (a). Podle Věty 2.7 je $\{a_n\}$ omezená, a tedy je omezená shora. Tudíž nalezneme $K \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \leq K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože ale současně má posloupnost $\{a_n\}$ limitu ∞, nalezneme přirozené číslo n_0 takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je $a_n > K$, což je spor.

Případy (b) *a* (c). Důkaz je obdobný. □

Značení. Má-li posloupnost $\{a_n\}$ nevlastní limitu, označujeme hodnotu této limity opět symbolem $\lim a_n$. Píšeme tedy $\lim a_n = \infty$ nebo $\lim a_n = -\infty$.

Poznámka. Pro každou posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ nastává právě jedna z následujících možností:

$$\lim a_n \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{vlastní, tj. je rovna reálnému číslu,} \\ \text{nevlastní, tj. je rovna } \infty \text{ nebo } -\infty, \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Potom **okolím** bodu c rozumíme každou množinu tvaru $B(c,\varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$. **Okolím** bodu ∞ rozumíme každou množinu tvaru $B(\infty,\varepsilon) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$. **Okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každou množinu tvaru $B(-\infty,\varepsilon) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$.

Lemma (o disjunktních okolích)**.** *Nechť $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^*$, $A \neq \tilde{A}$. Potom existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, takové, že $A \notin B(\tilde{A},\varepsilon)$.*

Důkaz. Rozlišíme následující případy.

Případ $\tilde{A} \in \mathbb{R}$. Je-li také $A \in \mathbb{R}$, pak položíme $\varepsilon = \frac{1}{2}|\tilde{A} - A|$. Potom zřejmě platí $A \notin B(\tilde{A},\varepsilon)$. Je-li $A = \infty$ nebo $A = -\infty$, zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně a opět dostaneme $A \notin B(\tilde{A},\varepsilon)$.

Případ $\tilde{A} = \infty$. Je-li $A \in \mathbb{R}$, položíme $\varepsilon = \frac{1}{|A|+1}$. Potom $A < |A| + 1 = \frac{1}{\varepsilon}$, a tedy $A \notin B(\tilde{A},\varepsilon)$. Je-li $A = -\infty$, zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně a opět obdržíme $A \notin B(\tilde{A},\varepsilon)$.

Případ $\tilde{A} = -\infty$. Tvrzení lze dokázat obdobně jako pro $\tilde{A} = \infty$. □

Věta 2.14 (limita a okolí)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Pak $\lim a_n = A$ právě tehdy, když platí*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n \in B(A,\varepsilon). \tag{6}$$

Důkaz. Případ $A \in \mathbb{R}$. Potom je pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, výrok $a_n \in B(A,\varepsilon)$ ekvivalentní výroku $|a_n - A| < \varepsilon$. Takže v tomto případě je formule (6) shodná a formulí (1).

Případ $A = \infty$. Předpokládejme nejprve, že $\lim a_n = A$. Ověříme (6). Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $K = \frac{1}{\varepsilon}$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > K$. To podle definice okolí bodu ∞ znamená, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \in B(\infty,\varepsilon)$. Odtud plyne (6).

Nyní předpokládejme, že platí (6). Zvolme $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, následujícím způsobem. Je-li $K \leq 0$, zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně. Je-li $K > 0$, položíme $\varepsilon = \frac{1}{K}$. V obou případech pak platí $\frac{1}{\varepsilon} \geq K$. K tomuto ε pak nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \in B(\infty, \varepsilon)$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$, a tedy $a_n > K$. Odtud plyne $\lim a_n = A$.

Případ $A = -\infty$. Důkaz lze provést obdobně jako v předchozím případě. □

Poznámka. Věty o limitě vybrané posloupnosti, o limitě a absolutní hodnotě, o limitě a uspořádání a o dvou strážnících platí v nezměněné podobě i tehdy, připustíme-li nevlastní limity.

Věta 2.15 (nevlastní limita posloupnosti a jednostranná omezenost)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel. Jestliže* $\lim a_n = \infty$*, potom je* $\{a_n\}$ *zdola omezená. Jestliže* $\lim a_n = -\infty$*, potom je* $\{a_n\}$ *shora omezená.*

Důkaz. Dle definice nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \geq 1$. Množina $\{a_n; n \in \mathbb{N}, n < n_0\}$ je konečná, a tedy omezená. Nechť $M \in \mathbb{R}$ je některá její dolní závora. Potom

$$a_n \geq \begin{cases} M, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N}, 1 \leq n < n_0, \\ 1, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0. \end{cases}$$

Položme $K = \min\{M, 1\}$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ tedy máme $a_n \geq K$, takže posloupnost $\{a_n\}$ je zdola omezená. □

Věta 2.16 (o andělovi)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *a* $\{c_n\}$ *jsou posloupnosti reálných čísel splňující:*

(a) *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$*, platí* $a_n \leq c_n$,
(b) $\lim a_n = \infty$.

Potom $\lim c_n = \infty$.

Důkaz. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n > K$. Položme $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_2$, pak platí $c_n \geq a_n$, a tedy $c_n > K$. Odtud plyne, že $\lim c_n = \infty$. □

Věta 2.17 (o ďáblovi)**.** *Nechť* $\{b_n\}$ *a* $\{c_n\}$ *jsou posloupnosti reálných čísel splňující:*

(a) *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$*, platí* $c_n \leq b_n$,
(b) $\lim b_n = -\infty$.

Potom $\lim c_n = -\infty$.

Důkaz. Tvrzení lze dokázat obdobně jako tvrzení Věty 2.16. □

Věta 2.18 (změna konečně mnoha členů posloupnosti)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *jsou posloupnosti reálných čísel,* $A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim a_n = A$*. Nechť existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$*, platí* $a_n = b_n$*. Potom* $\lim b_n = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \colon a_n \in B(A, \varepsilon).$$

Položme $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, platí $b_n = a_n$, a tedy $b_n \in B(A, \varepsilon)$. Odtud vyplývá, že $\lim b_n = A$. □

Poznámka. Z Věty 2.18 plyne, že změníme-li u dané posloupnosti konečně mnoho členů, pak se konvergenční vlastnosti posloupnosti nezmění.

Věta 2.19 (aritmetika limit)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *jsou posloupnosti reálných čísel,* $A, B \in \mathbb{R}^*$, $\lim a_n = A$ *a* $\lim b_n = B$*. Potom platí:*

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$*, pokud je výraz na pravé straně definován,*
(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$*, pokud je výraz na pravé straně definován,*
(c) *je-li* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$*, pak* $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$*, pokud je výraz na pravé straně definován.*

Důkaz. Tuto větu lze dokázat obdobně jako Větu 2.9. Uvedeme pouze důkaz tvrzení (b), a to v případě, kdy $A \in \mathbb{R}, A < 0$, a $B = -\infty$.

Chceme tedy dokázat, že $\lim(a_n \cdot b_n) = \infty$. Nechť $K \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = -\frac{1}{2}A$. Potom $\varepsilon > 0$. Z předpokladu $\lim a_n = A$ a z definice limity vyplývá existence takového $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon) = (\frac{3}{2}A, \frac{1}{2}A)$. Podobně z předpokladu $\lim b_n = -\infty$ plyne existence takového $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, platí $b_n < \min\{0, \frac{2K}{A}\}$. Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$a_n \cdot b_n > \frac{1}{2}A \cdot b_n > K.$$

Tím je dokázáno, že $\lim(a_n \cdot b_n) = \infty$. □

Poznámka. Víme-li pouze, že $\lim a_n = \infty$ a $\lim b_n = -\infty$, pak odtud nemůžeme vyvodit žádnou informaci o existenci nebo hodnotě $\lim(a_n + b_n)$. Nechť například $A \in \mathbb{R}$, $\{a_n\} = \{n\}$ a $\{b_n\} = \{-n + A\}$. Pak

$$\lim a_n = \infty, \quad \lim b_n = -\infty \quad \text{a} \quad \lim(a_n + b_n) = A.$$

Výraz $\infty - \infty$ nelze tedy definovat tak, aby platila věta o limitě součtu. Existence a případně i hodnota $\lim(a_n + b_n)$ závisí na jemnějším chování posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$. Předpoklad, že výrazy na pravých stranách jsou definovány, nelze tedy z věty o aritmetice limit (Věta 2.19) vynechat.

Obdobně například pro posloupnost $\{a_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ platí $\lim a_n = 0$, ale $\lim \frac{1}{a_n} = \lim(-1)^n n$ neexistuje ani nevlastní.

konec 11. přednášky (8.11.2024)

Věta 2.20 (nevlastní limita podílu)**.** *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$, a platí:*

- *pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n \neq 0$,*
- *$\lim a_n = A$,*
- *$\lim b_n = 0$,*
- *existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n > 0$.*

Potom $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Důkaz. Posloupnost $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ je dobře definována, neboť $b_n \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Případ $A \in \mathbb{R}, A > 0$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}A$. K němu nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \colon a_n > A - \varepsilon = A - \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}A.$$

Položme $L = \max\{1, K\}$. Nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 \colon b_n < \frac{A}{2L}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$, platí

$$\frac{a_n}{b_n} > \tfrac{1}{2}A \cdot \frac{1}{b_n} > \tfrac{1}{2}A \cdot \frac{1}{\frac{A}{2L}} = L \geq K.$$

Tím jsme ověřili, že $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Případ $A = \infty$. Zvolme opět $K \in \mathbb{R}$ a položme $L = \max\{1, K\}$. Nalezneme $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \colon a_n > 1,$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 \colon b_n < \frac{1}{L}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$, platí

$$\frac{a_n}{b_n} > 1 \cdot \frac{1}{b_n} > 1 \cdot L = L \geq K,$$

a tedy $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$. $\square$

2.3. **Hlubší věty o limitě posloupnosti.**

Poznámka. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $\{a_n\}$ je neklesající právě tehdy, když platí

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m < n \colon a_m \leq a_n.$$

Implikaci $\Rightarrow$ lze dokázat snadno matematickou indukcí, opačná implikace je zřejmá. Obdobná tvrzení platí i pro ostatní typy monotonie.

Věta 2.21 (limita monotónní posloupnosti)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost reálných čísel. Potom existuje $\lim a_n$. Je-li $\{a_n\}$ neklesající, pak $\lim a_n = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Je-li $\{a_n\}$ nerostoucí, pak $\lim a_n = \inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$.*

Důkaz. Rozlišíme následující možnosti.

Posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající a není shora omezená. Potom $\sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\} = \infty$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > K$. Protože $\{a_n\}$ je neklesající, platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, nerovnosti $a_n \geq a_{n_0} > K$. Odtud vyplývá, že $\lim a_n = \infty$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající a je shora omezená. Označme $A = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Pak platí $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice suprema nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > A - \varepsilon$. Protože však $\{a_n\}$ je neklesající, je $A-\varepsilon < a_{n_0} \leq a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Nerovnost $a_n < A+\varepsilon$ platí dokonce pro každé $n \in \mathbb{N}$, neboť A je horní závorou množiny všech členů posloupnosti $\{a_n\}$. Ke zvolenému ε jsme tedy nalezli $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

To podle definice limity znamená, že $\lim a_n = A$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí. V tomto případě lze tvrzení dokázat obdobně. Můžeme ale také postupovat následujícím způsobem. Snadno nahlédneme, že posloupnost $\{-a_n\}$ je neklesající. Podle již dokázané části věty je tedy $\lim(-a_n) = \sup\{-a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Podle Věty 1.6 odtud plyne, že $\lim(-a_n) = -\inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Konečně podle věty o limitě součinu (Věta 2.19(b)) dostáváme

$$\lim a_n = \lim(-1)(-a_n) = -\lim(-a_n) = \inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

$\square$

Věta 2.22 (vztah monotonie a konvergence)**.** *Nechť posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající shora omezená nebo nerostoucí zdola omezená. Potom je $\{a_n\}$ konvergentní.*

Důkaz. Nechť $\{a_n\}$ je neklesající shora omezená posloupnost. Z Věty 2.21 vyplývá, že $\lim a_n = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Z omezenosti posloupnosti shora dále plyne, že $\sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy konvergentní.

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ nerostoucí a zdola omezená, pak lze důkaz provést obdobně. $\square$

Poznámka. Věta 2.21 umožňuje ověřit existenci limity posloupnosti, aniž by bylo nutné ji explicitně vypočítat. V některých případech je ale informace o existenci limity nezbytnou součástí jejího výpočtu. Tento jev ilustruje následující příklad.

Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Spočtěte limitu posloupnosti $\{a_n\}$, která je zadána rekurentně: $a_1 = \sqrt{c}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} = \sqrt{a_n + c}$.

Řešení. *Posloupnost $\{a_n\}$ je dobře definovaná.* Člen a_1 je dobře definován a je kladný. Předpokládáme-li, že člen a_n je definován a je kladný, pak je definován i člen a_{n+1} a je kladný. Podle principu matematické indukce je tedy posloupnost $\{a_n\}$ dobře definovaná a její členy jsou nezáporné.

Posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí. Matematickou indukcí dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$, odkud vyplyne dokazovaná vlastnost. Zřejmě platí $a_1 < a_2$. Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$. Potom máme

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} < \sqrt{a_{n+1} + c} = a_{n+2}.$$

Odtud plyne tvrzení.

Posloupnost $\{a_n\}$ je shora omezená. Matematickou indukcí dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < \sqrt{c}+1$. Zřejmě platí nerovnost $a_1 < \sqrt{c}+1$. Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < \sqrt{c}+1$. Potom

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} < \sqrt{\sqrt{c} + 1 + c} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} = \sqrt{\left(\sqrt{c} + 1\right)^2} = \sqrt{c} + 1.$$

Z principu matematické indukce tedy plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n < \sqrt{c}+1$, takže $\{a_n\}$ je shora omezená. Ověřili jsme, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje předpoklady Věty 2.22. Posloupnost $\{a_n\}$ má tedy vlastní limitu. Označme ji symbolem A.

