Konvergence náhodných podposloupností

Matouš Cimala & Adam Rajský

Pravděpodobnostní a statistický seminář

1. dubna 2025

Motivace

Ať $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ jsou náhodné veličiny a $(N_t \mid t \geq 0)$ je náhodný proces nabývající hodnot z $\mathbb{N}$ s. j. Máme-li

$$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{nějak}} Y \qquad \text{a} \qquad N_t \xrightarrow[t\to\infty]{\text{nějak}} \infty,$$

ptáme se, za jakých okolností platí

$$Y_{N_t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{nějak}} Y.$$

Skoro jistě

Věta

Ať $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ jsou náhodné veličiny a $(N_t \mid t \geq 0)$ je náhodný proces s přirozenými hodnotami s. j. Ať platí

$$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s. j.}} Y \qquad \text{a} \qquad N_t \xrightarrow[t\to\infty]{\text{s. j.}} \infty.$$

Pak

$$Y_{N_t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{s. j.}} Y.$$

Skoro jistě a v pravděpodobnosti

Věta

Ať $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ jsou náhodné veličiny a $(N_t \mid t \geq 0)$ je náhodný proces s přirozenými hodnotami s. j. Ať platí

$$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s. j.}} Y \qquad \text{a} \qquad N_t \xrightarrow[t\to\infty]{\mathbb{P}} \infty.$$

Pak

$$Y_{N_t} \xrightarrow[t\to\infty]{\mathbb{P}} Y.$$

Lemma

Ať (X, ρ) je metrický prostor, $(x_t)_{t\geq 0} \subset X$ a $x \in X$. Pak $x_t \to x$ právě tehdy, když pro každou rostoucí posloupnost $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ lze vybrat podposloupnost $(t_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ tak, že $x_{t_{n_k}} \to x$.

Věta

Ať $X_1, X_2, \dots$ jsou iid. náhodné veličiny z L_1 a $(N_t \mid t \geq 0)$ je náhodný proces s hodnotami v $\mathbb{N}$ takový, že $N_t \xrightarrow[t\to\infty]{\text{s. j.}} \infty$. Označíme-li $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, platí:

- $\frac{X_{N_t}}{N_t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{s. j.}} 0$
- $\frac{S_{N_t} - N_t \mathbb{E} X_1}{N_t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{s. j.}} 0$
- $\frac{S_{N_t}}{N_t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{s. j.}} \mathbb{E} X_1$
- pokud $\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{s. j.}} \theta \in (0, \infty)$, pak $\frac{X_{N_t}}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{s. j.}} 0$ a $\frac{S_{N_t}}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{s. j.}} \theta E X_1$.

CLT s náhodným indexom

Veta

Nech $X_1, X_2, \ldots$ je i.i.d. postupnosť náhodných veličín s $\mathbb{E}[X_1] = 0$ a $\operatorname{Var} X_1 \in (0, \infty)$. Nech $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \geq 1$. Predpokladajme, že $\{N(t), t \geq 0\}$ sú kladné, celočíselné náhodné veličiny také, že pre nejaké $0 < \theta < \infty$,

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{P} \theta \quad \text{ako} \quad t \to \infty.$$

Potom platí, že

$$\frac{S_{N(t)}}{\sigma\sqrt{N(t)}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{ako} \quad t \to \infty,$$

a

$$\frac{S_{N(t)}}{\sigma\sqrt{\theta t}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{ako} \quad t \to \infty.$$

Silný zákon veľkých čísel / CLT pre čas prvého prechodu

Věta (SZVC)

Nech $X_1, X_2, \ldots$ sú nezávislé, identicky rozdelené náhodné premenné s kladnou, konečnou strednou hodnotou $E\,X_1 = \mu$, čiastkovými súčtami $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ pre $n \geq 1$ a časmi prvého prechodu

$$\tau(t) = \min\{n : S_n > t\}, \quad t \geq 0.$$

Potom

$$\frac{\tau(t)}{t} \xrightarrow{\text{s.j.}} \frac{1}{\mu} \quad \text{ako} \quad t \to \infty.$$

Věta (CLT)

Ak navyše platí $\operatorname{Var} X_1 = \sigma^2 < \infty$, potom

$$\frac{\tau(t) - t/\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{ako } t \to \infty.$$

Děkujeme za pozornost.