

1. (7 bodů) Necht' náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé a obě mají rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 1)$. Odvoďte hustotu pro $X - Y$.
2. (6 bodů) Necht' náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda > 0$. Ukažte, že $\mathbb{P}[X \geq 2\lambda] \leq 1/\lambda$. Jestli používáte nějakou nerovnost, vyslovte ji jako tvrzení s ověřenými předpoklady, ale bez důkazu.
3. (7 bodů) Definujte konvergenci v pravděpodobnosti a v L_2 . Posloupnost náhodných veličin $X_1, X_2, \dots$ splňuje $\mathbb{P}[X_n = 1/n] = 1 - 1/n^2$ a $\mathbb{P}[X_n = n] = 1/n^2$. Konverguje $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ v pravděpodobnosti? Konverguje $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ v L_2 ?
4. (20 bodů) Uvažujme parametr $\theta > 0$ a náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ s hustotou

$$f(x; \theta) = \frac{x^2}{2\theta^3} \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\} \mathbb{1}\{x \in (0, \infty)\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Najděte odhad $\tilde{\theta}_n$ parametru θ momentovou metodou. [3]
- (b) Vyšetřete nestrannost a konzistenci $\tilde{\theta}_n$ bez použití obecné věty o vlastnostech momentových odhadů. [4]
- (c) Najděte maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ . [5]
- (d) Určete rozptyl $\hat{\theta}_n$ a porovnejte ho s asymptotickým rozptylem $\hat{\theta}_n$ získaným pomocí Fisherovy informace. [4]
- (e) Pomocí transformace $g(\theta) = \log \theta$ zkonstruuje přibližný 95%-ní interval spolehlivosti pro parametr θ . [4]