Výpočet limity. Z rekurentní definice posloupnosti plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + c$. Z věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.8) odvodíme, že také $\lim a_{n+1} = A$, a z věty o aritmetice limit (Věta 2.19) dostaneme vztahy $\lim a_{n+1}^2 = A^2$ a $\lim(a_n + c) = A + c$. Číslo A tedy splňuje kvadratickou rovnici $A^2 = A + c$. Výpočtem zjistíme, že A je rovno buď $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4c}\right)$ nebo $\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1+4c}\right)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$. Dle Věty 2.11(b) pro $B = 0$ a $b_n = 0, n \in \mathbb{N}$, platí $A \geq 0$. Tedy neplatí $A = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1+4c})$, protože výraz na pravé straně je záporné číslo. Odtud vyplývá, že $\lim a_n = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4c}\right)$.

Poznámka. Důležitou součástí řešení předcházejícího příkladu bylo ověření existence limity posloupnosti $\{a_n\}$. Bez tohoto kroku by bylo řešení neúplné. Uvažujme posloupnost $\{a_n\}$ definovanou rekurentně předpisem

$$a_1 = -1, \quad a_{n+1} = -a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Za předpokladu, že $\lim a_n$ existuje a je rovna prvku $A \in \mathbb{R}^*$, bychom podobně jako v řešení příkladu odvodili, že $A = -A$, a tedy $A = 0$. Limita posloupnosti $\{a_n\}$ ale není rovna 0, neboť $a_n = (-1)^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, jak lze snadno ověřit.

Příklad. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Dokažte, že platí:

- $\{a_n\}$ je omezená a rostoucí,
- $\{b_n\}$ je omezená a klesající,
- $\lim a_n = \lim b_n \in \mathbb{R}$.

Řešení. *Posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí.* Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom z Bernoulliovy nerovnosti plyne, že

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 + n\frac{-1}{(n+1)^2} > 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Odtud dostaneme

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n > \frac{n+1}{n+2}.$$

Tedy

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n < \frac{n+2}{n+1}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tudíž platí

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1},$$

takže posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí.

konec 12. přednášky (13.11.2024)

Posloupnost $\{b_n\}$ je klesající. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom z Bernoulliovy nerovnosti plyne odhad

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1+\frac{1}{n}.$$

Nerovnost lze přepsat ve tvaru

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} > \frac{n+1}{n},$$

a tedy

$$\frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2},$$

jinými slovy,

$$b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} = b_{n+1}.$$

Odtud vyplývá, že posloupnost $\{b_n\}$ je klesající.

Omezenost posloupností. Z monotonie posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ a jejich definice dostaneme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$2 = a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1 = 4.$$

Odtud plyne omezenost obou posloupností.

Existence společné vlastní limity. Z Věty 2.22 plyne, že existují vlastní limity $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.11) platí $A, B \in [2,4]$. Podle věty o limitě podílu (Věta 2.19(c)) tedy dále platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{B}{A}.$$

Podle definice posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Tedy $A = B$. Tím je tvrzení dokázáno.

Definice. Označme

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Z výše uvedeného příkladu vyplývá, že číslo e je dobře definováno. Nazýváme jej **Eulerovým číslem**.

Věta 2.23 (Bolzano–Weierstrass)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je omezená posloupnost reálných čísel. Potom existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, která je konvergentní.*

Důkaz. Zkonstruujeme pomocné posloupnosti $\{\alpha_k\}$ a $\{\beta_k\}$ takové, že $\alpha_1 \leq \beta_1$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí:

(a) $[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}] = [\alpha_k, \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)]$, nebo $[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}] = [\frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k), \beta_k]$,
(b) množina $\{j \in \mathbb{N}; a_j \in [\alpha_k, \beta_k]\}$ je nekonečná.

Konstrukce pomocných posloupností. Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, a proto existují $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_1 \leq a_n \leq \beta_1$. Potom platí $\{j \in \mathbb{N}; a_j \in [\alpha_1, \beta_1]\} = \mathbb{N}$, což je nekonečná množina.

Předpokládejme, že pro $k \in \mathbb{N}$ máme již zvolena čísla α_k a β_k a platí (b). Je-li množina

$$L = \left\{j \in \mathbb{N}; a_j \in [\alpha_k, \tfrac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)]\right\}$$

nekonečná, pak položíme $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ a $\beta_{k+1} = \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)$. Je-li množina L konečná, pak je množina

$$P = \left\{j \in \mathbb{N}; a_j \in [\tfrac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k), \beta_k]\right\}$$

nekonečná. Podle (b) je totiž množina
$$L \cup P = \{j \in \mathbb{N}; a_j \in [\alpha_k, \beta_k]\}$$
nekonečná. V tomto případě položíme $\alpha_{k+1} = \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)$ a $\beta_{k+1} = \beta_k$. Uvedený postup zaručuje splnění podmínek (a) a (b) i pro $k+1$. Tím je konstrukce provedena.

Limita pomocných posloupností. Podle (a) je $\{\alpha_k\}$ neklesající a $\{\beta_k\}$ nerostoucí. Navíc opět podle (a) pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\beta_k - \alpha_k = 2^{-(k-1)}(\beta_1 - \alpha_1)$ a také $\alpha_1 \leq \alpha_k \leq \beta_k \leq \beta_1$. Posloupnosti $\{\alpha_k\}$ a $\{\beta_k\}$ jsou tedy omezené. Tudíž existují vlastní limity $\lim \alpha_k$ a $\lim \beta_k$, které po řadě označíme α a β. Z věty o aritmetice limit plyne, že $\lim(\beta_k - \alpha_k) = \beta - \alpha$. Platí také
$$\lim(\beta_k - \alpha_k) = \lim \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2^{k-1}} = 0,$$
takže $\alpha = \beta$.

Konstrukce vybrané posloupnosti. Položme $n_1 = 1$ a předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme zvolena přirozená čísla $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ taková, že pro všechna $j \in \mathbb{N}$, $j \leq k$, platí $a_{n_j} \in [\alpha_j, \beta_j]$. Podle výše uvedené konstrukce je množina $\{n \in \mathbb{N}; a_n \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]\}$ nekonečná. Tudíž také množina $\{n \in \mathbb{N}; n > n_k,\ a_n \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]\}$ je nekonečná. Tedy existuje $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k+1} > n_k$ a $a_{n_{k+1}} \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k$. Dle věty o dvou strážnících tedy platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$. Protože $\alpha \in \mathbb{R}$, nalezli jsme konvergentní podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$. □

Poznámka. Nechť $\{a_n\}$ je shora omezená posloupnost. Položíme-li $b_n = \sup\{a_k; k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, pak je $\{b_n\}$ nerostoucí posloupnost. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.21) tedy existuje $\lim b_n$. Nechť je posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená. Položíme-li $c_n = \inf\{a_k; k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, pak je $\{c_n\}$ neklesající posloupnost, a tedy $\lim c_n$ opět existuje. Tyto úvahy ukazují, že následující definice je korektní, neboť v ní uvedené limity existují.

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pak definujeme
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{a_k; k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ shora omezená,} \\ \infty, & \text{není-li } \{a_n\} \text{ shora omezená.} \end{cases}$$
Tuto hodnotu nazýváme **limes superior** posloupnosti $\{a_n\}$. Obdobně definujeme **limes inferior** posloupnosti $\{a_n\}$ předpisem
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{a_k; k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ zdola omezená,} \\ -\infty, & \text{není-li } \{a_n\} \text{ zdola omezená.} \end{cases}$$
Pokud nemůže dojít k nedorozumění, budeme místo symbolů $\limsup_{n\to\infty} a_n$ a $\liminf_{n\to\infty} a_n$ psát pouze $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$.

Poznámka. V literatuře se často vyskytují symboly $\overline{\lim}\ a_n$ a $\underline{\lim}\ a_n$ označující $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$, zde je ale nebudeme používat.

Poznámky. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Na rozdíl od limity posloupnosti, která nemusí existovat, hodnoty $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ existují vždy a splňují $\limsup a_n \in \mathbb{R}^*$, $\liminf a_n \in \mathbb{R}^*$. Z definice limes inferior a limes superior plyne, že $\liminf a_n \leq \limsup a_n$. Hodnoty $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ se nemusí rovnat, jak ukazuje následující příklad.

Příklad. Dokažte, že $\limsup(-1)^n = 1$ a $\liminf(-1)^n = -1$.

Řešení. Posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená, neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|(-1)^n| = 1$. Odtud vyplývá, že
$$\limsup(-1)^n = \lim_{n\to\infty} \sup\{(-1)^k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}.$$
Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ existuje sudé číslo $k \geq n$. To znamená, že
$$\sup\{(-1)^k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\} = 1,$$
a tedy
$$\limsup(-1)^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Obdobně lze dokázat, že $\liminf(-1)^n = -1$.

Věta 2.24 (o vztahu limity, limes superior a limes inferior)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $A \in \mathbb{R}^*$. Potom $\lim a_n = A$ právě tehdy, když $\limsup a_n = \liminf a_n = A$.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Rozlišíme následující případy.

Případ $A \in \mathbb{R}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní, a tedy podle Věty 2.7 omezená. Uvažujme posloupnosti $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ definované ve výše uvedené poznámce. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > A - \varepsilon$, z definice infima dostáváme nerovnost $c_{n_0} \geq A - \varepsilon$. Podobně lze odvodit nerovnost $b_{n_0} \leq A + \varepsilon$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$A - \varepsilon \leq c_{n_0} \leq c_n \leq b_n \leq b_{n_0} \leq A + \varepsilon.$$

Podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.11(b)) dostáváme

$$A - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq A + \varepsilon.$$

Vzhledem k tomu, že ε bylo zvoleno libovolně, platí podle Věty 2.1 $\limsup a_n = \liminf a_n = A$.

Případ $A = \infty$. Pak $\{a_n\}$ není shora omezená, ale je omezená zdola (Věta 2.15). Tedy podle definice dostáváme $\limsup a_n = \infty$ a $\liminf a_n = \lim c_n$. Nechť $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > K$, a tedy také $c_n \geq K$. Odtud plyne $\lim c_n = \infty$, a tudíž $\liminf a_n = \infty$.

Případ $A = -\infty$. Postupujeme obdobně jako v předcházejícím případě.

konec 13. přednášky (15.11.2024)

$\Leftarrow$

Případ $A \in \mathbb{R}$. Potom je podle definice limes superior a limes inferior posloupnost $\{a_n\}$ omezená. Nechť posloupnosti $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou definovány stejně jako výše. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $c_n \leq a_n \leq b_n$. Navíc z předpokladu vyplývá, že $\lim c_n = \lim b_n = A$. Pomocí věty o dvou strážnících (Věta 2.12) tedy dostáváme $\lim a_n = A$.

Případ $A = \infty$. Potom je podle Věty 2.15 posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená, takže je možné definovat posloupnost $\{c_n\}$ jako výše. Je zřejmé, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $c_n \leq a_n$. Z definice limes inferior navíc víme, že $\liminf a_n = \lim c_n$, a tedy podle předpokladu platí $\lim c_n = \infty$. Podle Věty 2.16 tedy platí $\lim a_n = \infty$.

Případ $A = -\infty$. Tvrzení lze dokázat obdobně jako v případě $A = \infty$, přičemž místo Věty 2.16 je třeba použít Větu 2.17. $\square$

Poznámky. Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel.

(a) Platí

$$\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf(a_n + b_n),$$

pokud je výraz na levé straně definován, a

$$\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n,$$

pokud je výraz na pravé straně definován. Pro posloupnosti $a_n = \{0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \dots\}$ a $b_n = \{2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, \dots\}$ platí

$$\begin{aligned} \liminf a_n + \liminf b_n &< \liminf(a_n + b_n) < \liminf a_n + \limsup b_n \\ &< \limsup(a_n + b_n) < \limsup a_n + \limsup b_n. \end{aligned}$$

(b) Předpokládejme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \leq b_n$. Pak

$$\limsup a_n \leq \limsup b_n \text{ a } \liminf a_n \leq \liminf b_n.$$

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Řekneme, že $A \in \mathbb{R}^*$ je **hromadná hodnota** posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z posloupnosti $\{a_n\}$ taková, že platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ značíme $H\big(\{a_n\}\big)$.

Poznámky. (a) Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, $A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim a_n = A$. Potom je limita každé podposloupnosti rovna A, a proto $H(\{a_n\}) = \{A\}$.

(b) Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je její podposloupnost. Potom platí $H(\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}) \subset H(\{a_n\})$.

(c) Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $m \in \mathbb{N}$. Potom

$$H(\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty}) = H(\{a_n\}).$$

(d) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ je posloupnost taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a \leq a_n \leq b$, a $A \in H(\{a_n\})$. Potom $A \in [a, b]$.

(e) Platí $H(\{(-1)^n\}) = \{-1, 1\}$.

(f) Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Potom pro posloupnost definovanou předpisem $\{a_n\} = \{n\alpha - [n\alpha]\}$, $n \in \mathbb{N}$, platí $H(\{a_n\}) = [0, 1]$. (Připomeňme, že $[x]$ značí celou část čísla $x \in \mathbb{R}$.)

(g) Platí $H(\{\sin n\}) = [-1, 1]$.

Věta 2.25 (limes superior, limes inferior a hromadné hodnoty)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $\limsup a_n, \liminf a_n \in H(\{a_n\})$ a pro každé $y \in H(\{a_n\})$ platí $\liminf a_n \leq y \leq \limsup a_n$.*

Důkaz. Označme $\limsup a_n = A$. Rozlišíme několik případů.

