Waldovy rovnosti

Adam Rajský
Matouš Cimala
Pravděpodobnostně-statistický seminář
KPMS MFF UK

25. února 2025

Definice

Definice

Ať $X \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ je náhodná veličina a ať $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ je σ-algebra. Řekneme, že $\mathcal{F}$-měřitelná náhodná veličina $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$ je podmíněná střední hodnota X za podmínky $\mathcal{F}$, pokud pro každou množinu $B \in \mathcal{F}$ platí:

$$\int_B X d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] d\mathbb{P}$$

Definice

Ať X, Y jsou náhodné veličiny na společném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $X \in L_1$. Pak definujeme podmíněnou střední hodnotu X za podmínky Y jako $\mathbb{E}[X \mid Y] = \mathbb{E}[X \mid \sigma(Y)]$, kde $\sigma(Y)$ je σ-algebra generovaná náh. veličinou Y.

Definice

Definice

Ať $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{A}$ je filtrace na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ a $X_1, X_2, \ldots$ je $\mathcal{F}$-měřitelná náhodná posloupnost. Řekneme, že $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ je $\mathcal{F}$-martingal, pokud pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$X_n \in L_1 \qquad \text{a} \qquad \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n.$$

Definice

Ať $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{A}$ je filtrace na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ a T je náhodná veličina nabývající hodnot z $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ skoro jistě. Řekneme, že T je markovský čas vzhledem k $\mathcal{F}$, pokud pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$[T \leq n] \in \mathcal{F}_n.$$

Prvá Waldova rovnosť

Veta

Nech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $X_1 \in L_1$ je i.i.d postupnosť n.v., $S_n \overset{s.j.}{=} \sum_{i=1}^{n} X_i$ a $T \in L_1$ je markovský čas voči filtraci $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, S_2, \ldots, S_n) = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Potom platí:

$$\mathbb{E}S_T = \mathbb{E}T \cdot \mathbb{E}X_1$$

Druhá Waldova rovnosť

Veta

Nech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{E}X_1 = 0$, $X_1 \in L_2$ je i.i.d postupnosť n.v., $S_n \overset{s.j.}{=} \sum_{i=1}^{n} X_i$ a $T \in L_1$ je markovský čas voči filtraci $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, S_2, \dots, S_n) = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$. (TP2 : Ak $\exists c \in (0, \infty)$, t.ž implikácia $n < T \implies |S_n| \leq c$ platí s.j pre všetky $n \in \mathbb{N}$), tak:

$$\operatorname{Var} S_T = \mathbb{E}S_T^2 = \mathbb{E}T \cdot \mathbb{E}X_1^2 = \mathbb{E}T \cdot \operatorname{Var} X_1$$

Lemma (Druhá Waldova rovnosť s obmedzeným markovským časom)

Nech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{E}X_1 = 0$, $X_1 \in L_2$ je i.i.d postupnosť n.v., $S_n \overset{s.j.}{=} \sum_{i=1}^{n} X_i$ a $T \leq K < \infty$ je markovský čas voči filtraci $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, S_2, \dots, S_n) = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$, kde $K \in \mathbb{N}$. Potom platí:

$$\operatorname{Var} S_T = \mathbb{E}S_T^2 = \mathbb{E}T \cdot \mathbb{E}X_1^2 = \mathbb{E}T \cdot \operatorname{Var} X_1$$

Waldova fundamentální identita

Věta

Ať $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost iid. veličin takových, že pro nějaké $t \in \mathbb{R}$ jest $1 \leq \varphi(t) = \mathbb{E}e^{tX_1} < \infty$, T je $(\sigma(X_1, \ldots, X_n))_{n=1}^{\infty}$-markovský čas a existuje $\alpha \in \mathbb{R}^+$ takové, že skoro jistě platí:

$$T > n \implies \left| \sum_{k=1}^{n} X_k \right| \leq \alpha.$$

Potom platí

$$\mathbb{E}\left[e^{t\sum_{k=1}^{T} X_i} \Big/ \varphi(t)^T \right] = 1.$$

Lemma

Ať $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ je $\mathcal{F}$-martingal a $T \in L_1$ je $\mathcal{F}$-markovský čas takový, že skoro jistě $T > n$ implikuje $\mathbb{E}[Y_{n+1} - Y_n \mid \mathcal{F}_n] \leq \alpha$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a nějaké $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Potom $\mathbb{E}|Y_T| < \infty$ a $\mathbb{E}Y_T = \mathbb{E}Y_1$.

Momentová vytvořující funkce

Věta

Ať X je náhodná veličina a pro $t = -b, b$ jest $\varphi(t) = \mathbb{E}e^{tX} < \infty$. Potom platí:

- $\varphi(t)$ je konečná, spojitá a konvexní na $[-b, b]$
- $\varphi(t)$ má na $[-b, b]$ konvexní spojité derivace všech řádů
- pro všechna $r \geq 1$ jest $\mathbb{E}|X|^r < \infty$ a $\mathbb{E}X^r = \varphi^{(r)}(t)$.

Existencia špeciálneho bodu momentovej vytvorujúcej funkcie

Veta

Nech X je náhodná veličina s $\mathbb{P}(X < 0) > 0, \mathbb{P}(X > 0) > 0$ a $\varphi(t) = \mathbb{E}e^{tX} < \infty$ pre všetky $t \in \mathbb{R}$. Potom platí:

- Ak $\mathbb{E}X \neq 0$, tak existuje práve jeden bod $t_0 \neq 0$, t.ž. $\varphi(t_0) = 1$.
- Ak $\mathbb{E}X = 0$, tak $\varphi(t) = 1$ implikuje $t = 0$.