

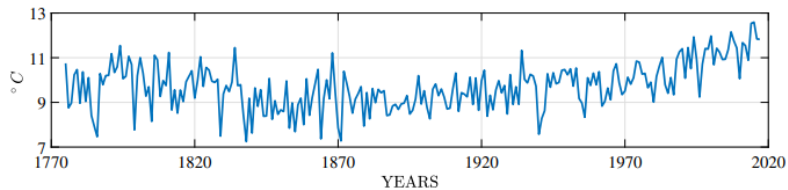
Change point analýza časové řady teploty z Klementina

Tomáš Laube, Alexander Terkovič

Statistický seminář

29. 4. 2025

Graf teploty pre Klementinum



Testovanie pre jeden changepoint

$$H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_n.$$

$$A_1 : \exists k \in \{1, \dots, n-1\} : \mu_1 = \dots, \mu_k \neq \mu_{k+1} = \dots = \mu_n.$$

$$A_2 : \exists k \in \{1, \dots, n-1\} : \mu_1 = \dots = \mu_k,$$

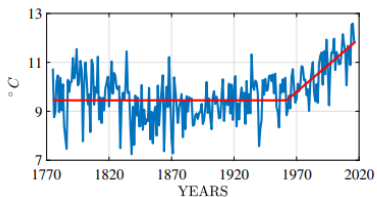
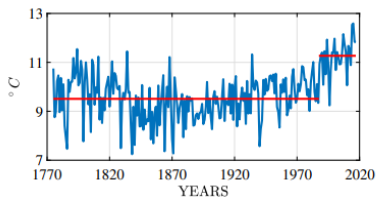
$$\mu_{k+i} = \mu_k + b \cdot \frac{i}{n}, \text{ pre } i = 1, \dots, n-k.$$

Dvojvýberová štatistika

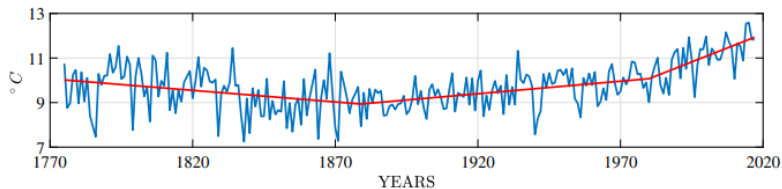
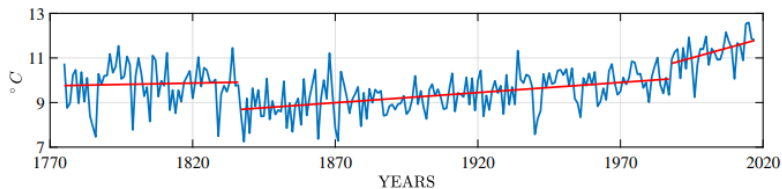
$$T = \frac{1}{\hat{\sigma}} \sqrt{\frac{k(n-k)}{n}} |\bar{Y} - \bar{Y}^*|$$

$$\tilde{T} = \frac{1}{\hat{\sigma}} \frac{\sum_{i=k+1}^n (Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{(n-k)(n-k+1)(2n-2k+1)}{6} - \frac{(n-k)^2(n-k+1)^2}{4n}}}$$

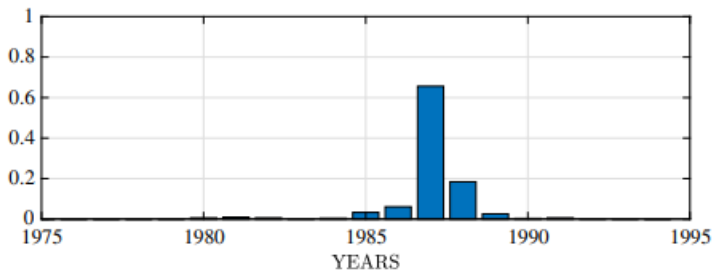
Jeden changepoint



Dva changepointy



Rozdelenie changepointu



Model pro denní teplotu

$$D_{ij} = v_i + \delta_{ij} + \epsilon_{i,j}$$

D_{ij} je pozorovaná denní teplota,

v_i je průměrná teplota v i -tém roce,

δ_{ij} je odchylka od průměrné roční teploty,

ϵ_{ij} je chybový člen, navíc předpokládáme $E \epsilon_{ij} = 0, \forall i, j$

Testování náhlé změny ve střední hodnotě

Model:

$$X_{ij} = \mu_{ij} + e_{ij},$$

kde $E \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$, $\text{Var } \mathbf{e}_i = \mathbf{\Sigma}$ a $\mathbf{e}_i$ jsou iid.