Případ $A \in \mathbb{R}$. Pak $\{a_n\}$ je shora omezená. Položme $b_n = \sup\{a_k; k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$. Pak je posloupnost $\{b_n\}$ nerostoucí a $\lim b_n = A$. Nalezneme $m_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $b_{m_1} - A < 1$. Díky definici b_{m_1} nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq m_1$, splňující $b_{m_1} - a_{n_1} < 1$. Pak platí

$$|A - a_{n_1}| \leq |A - b_{m_1}| + |b_{m_1} - a_{n_1}| < 1 + 1 = 2.$$

Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ již máme určeno n_k. Díky tomu, že $\lim b_n = A$ a $\{b_n\}$ je nerostoucí, nalezneme $m_{k+1} \in \mathbb{N}$, $m_{k+1} > n_k$, takové, že $b_{m_{k+1}} - A < \frac{1}{k+1}$. Díky definici $b_{m_{k+1}}$ nalezneme $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} \geq m_{k+1}$, takové, že $b_{m_{k+1}} - a_{n_{k+1}} < \frac{1}{k+1}$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $n_k < m_{k+1} \leq n_{k+1}$, takže posloupnost $\{n_k\}$ je rostoucí, a navíc pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_{n_k} - A| \leq |a_{n_k} - b_{m_k}| + |b_{m_k} - A| = b_{m_k} - a_{n_k} + b_{m_k} - A < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k}.$$

Odtud vyplývá, že $\lim a_{n_k} = A$, a tedy $A \in H(\{a_n\})$.

Případ $A = \infty$. Potom není $\{a_n\}$ shora omezená. Existuje tedy $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_1} > 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ jsme již určili přirozené číslo n_k. Množina $\{a_j; j \in \mathbb{N}, j > n_k\}$ není shora omezená. Můžeme tedy nalézt $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} > n_k$, takové, že $a_{n_{k+1}} > k + 1$. Podle Věty 2.16 platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$, takže $\infty \in H(\{a_n\})$.

Případ $A = -\infty$. Potom $\liminf a_n \leq \limsup a_n = -\infty$, tedy $\liminf a_n = -\infty$. To podle Věty 2.24 znamená, že $\lim a_n = -\infty$. Tedy $A \in H(\{a_n\})$.

Dokázali jsme, že $\limsup a_n \in H(\{a_n\})$. Obdobně lze dokázat, že $\liminf a_n \in H(\{a_n\})$.

Důkaz nerovnosti. Předpokládejme, že $y \in H(\{a_n\})$. Je-li $\limsup a_n = \infty$, pak zřejmě platí $y \leq \limsup a_n$. Je-li $\limsup a_n < \infty$, pak je posloupnost $\{a_n\}$ shora omezená a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$, kde $b_n = \sup\{a_k; k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$. Nechť $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = y$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{n_k} \leq b_{n_k}$, a tedy $y \leq \limsup a_n$. Obdobně lze dokázat, že $y \geq \liminf a_n$. Tím je důkaz věty proveden. □

Důsledek. *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Potom je $H(\{a_n\})$ neprázdná.*

Důkaz. Podle Věty 2.25 obsahuje množina $H(\{a_n\})$ prvek $\limsup a_n$, a je tedy neprázdná. □

Definice. Řekneme, že posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ splňuje **Bolzanovu–Cauchyovu podmínku**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0\colon |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Poznámka. Posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku právě tehdy, když

$$\exists K \in \mathbb{R}, K > 0\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0\colon |a_n - a_m| < K\varepsilon.$$

Věta 2.26 (Bolzanova–Cauchyova podmínka pro posloupnosti)**.** *Posloupnost* $\{a_n\}$ *má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje Bolzanovu—Cauchyovu podmínku.*

konec 14. přednášky (20.11.2024)

Důkaz. $\Rightarrow$ Označme $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$, platí

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Posloupnost $\{a_n\}$ tedy splňuje Bolzanovu—Cauchyovu podmínku.

$\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Potom pro $m = n_0$ dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, nerovnosti $a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon$. Množina $\{a_j; j \in \mathbb{N}, j \geq n_0\}$ je tedy omezená. Množina $\{a_j; j \in \mathbb{N}, j < n_0\}$ je konečná, a proto je také omezená. Odtud plyne, že $\{a_n\}$ je omezená, takže můžeme definovat posloupnosti $b_n = \sup\{a_k; k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$ a $c_n = \inf\{a_k; k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$. Z definice těchto posloupností vyplývají pro každé $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, odhady

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq c_m \leq b_m \leq a_{n_0} + \varepsilon,$$

a tedy také

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon.$$

Odtud dostáváme $\liminf a_n \in \mathbb{R}$, $\limsup a_n \in \mathbb{R}$ a

$$0 \leq \limsup a_n - \liminf a_n < 2\varepsilon,$$

a tedy, protože ε bylo zvoleno libovolně, $\liminf a_n = \limsup a_n \in \mathbb{R}$. Označíme-li $A = \liminf a_n$, pak podle Věty 2.24 platí $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$, což jsme měli dokázat. □

Příklad. Označme $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}$ diverguje.

Řešení. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}$ a zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$. Potom

$$|a_{2n_0} - a_{n_0}| = \left| \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{k} \right| \geq \frac{1}{2n_0} n_0 = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Posloupnost $\{a_n\}$ tedy nesplňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku, takže podle Věty 2.26 diverguje.

3. Limita a spojitost funkce

3.1. **Limita a spojitost funkce v bodě.**

Definice. Reálnou funkcí jedné reálné proměnné f (dále jen **funkcí**) rozumíme zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tj. $f\colon M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$.

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Potom **prstencovým okolím** bodu c rozumíme každou množinu tvaru $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, a kterou značíme $P(c, \varepsilon)$.

Prstencovým okolím bodu ∞ rozumíme každou množinu tvaru $(\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, a kterou značíme $P(\infty, \varepsilon)$.

Prstencovým okolím bodu $-\infty$ rozumíme každou množinu tvaru $B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, a kterou značíme $P(-\infty, \varepsilon)$.

Definice. Řekneme, že prvek $A \in \mathbb{R}^*$ je **limitou** funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in P(c, \delta):\ f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Poznámky. (a) Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Potom platí $B(c,\varepsilon_1) \subset B(c,\varepsilon_2)$. Podobně je tomu, nahradíme-li okolí prstencovým okolím. Všimněme si, že v případě bodu ∞ je okolí a prstencové okolí táž množina. Stejně je tomu s okolím a prstencovým okolím bodu $-\infty$.

(b) Pokud $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^*$, $c_1 \neq c_2$, potom existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(c_1,\varepsilon) \cap B(c_2,\varepsilon) = \emptyset$.

(c) Pokud $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^*$, $c_1 < c_2$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, splňují $B(c_1,\varepsilon) \cap B(c_2,\varepsilon) = \emptyset$, potom pro každé $x \in B(c_1,\varepsilon)$, $y \in B(c_2,\varepsilon)$ platí $x < y$.

Věta 3.1 (jednoznačnost limity)**.** *Funkce má v bodě nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^*$, $A_1 \neq A_2$, jsou limity funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$. Nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(A_1,\varepsilon) \cap B(A_2,\varepsilon) = \emptyset$. Podle definice limity k tomuto ε nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c,\delta_1)\colon f(x) \in B(A_1,\varepsilon),$$

a $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c,\delta_2)\colon f(x) \in B(A_2,\varepsilon).$$

Položme $\delta_3 = \min\{\delta_1,\delta_2\}$. Zvolme $x \in P(c,\delta_3)$. Potom

$$f(x) \in B(A_1,\varepsilon_1) \cap B(A_2,\varepsilon_2) = \emptyset,$$

což je spor. □

Značení. Má-li funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$, pak píšeme $\lim_{x\to c} f(x) = A$.

Poznámky. (a) Jestliže $\lim_{x\to c} f(x)$ existuje, pak je f definována na jistém prstencovém okolí bodu c. V bodě c funkce f nemusí být vůbec definována.

(b) Nechť $\lim_{x\to c} f(x) = A$, kde $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$. Pak můžeme rozlišit tyto případy:

$$\text{počítáme limitu} \begin{cases} \textbf{ve vlastním bodě}\text{, tj. } c \in \mathbb{R} \text{ a } \begin{cases} A \in \mathbb{R} \text{ (limita je } \textbf{vlastní}\text{)}, \\ A = \infty \text{ (limita je rovna } \textbf{plus nekonečnu}\text{)}, \\ A = -\infty \text{ (limita je rovna } \textbf{mínus nekonečnu}\text{)}, \end{cases} \\ \textbf{v nevlastním bodě}\text{, tj. } c = \pm\infty \text{ a } \begin{cases} A \in \mathbb{R} \text{ (limita je } \textbf{vlastní}\text{)}, \\ A = \infty \text{ (limita je rovna } \textbf{plus nekonečnu}\text{)}, \\ A = -\infty \text{ (limita je rovna } \textbf{mínus nekonečnu}\text{)}. \end{cases} \end{cases}$$

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$.

- **Pravým okolím** bodu c rozumíme každý interval $[c, c+\varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B_+(c,\varepsilon)$,
- **levým okolím** bodu c rozumíme každý interval $(c-\varepsilon, c]$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B_-(c,\varepsilon)$,
- **pravým prstencovým okolím** bodu c rozumíme každý interval $(c, c+\varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P_+(c,\varepsilon)$,
- **levým prstencovým okolím** bodu c rozumíme každý interval $(c-\varepsilon, c)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P_-(c,\varepsilon)$.

Pokračujme s definicí pro nevlastní hodnoty.

- **Pravým okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každý interval $(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B_+(-\infty,\varepsilon)$,
- **levým okolím** bodu ∞ rozumíme každý interval $(\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B_-(\infty,\varepsilon)$,
- **pravým prstencovým okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každý interval $(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P_+(-\infty,\varepsilon)$,
- **levým prstencovým okolím** bodu ∞ rozumíme každý interval $(\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P_-(\infty,\varepsilon)$.

Definice. Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in P_+(c,\delta)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limity zleva** v bodě $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

konec 15. přednášky (22.11.2024)

Poznámka. Obdobně jako ve Větě 3.1 lze dokázat, že funkce f má v daném bodě c nejvýše jednu limitu zprava a nejvýše jednu limitu zleva. Pro limitu zleva funkce f v bodě c užíváme symbol $\lim_{x\to c_-} f(x)$ a pro limitu zprava symbol $\lim_{x\to c_+} f(x)$.

Věta 3.2 (limita a jednostranné limity)**.** *Nechť f je funkce a $c \in \mathbb{R}$. Limita funkce f v bodě c existuje právě tehdy, když má f v bodě c limitu zprava i zleva a hodnoty těchto jednostranných limit se rovnají.*

Navíc pokud $\lim_{x\to c} f(x)$ existuje, pak

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c_-} f(x) = \lim_{x\to c_+} f(x).$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že $\lim_{x\to c} f(x) = A$, kde $A \in \mathbb{R}^*$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta)\colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Potom ale máme také

$$\forall x \in P_+(c, \delta)\colon f(x) \in B(A, \varepsilon),$$

neboť $P_+(c, \delta) \subset P(c, \delta)$. Tím jsme dokázali, že platí $\lim_{x\to c_+} f(x) = A$. Rovnost $\lim_{x\to c_-} f(x) = A$ lze dokázat obdobně.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že $\lim_{x\to c_+} f(x) = \lim_{x\to c_-} f(x) = A$, kde $A \in \mathbb{R}^*$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity zprava nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_+(c, \delta_1)\colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Dále podle definice limity zleva nalezneme $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_-(c, \delta_2)\colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom $P(c, \delta) \subset P_-(c, \delta_1) \cup P_+(c, \delta_2)$, takže pro každé $x \in P(c, \delta)$ máme $f(x) \in B(A, \varepsilon)$. Dokázali jsme tak, že platí $\lim_{x\to c} f(x) = A$. Odtud plyne tvrzení. $\square$

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá**, jestliže $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá zprava** (respektive **zleva**), jestliže $\lim_{x\to c_+} f(x) = f(c)$ (respektive $\lim_{x\to c_-} f(x) = f(c)$).

Definice. (a) Definujme funkci $\operatorname{sign}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } x > 0,\\ 0, & \text{jestliže } x = 0,\\ -1, & \text{jestliže } x < 0. \end{cases}$$

(b) Funkci D, definovanou předpisem

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } x \in \mathbb{Q},\\ 0 & \text{jestliže } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nazýváme **Dirichletovou funkcí**.

(c) Funkci R, definovanou předpisem

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{jestliže } x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ nesoudělná},\\ 0 & \text{jestliže } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\\ 1 & \text{jestliže } x = 0, \end{cases}$$

nazýváme **Riemannovou funkcí**.

Poznámky. (a) Platí $\lim_{x\to 0_+} \operatorname{sign}(x) = 1$, $\lim_{x\to 0_-} \operatorname{sign}(x) = -1$ a $\lim_{x\to 0} \operatorname{sign}(x)$ neexistuje. Funkce sign je spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Dirichletova funkce nemá limitu v žádném bodě (ani jednostrannou), a tedy není v žádném bodě spojitá.

(c) Riemannova funkce splňuje $\lim_{x\to c} R(x) = 0$ pro každé $c \in \mathbb{R}$, a tedy je spojitá v každém bodě $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
(d) Položme $f(x) = x \cdot D(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$. Potom existuje právě jedno $c \in \mathbb{R}$ takové, že f je spojitá v c, a to $c = 0$.

3.2. **Věty o limitách.**

Věta 3.3 (limita složené funkce)**.** *Nechť $c, D, A \in \mathbb{R}^*$, f, g jsou funkce, $\lim_{x\to c} g(x) = D$ a $\lim_{y\to D} f(y) = A$. Předpokládejme, že je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P) *existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \eta)$ platí $g(x) \neq D$,*
(S) *f je spojitá v D.*

Potom

$$\lim_{x\to c} (f \circ g)(x) = A.$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\psi \in \mathbb{R}$, $\psi > 0$, takové, že

$$\forall y \in P(D, \psi) \colon f(y) \in B(A, \varepsilon). \tag{7}$$

Nalezneme $\delta' \in \mathbb{R}$, $\delta' > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta') \colon g(x) \in B(D, \psi). \tag{8}$$

Předpokládejme, že platí (P). Položme $\delta = \min\{\delta', \eta\}$. Potom pro každé $x \in P(c, \delta)$ platí $g(x) \in B(D, \psi) \setminus \{D\}$, neboli

$$\forall x \in P(c, \delta) \colon g(x) \in P(D, \psi).$$

Odtud a z (7) dostaneme

$$\forall x \in P(c, \delta) \colon f(g(x)) \in B(A, \varepsilon),$$

tedy $\lim_{x\to c}(f \circ g)(x) = A$.

Předpokládejme, že platí (S). Potom $f(D) = A$, a tedy

$$\forall y \in B(D, \psi) \colon f(y) \in B(A, \varepsilon).$$

Odtud a z (8) dostaneme

$$\forall x \in P(c, \delta') \colon f(g(x)) \in B(A, \varepsilon),$$

tedy $\lim_{x\to c}(f \circ g)(x) = A$. □

Poznámky. (a) Není-li splněna podmínka (P) ani (S), pak závěr věty nemusí platit. Položme $f(x) = |\operatorname{sign}(x)|$ a $g(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$, a dále $c = 0$, $D = 0$ a $A = 1$. Potom $\lim_{x\to c} g(x) = 0 = D$ a $\lim_{y\to D} f(y) = 1 = A$, avšak $\lim_{x\to c}(f \circ g)(x) = 0 \neq A$.
(b) Je-li bod D nevlastní, pak je podmínka (P) automaticky splněna.

Důsledek (spojitost složené funkce)**.** *Jestliže funkce g je spojitá v bodě $c \in \mathbb{R}$ a funkce f je spojitá v bodě $g(c)$, pak je funkce $f \circ g$ spojitá v bodě c.*

Věta 3.4 (Heine)**.** *Nechť $c, A \in \mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na prstencovém okolí bodu c. Potom $\lim_{x\to c} f(x) = A$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}(f)$,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c \quad a \quad \forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq c \tag{9}$$

platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Důkaz. ⇒ Zvolme posloupnost $\{x_n\}$ splňující splňující $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}(f)$ a (9). Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Nalezeneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Dále nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon x_n \in B(c, \delta).$$

Protože $x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, plyne odtud

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon x_n \in P(c, \delta).$$

Tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon f(x_n) \in B(A, \varepsilon),$$

jinými slovy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

$\Leftarrow$ Provedeme nepřímý důkaz. Předpokládejme, že neplatí $\lim_{x\to c} f(x) = A$. Tedy

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \ \exists x \in P(c, \delta) \colon \neg\big(f(x) \in B(A, \varepsilon)\big).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tak existuje $x_n \in P(c, \frac{1}{n})$ takové, že $\neg\big(f(x_n) \in B(A, \varepsilon)\big)$. Potom $\lim x_n = c$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x_n \neq c$. Navíc $\neg\big(f(x_n) \in B(A, \varepsilon)\big)$, takže neplatí $\lim f(x_n) = A$. Nalezli jsme tedy posloupnost $\{x_n\}$ splňující $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}(f)$ a (9), pro kterou neplatí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Odtud plyne tvrzení. $\square$

konec 16. přednášky (27.11.2024)

Důsledek (Heineova věta pro spojitost). *Nechť $c \in \mathbb{R}$ a funkce f je definována na nějakém okolí bodu c. Potom je f spojitá v c právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}(f)$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$.*

Věta 3.5 (aritmetika limit funkcí). *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a $B \in \mathbb{R}^*$. Nechť f a g jsou funkce a platí $\lim_{x\to c} f(x) = A$ a $\lim_{x\to c} g(x) = B$. Potom*

(a) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz na pravé straně definován,*
(b) $\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = AB$, *pokud je výraz na pravé straně definován,*
(c) $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, *pokud je výraz na pravé straně definován.*

Důsledek (spojitost a aritmetické operace). *Nechť $c \in \mathbb{R}$ a nechť jsou funkce f a g spojité v bodě c. Potom jsou funkce $f + g$ a fg spojité v bodě c. Je-li navíc $g(c) \neq 0$, pak také funkce $\frac{f}{g}$ je spojitá v bodě c.*

Věta 3.6 (o srovnání). *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a f, g, h jsou funkce.*

(a) *Jestliže*

$$\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x),$$

potom existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) > g(x).$$

(b) *Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že platí*

$$\forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \leq g(x),$$

a existují $\lim_{x\to c} f(x)$ a $\lim_{x\to c} g(x)$, potom platí

$$\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x).$$

(c) *(o dvou strážnících) Jestliže existuje $\eta > 0$ takové, že platí*

$$\forall x \in P(c, \eta) \colon f(x) \leq h(x) \leq g(x),$$

a navíc

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = A \in \mathbb{R}^*,$$

potom existuje $\lim_{x\to c} h(x)$ a rovná se A.

Definice. Nechť f je funkce a $M \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že f je

- **shora omezená na** M, jestliže $\exists K \in \mathbb{R} \ \forall x \in M \colon f(x) \leq K$,
- **zdola omezená na** M, jestliže $\exists K \in \mathbb{R} \ \forall x \in M \colon f(x) \geq K$,
- **omezená na** M, jestliže $\exists K \in \mathbb{R} \ \forall x \in M \colon |f(x)| \leq K$.

Věta 3.7 (vlastní limita funkce a omezenost). *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, f je funkce a existuje vlastní $\lim_{x\to c} f(x)$. Potom existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že f je na $P(c, \delta)$ omezená.*

Důkaz. Označme $A = \lim_{x\to c} f(x)$. Podle předpokladu je $A \in \mathbb{R}$. Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon f(x) \in B(A,1).$$

Potom

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon |f(x)| \le |A| + 1,$$

a tedy je f na $P(c,\delta)$ omezená. □

Věta 3.8 (nevlastní limita podílu pro funkce)**.** *Nechť $A, c \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$, f, g jsou funkce, $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ a $\lim_{x\to c} f(x) = A$. Jestliže existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $\forall x \in P(c,\delta)\colon g(x) > 0$, potom $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.*

Definice. Nechť f je funkce a $M \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že f je

- **neklesající na** M, jestliže pro každá $x, y \in M$, $x < y$, platí $f(x) \le f(y)$,
- **rostoucí na** M jestliže pro každá $x, y \in M$, $x < y$, platí $f(x) < f(y)$,
- **nerostoucí na** M jestliže pro každá $x, y \in M$, $x < y$, platí $f(x) \ge f(y)$,
- **klesající na** M, jestliže pro každá $x, y \in M$, $x < y$, platí $f(x) > f(y)$,
- **monotónní na** M, jestliže je neklesající na M nebo nerostoucí na M,
- **ryze monotónní na** M, jestliže je rostoucí na M, nebo klesající na M.

Věta 3.9 (limita monotónní funkce)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť funkce f je monotónní na (a,b). Potom existují $\lim_{x\to a_+} f(x)$ a $\lim_{x\to b_-} f(x)$, přičemž platí:*

- *je-li f na (a,b) neklesající, pak*
$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \inf\{f(x); x \in (a,b)\}, \quad \lim_{x\to b_-} f(x) = \sup\{f(x); x \in (a,b)\},$$
- *je-li f na (a,b) nerostoucí, pak*
$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \sup\{f(x); x \in (a,b)\}, \quad \lim_{x\to b_-} f(x) = \inf\{f(x); x \in (a,b)\}.$$

Důkaz. Dokážeme, že $\lim_{x\to a_+} f(x) = \inf f((a,b))$ platí pro neklesající zdola omezenou funkci f a pro a $a \in \mathbb{R}$. V ostatních případech lze tvrzení dokázat obdobně. Označme $m = \inf f((a,b))$. Potom $m \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Díky vlastnostem infima nalezneme $y \in f((a,b))$ takové, že $y < m + \varepsilon$. Nalezneme $x' \in (a,b)$ splňující $y = f(x')$. Protože f je neklesající, platí

$$\forall x \in (a,x')\colon f(x) \le f(x') < m + \varepsilon.$$

Protože m je dolní závora množiny $f((a,b))$, platí

$$\forall x \in (a,b)\colon m \le f(x),$$

a tedy

$$\forall x \in (a,x')\colon m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon.$$

Položme $\delta = x' - a$. Potom

$$\forall x \in P_+(a,\delta)\colon f(x) \in B(m,\varepsilon),$$

tedy $\lim_{x\to a_+} f(x) = m$. □

3.3. Elementární funkce.

Věta 3.10 (zavedení exponenciální funkce)**.** *Existuje právě jedna funkce $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující podmínky*

(E1) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon \exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y$,
(E2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$.

Poznámka. Platí

- $\exp(0) = 1$,
- $\forall x \in \mathbb{R}:\ \exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$,
- $\exp$ je spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}:\ \exp x > 0$,
- $\exp$ je rostoucí na $\mathbb{R}$,

- $\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$,
- $\mathcal{H}(\exp) = (0, \infty)$,
- $\exp(1) = e$.

konec 17. přednášky (29.11.2024)

Definice.

(a) Funkce $\log\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ je definována jako inversní funkce k funkci exp. Nazývá se **přirozeným logaritmem**.

(b) Je-li $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, pak definujeme

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}, \quad x \in (0, \infty).$$

Funkci $\log_a$ nazýváme **logaritmem o základu** a.

(c) Nechť $a \in \mathbb{R}, a > 0$, a $b \in \mathbb{R}$. Potom definujeme reálné číslo a^b předpisem $a^b = \exp(b \log(a))$.

(d) Nechť $a > 0$. Potom funkci $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, nazýváme **obecnou mocninou**.

(e) Je-li $n \in \mathbb{N}$ liché, n**-tou odmocninu** $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x \in \mathbb{R}$, definujeme jako inversní funkci k funkci $x \mapsto x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Je-li $n \in \mathbb{N}$ sudé, n**-tou odmocninu** $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x \in [0, \infty)$, definujeme jako inversní funkci k funkci $x \mapsto x^n$, $x \in [0, \infty)$.

Poznámka. Platí

$$\forall x, y \in \mathbb{R}:\ (\exp(y))^x = \exp(x \log(\exp(y)) = \exp(xy),$$

speciálně (pro $y = 1$)

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ e^x = (\exp(1))^x = \exp(x).$$

Místo $\exp x$ můžeme tedy psát e^x.

Poznámka (vlastnosti logaritmu)**.** Platí

- $\mathcal{D}(\log) = (0, \infty)$,
- $\mathcal{H}(\log) = \mathbb{R}$,
- log je rostoucí na $(0, \infty)$,
- log je spojitá v každém bodě intervalu $(0, \infty)$,
- $\forall x, y \in (0, \infty):\ \log(xy) = \log(x) + \log(y)$,
- $\forall a \in (0, \infty), b \in \mathbb{R}:\ \log a^b = b \log a$,
- $\lim_{x\to 0_+} \log x = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$,
- $\log(e) = 1$.

Definice. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická** s periodou $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $x + a \in \mathcal{D}(f)$, $x - a \in \mathcal{D}(f)$ a $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$.

Věta 3.11 (zavedení sinu, kosinu a čísla π)**.** *Existuje právě jedna funkce* $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, právě jedna funkce* $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a právě jedno kladné reálné číslo* π *splňující následující vlastnosti:*

(S1) $\forall x, y \in \mathbb{R}:\ \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$,

(S2) $\forall x, y \in \mathbb{R}:\ \forall x, y \in \mathbb{R}:\ \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,

(S3) sin *je lichá funkce a* cos *je sudá funkce,*

(S4) $\sin(0) = 0$, sin *je rostoucí na* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *a* $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$,

(S5) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Poznámka. Platí

- $\cos(0) = 1$,
- $\forall x \in \mathbb{R}:\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$,

- $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$,
- $\forall x \in \mathbb{R}: \ \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x, \ \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$,
- $\forall x \in \mathbb{R}: \ \sin(x + \pi) = -\sin x, \ \cos(x + \pi) = -\cos x$,
- sin a cos jsou spojité v každém bodě $x \in \mathbb{R}$,
- $\sin x = 0$ právě když $x = k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$ a $\cos x = 0$ právě když $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$,
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Definice. Funkce **tangens** a **kotangens** definujeme předpisy

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x}, && x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \tfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}, \\ \operatorname{cotg} x &= \frac{\cos x}{\sin x}, && x \in \mathbb{R} \setminus \{ k\pi; k \in \mathbb{Z} \}. \end{aligned}$$

Funkce sin, cos, tg a cotg nazýváme **goniometrickými funkcemi**.

Poznámka. Funkce tg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru, je lichá, π-periodická a rostoucí na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Platí $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}_-} \operatorname{tg} x = \infty$ a $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}_+} \operatorname{tg} x = -\infty$.

Funkce cotg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru, je lichá, π-periodická a klesající na $(0, \pi)$. Platí $\lim_{x \to 0_+} \operatorname{cotg} x = \infty$ a $\lim_{x \to \pi_-} \operatorname{cotg} x = -\infty$.

Definice. **Cyklometrické funkce arkussinus**, **arkuskosinus**, **arkustangens** a **arkuskotangens** definujeme předpisy

$$\begin{aligned} \arcsin &= \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \right)^{-1}; \\ \arccos &= \left(\cos|_{[0,\pi]} \right)^{-1}; \\ \operatorname{arctg} &= \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \right)^{-1}; \\ \operatorname{arccotg} &= \left(\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Poznámky. (a) Platí $\mathcal{D}(\arcsin) = [-1, 1]$, $\mathcal{H}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Funkce arcsin je lichá, rostoucí na $[-1, 1]$ a spojitá v každém bodě intervalu $[-1, 1]$ (v krajních bodech jednostranně).