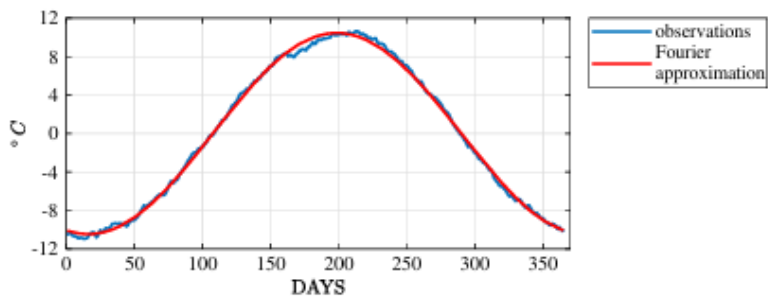
Nulová hypotéza $H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_n$

Alternativa $A : \exists k \in \{1, \dots, n\} : \mu_1 = \dots = \mu_k \neq \mu_{k+1} = \dots = \mu_n$

Testová statistika pro k známé:

$$\chi^2(k) = \frac{k(n-k)}{n} \left(\bar{\mathbf{X}}(k) - \bar{\mathbf{X}}^*(k) \right)^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \left(\bar{\mathbf{X}}(k) - \bar{\mathbf{X}}^*(k) \right)$$

Periodické chování teplotních odchylek



Testy s Fourierovou aproximací

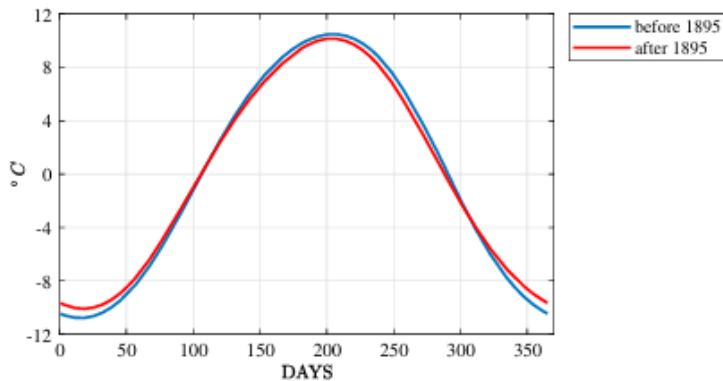
Statistic	1 freq.	2 freq.	3 freq.
T	23.58 (3.8×10^{-4})	28.40 (3.6×10^{-4})	34.27 (1.6×10^{-4})
TW	5.90 (10^{-4})	7.10 (2×10^{-5})	8.67 (4×10^{-5})
MW	2.12 (10^{-4})	2.54 (8×10^{-5})	3.30 (6×10^{-5})
max-min difference before $k^* = 121$	21.6	21.6	21.3
max-min difference after $k^* = 121$	20.3	20.3	20.3

Testy s metodou hlavních komponent a s měsíčními odchylkami

Test statistic	3 eig. v.	4 eig. v.	5 eig. v.
<i>T</i>	19.50 (0.0068)	28.94 (3.2×10^{-4})	29.07 (5.2×10^{-4})
<i>TW</i>	4.87 (0.0013)	7.23 (2×10^{-5})	7.27 (4×10^{-5})
<i>MW</i>	1.76 (0.0012)	2.55 (1.2×10^{-4})	2.59 (2.6×10^{-4})

	Test statistic		
	<i>T</i>	<i>TW</i>	<i>MW</i>
Value of test statistic	43.55	10.88	4.53
<i>p</i> Value	(2.4×10^{-4})	(2.0×10^{-5})	(1.2×10^{-4})

Odhad pro denní odchylky před a po changepointu



Děkujeme za pozornost