(b) Platí $\mathcal{D}(\arccos) = [-1, 1]$, $\mathcal{H}(\arccos) = [0, \pi]$. Funkce arccos je klesající na $[-1, 1]$ a spojitá v každém bodě intervalu $[-1, 1]$ (v krajních bodech jednostranně).

(c) Platí $\mathcal{D}(\operatorname{arctg}) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(\operatorname{arctg}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Funkce arctg je lichá, rostoucí na $\mathbb{R}$ a spojitá v každém bodě intervalu $\mathbb{R}$.

(d) Platí $\mathcal{D}(\operatorname{arccotg}) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi)$. Funkce arccotg je klesající na $\mathbb{R}$ a spojitá v každém bodě intervalu $\mathbb{R}$.

Definice. Funkce **hyperbolický sinus**, **hyperbolický kosinus**, **hyperbolický tangens** a **hyperbolický kotangens** definujeme předpisy

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}; \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}; \\ \operatorname{tgh} x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad x \in \mathbb{R}; \\ \operatorname{cotgh} x &= \frac{\cosh x}{\sinh x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

3.4. **Funkce spojité na intervalu.**

Definice. Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli interval, který obsahuje nekonečně mnoho bodů). Řekneme, že funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud je tento prvkem J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud je tento prvkem J,
- f je spojitá v každém vnitřním bodě J.

konec 18. přednášky (4.12.2024)

Věta 3.12 (Bolzano)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a platí $f(a) < f(b)$. Potom pro každé $y \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $f(\xi) = y$.*

Důkaz. Zvolme $y \in (f(a), f(b))$ a položme $M = \{z \in [a, b]; f(z) < y\}$. Označme $\xi = \sup M$. Protože $a \in M$ a b je horní závora M, platí $\xi \in [a, b]$.

Ukážeme, že $f(\xi) = y$. Předpokládejme, že $f(\xi) > y$. Pak $\xi > a$. Díky spojitosti f nalezneme $\delta > 0$ takové, že $\xi - \delta > a$ a pro každé $x \in (\xi - \delta, \xi)$ platí $f(x) > y$. Potom $M \subset [a, \xi - \delta]$, což je spor s definicí ξ. Předpokládejme, že $f(\xi) < y$. Pak $\xi < b$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $\xi + \delta < b$ pro každé $x \in (\xi, \xi + \delta)$ platí $f(x) < y$. Potom $[\xi, \xi + \delta) \subset M$, což opět spor s definicí ξ. Odtud plyne, že $f(\xi) = y$ a že $\xi \in (a, b)$. $\square$

Poznámka. Obdobné tvrzení platí i v případě, kdy $f(a) > f(b)$.

Poznámka. Z Bolzanovy věty neplyne nic o tom, kolik existuje bodů $\xi \in (a, b)$ splňujících $f(\xi) = y$. Věta pouze tvrdí, že takový bod existuje alespoň jeden.

Příklad. Dokažte, že existuje $x \in \mathbb{R}$ splňující $e^x + x - 2 = 0$.

Řešení. Označme $f(x) = e^x + x - 2$ pro $x \in \mathbb{R}$. Potom f je spojitá funkce na $\mathbb{R}$ a platí $f(0) = -1 < 0$ a $f(2) = e^2 > 0$. Podle Věty 3.12 tedy existuje $x \in (0, 2)$ takové, že $f(x) = 0$.

Věta 3.13 (zobrazení intervalu)**.** *Nechť J je interval a funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu J. Potom je množina $f(J)$ interval.*

Důkaz. Předpokládejme, že $y_1, y_2 \in f(J)$ splňují $y_1 < y_2$. Zvolme $z \in \mathbb{R}$ takové, že $y_1 < z < y_2$. Nalezneme $x_1, x_2 \in J$ taková, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Zřejmě platí $x_1 \neq x_2$. Díky Větě 3.12 nalezneme ξ v intervalu s krajními body x_1, x_2 takové, že $f(\xi) = z$. Odtud plyne, že $z \in f(J)$. Množina $f(J)$ je tedy interval podle poznámky před Větou 1.6. $\square$

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M, tj. $M \subset \mathcal{D}(f)$.

(a) Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (**minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon f(y) \leq f(x) \qquad \big(\forall y \in M\colon f(y) \geq f(x)\big).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (**minima**) funkce f na množině M. Tyto body po řadě značíme symboly $\max_M f$ a $\min_M f$.

(b) Řekneme, že f nabývá v bodě x **lokálního maxima** (**lokálního minima**) **vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in B(x, \delta) \cap M\colon f(y) \leq f(x) \qquad \big(\forall y \in B(x, \delta) \cap M\colon f(y) \geq f(x)\big).$$

Bod x pak nazýváme **bodem lokálního maxima** (**lokálního minima**) funkce f na množině M.

(c) Řekneme, že f nabývá v bodě x **ostrého lokálního maxima** (**ostrého lokálního minima**) **vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in P(x, \delta) \cap M\colon f(y) < f(x) \qquad \big(\forall y \in P(x, \delta) \cap M\colon f(y) > f(x)\big).$$

Bod x pak nazýváme **bodem ostrého lokálního maxima** (**ostrého lokálního minima**) funkce f na množině M.

(d) Bodem **extrému** budeme rozumět bod maxima či minima. Bodem **lokálního extrému** budeme rozumět bod lokálního maxima či lokálního minima.

Poznámka. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $G = \sup M$. Potom existuje posloupnost $\{y_n\}$ prvků M splňující $\lim y_n = G$.

Věta 3.14 (nabývání extrémů)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je funkce spojitá na $[a, b]$. Potom f nabývá na $[a, b]$ svého maxima i minima.*

Důkaz. Označme $G = \sup f([a,b])$. Nalezneme posloupnost $\{y_n\} \subset f([a,b])$ splňující $\lim y_n = G$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n \in [a,b]$ splňující $f(x_n) = y_n$. Potom je posloupnost $\{x_n\}$ omezená, neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a \le x_n \le b$. Podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty nalezneme konvergentní podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$. Označme

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}.$$

Protože $a \le x_{n_k} \le b$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, platí podle věty o limitě a uspořádání $x^* \in [a,b]$. Podle Heineovy věty pro spojitost platí $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x^*)$. Protože $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, je posloupnost $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Podle věty o limitě vybrané posloupnosti tedy platí

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} y_{n_k} = G.$$

Díky jednoznačnosti limity tedy platí $f(x^*) = G$. Odtud plyne, že $G \in \mathbb{R}$ a x^* je bodem maxima funkce f na $[a,b]$. Existenci bodu minima lze dokázat obdobně. □

Věta 3.15 (spojitost a omezenost)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je funkce spojitá na $[a,b]$. Potom je f na $[a,b]$ omezená.*

Důkaz. Podle předchozí věty nabývá funkce f na intervalu $[a,b]$ svého maxima i minima. Označme $m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$, $M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$ a $K = \max\{|m|, |M|\}$. Potom platí

$$\forall x \in [a,b] : |f(x)| \le K,$$

a tedy f je omezená na $[a,b]$. □

Věta 3.16 (spojitost inversní funkce)**.** *Nechť f je spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že f je spojitá a rostoucí, jinak bychom uvažovali $-f$. Podle Věty 3.13 je funkce f^{-1} definována na intervalu $f(J)$. Navíc je zřejmě rostoucí. Zvolme bod $y_0 \in f(J)$, který není pravým krajním bodem intervalu $f(J)$ a označme $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Potom x_0 není pravým krajním bodem J, neboť f je rostoucí na J. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, a $x_1 \in J \cap (x_0, x_0 + \varepsilon)$. Položme $\delta = f(x_1) - y_0$. Odtud potom $[y_0, y_0 + \delta] \subset f(J)$, a tedy

$$f^{-1}\big(B_+(y_0, \delta)\big) = f^{-1}\big([y_0, y_0 + \delta)\big) = [x_0, x_1) \subset B(x_0, \varepsilon) = B(f^{-1}(y_0), \varepsilon).$$

Obdobně lze dokázat spojitost zleva funkce f^{-1} v každém bodě intervalu $f(J)$, který není jeho levým krajním bodem. Odtud plyne spojitost f^{-1} na $f(J)$. □

4. Derivace

4.1. **Základní vlastnosti.**

Definice. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Jestliže existuje limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pak tuto limitu nazýváme **derivací funkce f v bodě** a a značíme ji $f'(a)$. Obdobně definujeme **derivaci zprava** a **derivaci zleva funkce f v bodě** a předpisy

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{a} \quad f'_-(a) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

konec 19. přednášky (6.12.2024)

Poznámky. (a) Mohou nastat tyto případy:

$$\text{derivace funkce } f \text{ v bodě } a \begin{cases} \text{neexistuje,} \\ \text{existuje a je} \begin{cases} \textbf{vlastní}\text{, tj. je rovna reálnému číslu,} \\ \textbf{nevlastní}\text{, tj. je rovna } \infty \text{ nebo } -\infty. \end{cases} \end{cases}$$

(b) Platí
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$
má-li alespoň jedna ze stran smysl. Obdobné rovnosti platí pro jednostranné derivace.

(c) Jestliže existuje $f'(a)$, pak existuje okolí bodu a, na němž je funkce f definovaná. Obdobná tvrzení platí pro jednostranné derivace.

(d) Derivace funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ existuje právě tehdy, když v a existuje derivace f zprava i zleva a rovnají se.

Značení. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$, a pro každé $x \in M$ existuje vlastní $f'(a)$. Potom definujeme zobrazení $f'\colon M \to \mathbb{R}$ předpisem $f'\colon x \mapsto f'(x)$. Obdobně definujeme zobrazení $f'_-\colon M \to \mathbb{R}$ a $f'_+\colon M \to \mathbb{R}$.

Příklady. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Spočtěte $f'(a)$, pokud existuje, kde

(a) $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

(d) $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$

(e) $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$

(f) $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. (a) Platí
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x\to a} 0 = 0.$$

(b) Platí
$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x - a}{x - a} \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{n-k} a^{k-1} \\ &= \lim_{x\to a} \sum_{k=1}^{n} x^{n-k} a^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} a^{k-1} = n a^{n-1}. \end{aligned}$$
Poslední rovnost plyne ze spojitosti polynomů.

(c) Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom podle definice derivace a (E1) platí
$$\begin{aligned} \exp'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x+0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x)\exp(h) - \exp(x)\exp(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - \exp(0)}{h}. \end{aligned}$$
Odtud podle (E2) plyne, že
$$\exp'(x) = \lim_{h\to 0} \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x).$$

(d) Pro $x \in \mathbb{R}$ počítejme
$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)\big) \\ &= \lim_{h\to 0} \sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h^2} h + \lim_{h\to 0} \cos(x) \frac{\sin(h)}{h} \\ &= \sin(x) \cdot \tfrac{-1}{2} \cdot 0 + \cos(x) \cdot \sin'(0) = \cos(x). \end{aligned}$$

(e) Podle definice jednostranných derivací máme
$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0_+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0_+} \frac{x}{x} = 1, \\ f'_-(0) &= \lim_{x\to 0_-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0_-} \frac{-x}{x} = -1. \end{aligned}$$

Protože se jednostranné derivace funkce f v bodě 0 nerovnají, vyplývá z výše uvedené poznámky (d), že $f'(0)$ neexistuje.

(f) Platí

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0_+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x} = \infty,$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0_-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0_-} \frac{-1}{x} = \infty.$$

Z výše uvedené poznámky (d) tedy vyplývá, že $f'(0) = \infty$.

Věta 4.1 (vztah derivace a spojitosti)**.** *Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní $f'(a)$. Potom je f v bodě a spojitá.*

Důkaz. Podle věty o aritmetice limit platí

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = f'(a)\cdot 0 = 0,$$

neboť $f'(a)$ existuje vlastní, a tedy je výraz $f'(a)\cdot 0$ definován. Tedy

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

neboli f je v bodě a spojitá. □

Věta 4.2 (derivace a aritmetické operace)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, f a g jsou funkce a existují $f'(a)$ a $g'(a)$.*

(a) *Platí*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

(b) *Jestliže je alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v bodě a, pak*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

(c) *Jestliže je funkce g spojitá v bodě a, pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Důkaz. (a) Podle definice derivace a věty o aritmetice limit platí

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+g(a+h)-f(a)-g(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right) = f'(a)+g'(a).\end{aligned}$$

(b) Předpokládejme, že funkce g je spojitá v bodě a. Potom

$$\lim_{h\to 0} g(a+h) = g(a).$$

Podle definice derivace a věty o aritmetice limit pak platí

$$\begin{aligned}&(fg)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}g(a+h) + f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right) \\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a).\end{aligned}$$

(c) Z předpokladu plyne, že $g(a) \neq 0$. Díky spojitosti g v a nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že $g(x) \neq 0$ pro každé $x \in B(a, \delta)$. Pak pro každé $x \in B(a, \delta)$ platí

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)} &= \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)} \\ &= \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)} \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{g(x)} + \frac{f(a)}{g(a)} \cdot \frac{g(a) - g(x)}{g(x)}.\end{aligned}$$

Potom díky spojitosti g v a platí podle věty o aritmetice limit

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{1}{x - a}\left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right) \\ &= \lim_{x \to a}\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\frac{1}{g(x)} + \frac{f(a)}{g(a)} \cdot \frac{g(a) - g(x)}{x - a}\frac{1}{g(x)}\right) \\ &= \frac{f'(a)}{g(a)} + \frac{f(a)}{g(a)} \cdot (-g'(a)) \cdot \frac{1}{g(a)} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.\end{aligned}$$

□

Poznámka. Předpoklady Věty 4.1 není možné vynechat. Položme například

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ -\frac{3}{4}, & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Potom $f'(0) = \infty$, $g'(0) = -\infty$, ale $(f + g)'(0)$ ani $(fg)'(0)$ neexistují, přestože výraz $f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$ je definován.

Věta 4.3 (derivace složené funkce)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, f, g jsou funkce, g je spojitá v bodě a a existují $g'(a)$ a $f'(g(a))$. Potom platí*

(10) $$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Označme $b = g(a)$. Díky existenci $f'(b)$ nalezneme $\sigma \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, takové, že $B(b, \sigma) \subset \mathcal{D}(f)$. Díky spojitosti g v a nalezneme $\varrho \in \mathbb{R}, \varrho > 0$, takové, že $g(B(a, \varrho)) \subset B(b, \sigma)$. Pak je $f \circ g$ definovaná na $B(a, \varrho)$.

Předpokládejme nejprve, že $g'(a) \neq 0$. Nalezneme $\tilde{\varrho} \in (0, \varrho)$ takové, že

$$\forall x \in P(a, \tilde{\varrho})\colon \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \neq 0.$$

Potom speciálně platí

(11) $$\forall x \in P(a, \tilde{\varrho})\colon g(x) \neq b.$$

Označme

$$\varphi(y) = \frac{f(y) - f(b)}{y - b}, \quad y \in P(b, \sigma).$$

Potom

$$\lim_{y \to b} \varphi(y) = f'(b).$$

Podle Věty 3.3 (podmínka (P) je splněna díky (11)) tedy platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(b)}{g(x) - b} = \lim_{x \to a} (\varphi \circ g)(x) = f'(b).$$

Díky (11) platí

$$\forall x \in P(a, \tilde{\varrho})\colon \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = \frac{f(g(x)) - f(b)}{g(x) - b} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a},$$

a tedy, podle věty o aritmetice limit a předpokladu,

$$\lim_{x\to a} \frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(a)}{x-a} = f'(b)g'(a).$$

Předpokládejme nyní, že $g'(a)=0$. Protože výraz na pravé straně (10) je definován, je $f'(b)$ vlastní. Chceme tedy dokázat, že $(f\circ g)'(a)=0$. Zvolme $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$. Protože $f'(b)$ je vlastní, nalezneme díky Větě 3.7 $C\in\mathbb{R}, C>0$, a $\tilde\sigma\in(0,\sigma)$ taková, že

$$\forall y\in P(b,\tilde\sigma)\colon \left|\frac{f(y)-f(b)}{y-b}\right| < C.$$

Díky spojitosti g v bodě a nalezneme $\psi\in(0,\varrho)$ takové, že

$$\forall x\in B(a,\psi)\colon g(x)\in B(b,\tilde\sigma).$$

Díky tomu, že $g'(a)=0$, nalezneme $\eta\in(0,\psi)$ takové, že

$$\forall x\in P(a,\eta)\colon \left|\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right| < \varepsilon.$$

Zvolme $x\in P(a,\eta)$. Potom buď $g(x)=g(a)$ a

$$\frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(a)}{x-a} = 0,$$

nebo $g(x)\neq g(a)$ a

$$\left|\frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(a)}{x-a}\right| = \left|\frac{f(g(x))-f(b)}{g(x)-b}\right|\cdot\left|\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right| < C\varepsilon.$$

Každopádně

$$\forall x\in P(a,\eta)\colon \left|\frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(a)}{x-a}\right| < C\varepsilon,$$

a tedy $(f\circ g)'(a)=0$. $\square$

Poznámka. Předpoklad spojitosti g v a ve Větě 4.3 nelze vynechat. Položme

$$g(x)=\begin{cases}\operatorname{sign} x, & x\neq 0,\\ -\frac12, & x=0,\end{cases} \quad \text{a} \quad f(y)=|y| \text{ pro } y\in\mathbb{R}.$$

Potom

$$f'(g(0))\,g'(0) = (-1)\cdot\infty = -\infty,$$

a tedy je výraz $f'(g(0))\,g'(0)$ definován, ale

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ \frac12, & x=0,\end{cases}$$

a tedy $(f\circ g)'(0)$ neexistuje.

Značení. Nechť I je interval. Potom symbolem $\operatorname{Int} I$ značíme množinu všech vnitřních bodů I.

Věta 4.4 (derivace inversní funkce)**.** *Nechť I je interval, $a\in\operatorname{Int} I$, f je ryze monotónní a spojitá funkce na I a existuje $f'(a)$. Označme $b=f(a)$.*

(a) *Jestliže $f'(a)\neq 0$, potom $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$.*
(b) *Jestliže $f'(a)=0$ a f je rostoucí, potom $(f^{-1})'(b)=\infty$.*
(c) *Jestliže $f'(a)=0$ a f je klesající, potom $(f^{-1})'(b)=-\infty$.*

konec 20. přednášky (11.12.2024)

Důkaz. Předpokládejme, že f je rostoucí. Označme $J = f(I)$. Potom J je podle Věty 3.13 interval. Dle Věty 3.16 je $f^{-1}\colon J \to I$ spojitá a rostoucí. Protože $a \in \operatorname{Int} I$ a f je rostoucí, je $b \in \operatorname{Int} J$. Nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(b, \varepsilon) \subset J$. Díky tomu, že a je vnitřním bodem I a f je spojitá v a, nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $B(a, \delta) \subset I$ a $f(B(a, \delta)) \subset B(b, \varepsilon)$. Označme

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in P(a, \delta).$$

Potom

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = f'(a).$$

Funkce f^{-1} je spojitá v b, a tedy

$$\lim_{y \to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b).$$

Protože f^{-1} je rostoucí, platí

$$\forall y \in P(b, \varepsilon)\colon f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b).$$

Tedy podle Věty 3.3 (varianta s podmínkou (P)) platí

$$\lim_{y \to b} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} = \lim_{y \to b} (\varphi \circ f^{-1})(y) = f'(a). \tag{12}$$

(a) Podle věty o aritmetice limit a (12) máme

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}.$$

(b) Označme

$$\psi(y) = \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}, \quad y \in P(b, \varepsilon).$$

Potom podle (12) platí

$$\lim_{y \to b} \psi(y) = 0.$$

Navíc

$$\forall y \in P(b, \varepsilon)\colon \psi(y) > 0,$$

neboť f^{-1} je rostoucí na J. Podle Věty 3.8 tedy platí

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \infty.$$

Tvrzení (c) lze dokázat obdobně. □

Poznámka.
- $\log'(x) = \frac{1}{x}$ pro každé $x \in (0, \infty)$,
- $\cos'(x) = -\sin(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$,
- $\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}$ pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,
- $\operatorname{cotg}'(x) = \frac{-1}{\sin(x)^2}$ pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,
- $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro každé $x \in (-1, 1)$,
- $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro každé $x \in (-1, 1)$,
- $\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$,
- $\operatorname{arccotg}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ pro každé $x \in (0, \infty)$.
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro každá $a \in (0, \infty) \setminus 1$ a $x \in \mathbb{R}$.

Věta 4.5 (nutná podmínka existence extrému)**.** *Nechť f je funkce a a je bodem lokálního extrému funkce f. Potom buď $f'(a)$ neexistuje, nebo $f'(a) = 0$.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $f'(a)$ existuje a je různá od 0. Uvažujme nejprve případ $f'(a) > 0$. Dle Věty 3.6(a) nalezneme $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta) \colon \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Odtud plyne, že pro $x \in P_+(a, \delta)$ platí $f(a) < f(x)$ a pro $x \in P_-(a, \delta)$ platí $f(a) > f(x)$. Tedy f nemá v a lokální extrém, což je spor. Obdobně lze odvodit, že funkce f nemá v a lokální extrém ani v případě, kdy $f'(a) < 0$. □

4.2. **Věty o střední hodnotě.**

Věta 4.6 (Rolle)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Je-li $f(a) = f(b)$ a f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b), pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.*

Důkaz. Podle Věty 3.14 nabývá funkce f na intervalu $[a, b]$ svého maxima i minima. Označme $m = \min f\big([a, b]\big)$ a $M = \max f\big([a, b]\big)$. Pak

$$m \leq f(a) = f(b) \leq M. \tag{13}$$

Jestliže $m = M$, potom je funkce f konstantní na $[a, b]$. Tedy $f'(c) = 0$ dokonce v každém bodě $c \in (a, b)$.

Jestliže $m < M$, potom musí být alespoň jedna z obou nerovností v (13) ostrá. Předpokládejme, že $f(b) < M$. Nalezneme $c \in [a, b]$ splňující $f(c) = M$. Potom $c \notin \{a, b\}$, a tedy $c \in (a, b)$. Pak f nabývá v bodě c svého maxima na intervalu $[a, b]$ a existuje v něm derivace podle předpokladu. Podle Věty 4.5 platí $f'(c) = 0$.

Jestliže $m < f(a)$, pak lze postupovat obdobně jako v předcházejícím případě. Alternativně je také možné použít již dokázané tvrzení na funkci $-f$. □

Věta 4.7 (Lagrange)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má v každém bodě intervalu (a, b) derivaci. Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz. Myšlenka důkazu spočívá v převedení problému do situace, ve které bude možné použít Rolleovu větu (Věta 4.6). Definujme funkci g předpisem

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a), \qquad x \in [a, b].$$

Pak g je spojitá podle důsledku Věty 3.5. Navíc lze snadno ověřit, že $g(a) = g(b)$. Protože v každém bodě intervalu (a, b) má funkce

$$x \mapsto \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a), \quad x \in [a, b],$$

vlastní derivaci a funkce f derivaci, existuje podle Věty 4.2(a) derivace g v každém bodě intervalu (a, b). Díky Větě 4.6 tedy nalezneme bod $c \in (a, b)$ splňující $g'(c) = 0$. Protože pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

dostáváme

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tedy $f'(c)$ je vlastní a $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Věta 4.8 (limita derivace)**.** *Nechť funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \to a_+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí $f'_+(a) = \lim_{x \to a_+} f'(x)$.*

Důkaz. Označme $L = \lim_{x\to a_+} f'(x)$. Nalezneme $\delta_0 > 0$ takové, že pro každé $x \in P_+(a,\delta_0)$ je $f'(x)$ vlastní. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta \in (0,\delta_0)$ takové, že pro každé $z \in P_+(a,\delta)$ platí

$$f'(z) \in B(L,\varepsilon). \tag{14}$$

Zvolme $x \in P_+(a,\delta)$. Pak funkce f má vlastní derivaci v každém bodě intervalu (a,x). Navíc je funkce f spojitá na intervalu $[a,x]$, neboť spojitost v bodech intervalu $(a,x]$ plyne z Věty 4.1 a spojitost v a zprava předpokládáme. Dle Věty 4.7 nalezneme $c_x \in (a,x)$ splňující

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x).$$

Protože $c_x \in P_+(a,\delta)$, z (14) máme

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in B(L,\varepsilon).$$

Odtud plyne, že $f'_+(a) = L$. □

Poznámka. Obdobné tvrzení jako ve Větě 4.8 platí i pro derivaci zleva, a tedy i pro derivaci.

konec 21. přednášky (13.12.2024)

Poznámka. Předpoklad spojitosti ve Větě 4.8 nelze vynechat. Například $\lim_{x\to 0_+} \operatorname{sign}'(x) = 0$, ale $\operatorname{sign}'_+(0) = \infty$.

Věta 4.9 (vztah derivace a monotonie)**.** *Nechť f je spojitá funkce na intervalu I, která má v každém vnitřním bodě I nezápornou (respektive kladnou, respektive zápornou, respektive nekladnou) derivaci. Pak f je neklesající (respektive rostoucí, respektive klesající, respektive nerostoucí) na I.*

Důkaz. Dokážeme pouze první variantu věty. Zvolme $a,b \in I$, $a < b$. Pak funkce $f|_{[a,b]}$ je spojitá na $[a,b]$ a má derivaci v každém vnitřním bodě $[a,b]$. Dle Věty 4.7 nalezneme bod $c \in (a,b)$ splňující

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Podle předpokladu platí

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \geq 0,$$

a tedy $f(a) \leq f(b)$. Funkce f je tedy neklesající. □

Poznámka. Předpoklad spojitosti lze ve Větě 4.9 vynechat. Důkaz je o něco obtížnější a zde nebude uveden.

Věta 4.10 (Cauchy)**.** *Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f a g jsou funkce spojité na intervalu $[a,b]$, f má v každém bodě $x \in (a,b)$ derivaci a g má v každém bodě $x \in (a,b)$ vlastní nenulovou derivaci. Potom $g(a) \neq g(b)$ a existuje $c \in (a,b)$ takové, že*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \tag{15}$$

Důkaz. Podle Lagrangeovy věty (Věta 4.7) pro funkci g nalezneme $d \in (a,b)$ takové, že

$$g'(d) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}.$$

Protože $g'(d) \neq 0$, dostáváme $g(a) \neq g(b)$.

Položme

$$\varphi(x) = \big(f(x)-f(a)\big)\cdot\big(g(b)-g(a)\big) - \big(g(x)-g(a)\big)\cdot\big(f(b)-f(a)\big), \qquad x \in [a,b].$$

Pak je funkce φ spojitá na $[a,b]$ a v každém bodě intervalu (a,b) má derivaci (Věta 4.2), neboť funkce

$$x \mapsto \big(f(x)-f(a)\big)\cdot\big(g(b)-g(a)\big)$$

má v každém bodě intervalu (a,b) derivaci a funkce

$$x \mapsto \big(g(x)-g(a)\big)\cdot\big(f(b)-f(a)\big)$$

má v každém bodě intervalu (a,b) vlastní derivaci. Navíc $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. Podle Věty 4.6 tedy nalezneme $c\in(a,b)$, splňující $\varphi'(c)=0$. Protože pro každé $x\in(a,b)$ platí

$$\varphi'(x)=f'(x)\cdot\big(g(b)-g(a)\big)-g'(x)\cdot\big(f(b)-f(a)\big)$$

dle Věty 4.2, pro $x=c$ máme

$$0=\varphi'(c)=f'(c)\cdot\big(g(b)-g(a)\big)-g'(c)\cdot\big(f(b)-f(a)\big).$$

Odtud plyne, že $f'(c)$ je vlastní, a elementární úpravou dostaneme (15). □

Věta 4.11 (L'Hôpitalovo pravidlo)**.** *Nechť $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, f,g jsou funkce, existuje*

$$\lim_{x\to a_+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

a je splněna jedna z podmínek

(a) *buď* $\lim_{x\to a_+} f(x)=\lim_{x\to a_+} g(x)=0$,
(b) *nebo* $\lim_{x\to a_+}|g(x)|=\infty$.

Potom

$$\lim_{x\to a_+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a_+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámka. Obdobné tvrzení jako ve Větě 4.11 platí i pro limitu zleva, a tedy i pro limitu.

Poznámka. Předpoklady Věty 4.11 nelze vynechat, vizte například

$$\lim_{x\to0}\frac{3x+5}{2x+6}\neq\lim_{x\to0}\frac{3}{2},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^8}{x+6\sin x}\neq\lim_{x\to\infty}\frac{8x^7}{1+6\cos x}.$$

Poznámka. L'Hospitalovo pravidlo není vždy vhodným nástrojem pro výpočet limity. Například přímočaré použití l'Hospitalova pravidla pro limitu

$$\lim_{x\to0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

vede k limitě

$$\lim_{x\to0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}}{1}=\lim_{x\to0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

Výpočet poslední limity není však snazší než výpočet původní limity.

Příklad. Spočtěte $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)-x}{x^3}$.

Řešení. Použitím l'Hospitalova pravidla obdržíme

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

Příklad. Spočtěte $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}$.

Řešení. Použitím l'Hospitalova pravidla obdržíme

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}.$$

Příklad. Spočtěte $\lim\limits_{x\to1_-}\dfrac{\arccos x}{\sqrt{e^3-e^{3x}}}$.

Řešení. Jest

$$\lim_{x\to 1_-}\frac{\arccos x}{\sqrt{e^3-e^{3x}}}=\lim_{x\to 1_-}\sqrt{\frac{\arccos^2 x}{e^3-e^{3x}}}=\lim_{x\to 1_-}\sqrt{\frac{\arccos^2 x}{1-x}\frac{1-x}{e^3-e^{3x}}}.$$

Použitím l'Hospitalova pravidla obdržíme

$$\lim_{x\to 1_-}\frac{1-x}{e^3-e^{3x}}=\lim_{x\to 1_-}\frac{-1}{-3e^{3x}}=\frac{1}{3e^3}$$

a

$$\lim_{x\to 1_-}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 1_-}\frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}=\lim_{x\to 1_-}\frac{2}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{2}.$$

Tedy podle aritmetiky limit, věty o limitě složené funkce s podmínkou (S) a spojitosti odmocniny máme celkem

$$\lim_{x\to 1_-}\frac{\arccos x}{\sqrt{e^3-e^{3x}}}=\sqrt{\frac{2}{3e^3}}.$$

4.3. Konvexní a konkávní funkce, inflexní body.

Definice. Nechť I je interval a f je funkce definovaná alespoň na I. Řekneme, že f je

- **konvexní** na I, jestliže
$$\forall x,y\in I\ \forall\lambda\in(0,1)\colon f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),$$
- **konkávní** na I, jestliže
$$\forall x,y\in I\ \forall\lambda\in(0,1)\colon f(\lambda x+(1-\lambda)y)\ge\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),$$
- **ryze konvexní** na I, jestliže
$$\forall x,y\in I, x\ne y\ \forall\lambda\in(0,1)\colon f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),$$
- **ryze konkávní** na I, jestliže
$$\forall x,y\in I, x\ne y\ \forall\lambda\in(0,1)\colon f(\lambda x+(1-\lambda)y)>\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

Lemma (ekvivalentní podmínky pro konvexitu). *Nechť $I\subset\mathbb{R}$ je interval a $f\colon I\to\mathbb{R}$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

(i) *f je konvexní na I,*

(ii) $\forall x_1,x_2,x_3\in I,\ x_1<x_2<x_3\colon \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$,

(iii) $\forall x_1,x_2,x_3\in I,\ x_1<x_2<x_3\colon \dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\le\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$,

(iv) $\forall x_1,x_2,x_3\in I,\ x_1<x_2<x_3\colon \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

Obdobné charakterizace platí pro konkávní, ryze konvexní a ryze konkávní funkce.

Důkaz. Předpokládejme, že $x_1,x_2,x_3\in I$, $x_1<x_2<x_3$. Položme $\lambda=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$. Pak platí $\lambda\in(0,1)$ a $x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)x_3$. Označme $c=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_3)$. Přímočarým výpočtem pak obdržíme

$$\frac{c-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}=\frac{f(x_3)-c}{x_3-x_2}. \tag{16}$$

Pokud platí $f(x_2)\le c$, pak pomocí (16) dostáváme

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \tag{17}$$

Pokud platí jedna z nerovností v (17) nebo nerovnost

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2},$$

pak podle (16) platí nerovnost $f(x_2)\le c$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Předpokládejme, že $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Při označení z předchozího odstavce dostaneme $f(x_2) \leq c$, neboť f je konvexní. Pak podle (16) dostáváme nerovnost

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Předpokládejme, že $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, a c je definováno stejně jako v úvodním odstavci. Potom podle předpokladu platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

takže $c \geq f(x_2)$. Tím je podmínka z definice konvexity ověřena.

Ekvivalenci (i) $\Leftrightarrow$ (iii) a (i) $\Leftrightarrow$ (iv) lze pomocí úvah prvního odstavce ověřit obdobně. $\square$

Věta 4.12 (konvexita a jednostranné derivace)**.** *Nechť f je konvexní funkce na nedegenerovaném intervalu I a $a \in I$.*

- (a) *Je-li a vnitřní bod I, potom existují vlastní jednostranné derivace $f'_+(a)$, $f'_-(a)$, které splňují $f'_-(a) \leq f'_+(a)$.*
- (b) *Je-li a pravý krajní bod I, pak $f'_-(a)$ existuje.*
- (c) *Je-li a levý krajní bod I, pak $f'_+(a)$ existuje.*

konec 22. přednášky (18.12.2024)

Důkaz. (a) Nechť a je vnitřní bod I. Nalezneme $\delta > 0$ splňující $B(a, \delta) \subset I$ a definujeme funkce

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in P_+(a, \delta),$$
$$\psi(y) = \frac{f(y) - f(a)}{y - a}, \quad y \in P_-(a, \delta).$$

Pro body $y_1, y_2, x_1, x_2 \in P(a, \delta)$ splňující $y_2 < y_1 < a < x_1 < x_2$ dostáváme z lemmatu

$$\varphi(x_1) = \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \leq \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a} = \varphi(x_2)$$

a

$$\psi(y_2) = \frac{f(y_2) - f(a)}{y_2 - a} \leq \frac{f(y_1) - f(a)}{y_1 - a} = \psi(y_1).$$

Tedy φ je neklesající na $P_+(a, \delta)$ a ψ je neklesající na $P_-(a, \delta)$. Z lemmatu dále pro každé $x \in P_+(a, \delta)$ a $y \in P_-(a, \delta)$ plyne

$$\psi(y) = \frac{f(a) - f(y)}{a - y} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \varphi(x). \tag{18}$$

Tedy φ je zdola omezená na $P_+(a, \delta)$ a ψ je shora omezená na $P_-(a, \delta)$.

Z Věty 3.9 plyne, že

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a_+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a_+} \varphi(x)$$

a

$$f'_-(a) = \lim_{y \to a_-} \frac{f(y) - f(a)}{y - a} = \lim_{y \to a_-} \psi(y)$$

existují vlastní.

Navíc z (18) a Věty 3.9 plyne pro každé $x \in P_+(a, \delta)$

$$f'_-(a) = \lim_{y \to a_-} \psi(y) \leq \varphi(x).$$

Po dalším použití Věty 3.9 dostáváme

$$f'_-(a) \leq \lim_{x \to a_+} \varphi(x) = f'_+(a).$$

Tím je důkaz dokončen.

(b) Nechť a je pravý koncový bod I. Vzhledem k tomu, že I není degenerovaný, nalezneme $\delta > 0$ splňující $B_-(a,\delta) \subset I$. Na tomto prstencovém okolí uvažujme funkci ψ z předchozí části důkazu. Potom je ψ na $P_-(a,\delta)$ neklesající, a proto $f'_-(a)$ existuje.

(c) Důkaz lze provést obdobně jako v části (b). □

Poznámka. (a) Jednostranné derivace konvexní funkce f na intervalu I se nemusí v bodě $a \in \operatorname{Int} I$ rovnat, a nemusí tedy existovat $f'(a)$. Příkladem je funkce $f(x) = |x|$ a bod $a = 0$.

(b) Jednostranné derivace v tvrzení (b) a (c) předchozí věty mohou být nevlastní, vizte např. funkci sign uvažovanou na intervalu $[-1, 0]$.

Poznámka. Jestliže f je konkávní funkce na intervalu I, potom pro každé $a \in \operatorname{Int} I$ existují vlastní $f'_+(a)$, $f'_-(a)$ a platí $f'_-(a) \geq f'_+(a)$.

Věta 4.13 (konvexita a spojitost)**.** *Nechť I je interval, a je vnitřní bod I a $f\colon I \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce na I. Potom je f je spojitá v a.*

Důkaz. Díky Větě 4.12(a) existují $f'_-(a)$ a $f'_+(a)$ vlastní. Odtud plyne, že f je v a spojitá zleva i zprava, a tedy spojitá. □

Poznámka. Funkce sign, která je na intervalu $(-1, 0]$ konvexní, není spojitá v bodě 0. Z konvexity funkce f tedy nevyplývá spojitost ve všech bodech intervalu I, na němž je funkce f definována.

Definice. Nechť f je funkce a $a \in \mathbb{R}$. **Druhou derivací** f v a nazýváme hodnotu

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h},$$

pokud limita existuje. Jestliže $M \subset \mathbb{R}$ a pro každé $x \in M$ existuje vlastní $f''(x)$, potom definujeme zobrazení $f''\colon M \to \mathbb{R}$ předpisem $f''\colon x \mapsto f''(x)$. Obdobně pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme n**-tou derivaci** funkce f, kterou značíme $f^{(n)}$. Je-li $n = 1, 2, 3$, píšeme také po řadě f', f'', f'''. Symbolem $f^{(0)}$ budeme rozumět f.

Věta 4.14 (druhá derivace a konvexita)**.** *Nechť I je nedegenerovaný interval, $f\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má v každém vnitřním bodě I vlastní derivaci. Nechť navíc platí, že funkce f' je spojitá na* $\operatorname{Int} I$.

(a) *Nechť funkce f' je neklesající na* $\operatorname{Int} I$. *Potom je f konvexní na I.*

(b) *Nechť pro každé $x \in \operatorname{Int} I$ platí $f''(x) \geq 0$. Potom je f konvexní na I.*

Důkaz. (a) Zvolme $x_1 < x_2 < x_3$ z intervalu I. Podle předpokladů je funkce f spojitá na intervalu $[x_1, x_3]$ a v bodech intervalu (x_1, x_3) má derivaci. Díky Lagrangeově větě (Věta 4.7) nalezneme body $c \in (x_1, x_2)$ a $d \in (x_2, x_3)$ splňující

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \quad \text{a} \quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(d).$$

Podle předpokladu platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \leq f'(d) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Dle lemmatu ((i)⇔(iv)) je tedy f konvexní.

(b) Podle Věty 4.9 je funkce f' je neklesající na $\operatorname{Int} I$, a tedy f je konvexní díky části (a). □

Poznámka. Obdobná tvrzení platí pro ryzí konvexitu, konkávnost a ryzí konkávnost.

Definice. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě a **inflexi** nebo také že a je **inflexním bodem** funkce f, jestliže existuje vlastní $f'(a)$ a existuje $\delta > 0$ takové, že buď

$$\forall x \in P_-(a,\delta)\colon f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \qquad \text{a}$$
$$\forall x \in P_+(a,\delta)\colon f(x) < f(a) + f'(a)(x-a),$$

nebo

$$\forall x \in P_-(a,\delta)\colon f(x) < f(a) + f'(a)(x-a) \qquad \text{a}$$
$$\forall x \in P_+(a,\delta)\colon f(x) > f(a) + f'(a)(x-a).$$

Věta 4.15 (nutná podmínka inflexe)**.** *Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a $f''(a)$ existuje a je různá od nuly. Potom a není inflexním bodem funkce f.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $f''(a) > 0$. Z definice limity nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(a,\delta)$ platí
$$\frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} > 0.$$
Dostáváme tedy, že

$$\forall x \in P_-(a,\delta)\colon f'(x) < f'(a) \qquad \text{a} \tag{19}$$
$$\forall x \in P_+(a,\delta)\colon f'(x) > f'(a).$$

Zvolme $x \in P_-(a,\delta)$. Protože f je spojitá na $B(a,\delta)$ dle Věty 4.1, pomocí Lagrangeovy věty (Věta 4.7) najdeme $c_x \in (x,a)$ splňující
$$\frac{f(a) - f(x)}{a-x} = f'(c_x).$$
Protože díky (19) máme $f'(c_x) < f'(a)$, obdržíme $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < f'(a)$. Úpravou dostáváme $f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$.

Je-li $x \in P_+(a,\delta)$, jako výše nalezneme $d_x \in (a,x)$ splňující
$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(d_x) > f'(a).$$
Tedy máme $f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$. Tedy a není inflexním bodem f. Obdobně bychom postupovali v případě $f''(a) < 0$. □

Poznámka. Z podmínky $f''(a) = 0$ neplyne, že a je inflexní bod f. Položme $f(x) = x^4$ pro $x \in \mathbb{R}$. Potom $f''(0) = 0$, ale 0 není inflexní bod f.

Věta 4.16 (postačující podmínka pro inflexi)**.** *Nechť funkce f má spojitou první derivaci na intervalu (a,b), $c \in (a,b)$ a platí*

$$\forall x \in (a,c)\colon f''(x) > 0 \qquad \text{a} \qquad \forall x \in (c,b)\colon f''(x) < 0 \tag{20}$$

nebo

$$\forall x \in (a,c)\colon f''(x) < 0 \qquad \text{a} \qquad \forall x \in (c,b)\colon f''(x) > 0. \tag{21}$$

Pak c je inflexním bodem f.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že f splňuje (20). Z Věty 4.9 plyne, že f' je rostoucí na $(a,c]$ a je klesající na $[c,b)$. Zvolme $x \in (a,c)$. Podle Lagrangeovy věty 4.7 nalezneme $c_x \in (x,c)$ splňující
$$\frac{f(c) - f(x)}{c-x} = f'(c_x) < f'(c).$$
Tedy $f(x) > f(c) + f'(c)(x-c)$.

Podobně pro $x \in (c,b)$ nalezneme $d_x \in (c,x)$ splňující
$$\frac{f(x) - f(c)}{x-c} = f'(d_x) < f'(c).$$
Úpravou obdržíme $f(x) < f(c) + f'(c)(x-c)$. Tedy c je inflexním bodem f.

V případě (21) lze postupovat obdobně. □

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Řekneme, že f má v ∞ **asymptotu** $ax+b$, jestliže
$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - ax - b\big) = 0.$$
Obdobně definujeme asymptotu v $-\infty$.

Věta 4.17 (tvar asymptoty). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Potom f má asymptotu $ax + b$ v ∞ právě tehdy, když*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \& \quad \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b.$$

Obdobné tvrzení platí pro asymptotu v $-\infty$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Podle věty o aritmetice limit platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x) - ax - b}{x} + a + \frac{b}{x} \right) = a,$$

a

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax - b + b) = b.$$

$\Leftarrow$ Jest

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) = b - b = 0,$$

a tedy $x \mapsto ax + b$ je asymptotou funkce f v ∞. □

konec 23. přednášky (20.12.2024)

5. Taylorův polynom

5.1. Základní vlastnosti.

Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a $f'(a)$ existuje vlastní. Pak **tečnou** ke grafu funkce f v bodě a nazýváme afinní funkci $t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$t(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Poznámka (aproximační vlastnost tečny). Nechť f, t a a jsou jako výše. Pak

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a)}{x - a} \\ &= \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = f'(a) - f'(a) = 0.\end{aligned}$$

Funkce t tedy v blízkosti bodu a dobře přibližuje (aproximuje) chování funkce f ve výše uvedeném smyslu.

Obdobně pro $n \in \mathbb{N}$ hledáme polynom P splňující $\operatorname{st} P \le n$ a

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Pak polynom $T_n^{f,a}$, definovaný pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisem

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x - a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x - a)^n,$$

nazýváme **Taylorovým polynomem** funkce f v bodě a řádu n.

Úmluva. Výraz $(x - a)^0$ chápeme jako 1, a to i pro $x = a$. Symbolem $f^{(0)}$ rozumíme f a symbolem $T_0^{f,a}$ rozumíme $f(a)$.

Poznámky. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Potom
- (a) $T_1^{f,a} = t$,
- (b) $\operatorname{st} T_n^{f,a} \le n$ a tato nerovnost může být ostrá,
- (c) $(T_n^{f,a})' = T_{n-1}^{f',a}$.

Věta 5.1 (Peanův tvar zbytku). *Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Potom*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Důkaz. Použijeme matematickou indukci podle n. Nechť $n = 1$. Potom platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_1^{f,a}(x)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} = 0.$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Předpokládejme, že existuje vlastní $f^{(n)}(a)$ a tvrzení věty platí pro $n - 1$. To znamená, že pro každou funkci g takovou, že existuje vlastní $g^{(n-1)}(a)$, platí

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x) - T_{n-1}^{g,a}(x)}{(x - a)^{n-1}} = 0.$$

Tento předpoklad využijeme pro $g = f'$. Víme, že funkce f' v bodě a vlastní $(n-1)$-ní derivaci, neboť $(f')^{(n-1)}(a) = f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Podle indukčního předpokladu tedy platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{(x - a)^{n-1}} = 0. \tag{22}$$

Funkce f je spojitá v bodě a, neboť existuje vlastní $f'(a)$. Funkce $T_n^{f,a}$ je polynom, a tedy je také spojitá v bodě a. Z toho plyne, že můžeme využít L'Hospitalova pravidla (Věta 4.11(a)). Dostaneme

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x - a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{\big(f(x) - T_n^{f,a}(x)\big)'}{\big((x - a)^n\big)'}.$$

Podle poznámky (c) platí $\big(T_n^{f,a}\big)' = T_{n-1}^{f',a}$. Tudíž z (22) vyplývá, že

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x - a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{n(x - a)^{n-1}} = 0.$$

Tím je tvrzení dokázáno. □

Lemma (aproximace polynomu)**.** *Nechť Q je polynom, $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{st} Q \le n$, $a \in \mathbb{R}$ a*

$$\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Pak Q je nulový polynom.

Důkaz. Předpokládejme, že polynom Q není nulový. Protože má Q v bodě a kořen, nalezneme $k \in \{1, \dots, n\}$ a polynom R taková, že $Q(x) = (x - a)^k R(x)$ a $R(a) \neq 0$. Odtud plyne, že

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x - a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x - a)^{n-k}}.$$

Poslední limita ale buď neexistuje (je-li $k < n$ a $n - k$ je liché), nebo je nevlastní (je-li $k < n$ a $n - k$ je sudé), nebo je vlastní a nenulová (je-li $k = n$). Ve všech případech dostáváme spor. □

Věta 5.2 (jednoznačnost Taylorova polynomu)**.** *Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, existuje vlastní $f^{(n)}(a)$ a P je polynom splňující $\operatorname{st} P \le n$ a*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Potom $P = T_n^{f,a}$.

Důkaz. Podle Věty 5.1 víme, že

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Podle věty o aritmetice limit tedy platí

$$\lim_{x\to a} \frac{T_n^{f,a}(x) - P(x)}{(x - a)^n} = \lim_{x\to a} \left(\frac{T_n^{f,a}(x) - f(x)}{(x - a)^n} + \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n} \right) = 0 + 0 = 0.$$

Dále platí $\operatorname{st}\big(T_n^{f,a} - P\big) \le n$, a tedy je podle lemmatu $T_n^{f,a} - P$ nulový polynom. □

Věta 5.3 (obecný tvar zbytku)**.** *Nechť f je funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, a f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní derivaci řádu $(n+1)$. Nechť φ je spojitá funkce na $[a, x]$ mající v každém bodě intervalu (a, x) vlastní nenulovou derivaci. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

Důkaz. Definujme funkci $F\colon [a, x] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + f'(t)(x - t) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x - t)^n \right).$$

Funkce F je spojitá na $[a, x]$ a má vlastní derivaci v každém bodě intervalu (a, x), neboť všechny funkce vystupující v definici F mají vlastní derivaci v každém bodě intervalu $[a, x]$. Podle Cauchyovy věty (Věta 4.10) tedy nalezneme $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$\frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{23}$$

Zvolme $t \in (a, x)$. Potom

$$\begin{aligned} F'(t) &= -\left(f'(t) + f'(t) \cdot (-1) + f''(t)(x - t) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n \right) \\ &= -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $t = \xi$, dostaneme

$$F'(\xi) = -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

Zřejmě platí $F(x) = 0$ a $F(a) = f(x) - T_n^{f,a}(x)$. Odtud a z (23) dostáváme

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

□

Poznámky. (a) Obdobné tvrzení platí i pro $x < a$.

(b) Předpoklady Věty 5.3 lze mírně oslabit. Stačí předpokládat, že $f^{(n)}$ je spojitá na $[a, x]$ a $f^{(n+1)}$ existuje (vlastní či nevlastní) na (a, x). I za tohoto předpokladu lze použít postup z uvedeného důkazu.

konec 24. přednášky (8.1.2025)

Věta 5.4 (Lagrangeův tvar zbytku)**.** *Nechť f je funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, a f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní derivaci řádu $(n+1)$. Potom existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - a)^{n+1}. \tag{24}$$

Důkaz. Položme $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$, $t \in [a, x]$. Pak je φ je spojitá na $[a, x]$ a na (a, x) má vlastní nenulovou derivaci. Podle Věty 5.3 nalezneme $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{0 - (x - a)^{n+1}}{(-(n+1)(x - \xi)^n)} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

□

Věta 5.5 (Cauchyův tvar zbytku)**.** *Nechť f je funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, a f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní derivaci řádu $(n+1)$. Potom existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n (x - a). \tag{25}$$

Důkaz. Položme $\varphi(t) = t$, $t \in [a, x]$. Pak je funkce φ je spojitá na $[a, x]$ a na (a, x) má vlastní nenulovou derivaci. Podle Věty 5.3 nalezneme $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{x-a}{1} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a).$$

□

5.2. **Symbol „malé o“.**

Definice. Nechť f a g jsou funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že f je v bodě a **malé** o od g, značíme $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$, jestliže platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Poznámky. (a) Výraz „$f(x) = o(g(x))$, $x \to a$“ chápeme jako jeden symbol. Znaménko rovnosti zde neznačí standardní rovnost mezi reálnými čísly nebo funkcemi.

(b) Tvrzení Věty 5.1 je možné zapsat ve tvaru

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = o((x-a)^n), \quad x \to a.$$

(c) Symbol $f(x) = o(1)$, $x \to a$, znamená, že $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.
(d) Symbol o lze použít i pro jednostranné limity.
(e) Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme symbol $x \to a$ vynechávat.

Definice. Nechť f a g jsou funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že f je v bodě a **velké** o od g, značíme $f(x) = O(g(x))$, $x \to a$, jestliže existují $C, \delta \in \mathbb{R}$, $C > 0$, $\delta > 0$, taková, že

$$\forall x \in P(a, \delta) : |f(x)| \le C|g(x)|.$$

Poznámky. Platí například

$$\begin{aligned}
&x^3 = o(x^2),\ x \to 0,\\
&x^2 = o(x^3),\ x \to \infty,\\
&e^{-x} = o(x^\alpha),\ x \to \infty \quad \text{pro kadé } \alpha \in \mathbb{R},\\
&1 - x = o(\arccos x),\ x \to 1_-,\\
&\arccos x = O(\sqrt{1-x}),\ x \to 1_-,\\
&\sin(2x) = O(x), x \to 0, \quad \text{ale } \sin(2x) \ne o(x), x \to 0,\\
&f(x) = O(g(x)), x \to 0, \quad \text{pro každé } f(x), g(x) \in \{x, \sin(x), \operatorname{tg}(x), \arcsin(x), \operatorname{arctg}(x)\}.
\end{aligned}$$

Věta 5.6 (aritmetika malého o)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.*

(a) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x) + f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.*

(b) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)g_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(c) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a f_2 je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)f_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(d) *Jestliže $f(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a $\lim_{x \to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ je vlastní, potom $f(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(e) *Jestliže $f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $h(x)f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.*

(f) *Jestliže $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \le n$, a $f(x) = o\big((x-a)^n\big)$, $x \to a$, potom $f(x) = o\big((x-a)^m\big)$, $x \to a$.*

Důkaz. Všechna tvrzení plynou z věty o aritmetice limit. □

Věta 5.7 (malé o a skládání)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, nechť φ je funkce definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu a a nechť f a g jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí bodu* *b. Předpokládejme, že platí $f(y) = o\big(g(y)\big)$, $y \to b$, a $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$. Nechť dále existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že*

$$\forall x \in P(a,\delta)\colon \varphi(x) \neq b.$$

Potom $f\big(\varphi(x)\big) = o\big(g(\varphi(x))\big)$, $x \to a$.

Důkaz. Tvrzení plyne z věty o limitě složené funkce (Věta 3.3(P)). □

5.3. **Taylorovy polynomy elementárních funkcí.**

Věta 5.8 (Taylorovy polynomy elementárních funkcí)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak platí*

$$\text{(a) } T_n^{\exp,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},$$

$$\text{(b) } T_{2n+1}^{\sin,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

$$\text{(c) } T_{2n}^{\cos,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},$$

$$\text{(d) } T_n^{\log(1+x),0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1},$$

$$\text{(e) } T_{2n+1}^{\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

$$\text{(f) } T_{2n+1}^{\operatorname{arctg},0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1},$$

$$\text{(g) } T_n^{(1+x)^\alpha,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Příklad. Odhadněte velikost zbytku při aproximaci funkce e^x Taylorovým polynomem řádu n v bodě 0 pro $x \in [0,1]$.

Příklad. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ má aproximace funkce $\cos x$ Taylorovým polynomem řádu 2 v bodě 0 přesnost alespoň 10^{-4}.

Příklad. Určete hodnotu $\sin(1^\circ)$ s přesností alespoň na 10^{-8}.

Příklad. Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ existuje limita

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{x^2\cos(\sqrt{x}) - (\sin(x))\log(1+x) + ax^4}{x^5}$$

a pro tato a limitu spočtěte.

konec 25. přednášky (10.1.2025)