

Pravděpodobnostní a statistické problémy (NMSA160)

Přednáška

1. definice pravděpodobnosti

- historické poznámky:
 - Cardano – aspoň jeden líc na dvou mincích
 - Galilei – součet ok na třech kostkách
 - Fermat a Pascal – problém Chevaliera de Méré, úloha o rozdělení sázky
 - Huygens
 - Newton – Newtonův-Pepysův problém
 - Bernoulli, de Moivre
- klasická definice pravděpodobnosti
- Kolmogorova definice pravděpodobnosti, základní vlastnosti

2. kombinatorické pravděpodobnosti

- aspoň jeden líc na dvou mincích
- počet pokusů do dosažení prvního líce
- součet ok na třech kostkách
- urnové modely:
 - uspořádaný výběr s vracením (variace s opakováním)
 - neuspořádaný výběr s vracením (kombinace s opakováním)
 - uspořádaný výběr bez vracení (variace bez opakování)
 - neuspořádaný výběr bez vracení (kombinace bez opakování)
- Star Raiders
- vlastnosti pravděpodobnosti:
 - doplňková pravděpodobnost
 - věta o sčítání pravděpodobností
 - pravděpodobnost sjednocení dvou jevů
 - princip inkluze a exkluze

3. princip inkluze a exkluze, nezávislost

- problém šatnářky
- pravděpodobnost prázdné přihrádky v klasických modelech s přihrádkama (Maxwellův-Boltzmannův model, Boseův-Einsteinův model)
- nezávislost jevů
- ruská ruleta – různé varianty
- vybírat s vracením nebo bez vracení?

4. geometrická pravděpodobnost

- Buffonova úloha o minci
- Buffonova úloha o jehle
- Bertrandův paradox
- problém tří bodů (náhodný trojúhelník)
- problém tří bodů na kružnici

5. podmíněná pravděpodobnost

- výběr z osudí bez vracení a s vracením
- vlastnosti podmíněné pravděpodobnosti
- dvojchyba v tenise
- nesprávné úvahy s podmíněnými pravděpodobnostmi:
 - střízliví řidiči častěji viníky dopravních nehod
 - Kaighův paradox
 - lidé se s rostoucím věkem stávají šťastnější
 - Simpsonův paradox
 - kominíkovo alibi
 - prokurátorův blud
 - Monty Hallův problém

6. Bayesova věta

- věta o úplné pravděpodobnosti
- Bayesova věta
- papež pravděpodobně není mimozemšťan
- lékařská diagnostika
- vyšetření těhotných žen

7. diskrétní náhodné veličiny

- definice celočíselné náhodné veličiny
- příklady – počet líců na dvou mincích, součet ok na třech kostkách, počet výstřelů v ruské ruletě
- definice střední hodnoty
- sázka na součet ok na dvou kostkách
- Petrohradský paradox
- ruleta – martingalová strategie
- definice rozptylu

8. příklady diskrétních rozdělání

- výpočet rozptylu, sázka na součet ok na dvou kostkách
- bernoulliiovské pokusy
- binomické rozdělání:
 - Newtonův-Pepysův problém
 - přeobsazenost letadla
 - střední hodnota
- Poissonovo rozdělání:
 - střední hodnota
 - dvě výhry jackpotu během krátké doby
 - stírací losy

9. úlohy o výpočtu střední hodnoty

- pravidla pro počítání se střední hodnotou:
 - střední hodnota lineární kombinace
 - střední hodnota součtu – jiný způsob určení střední hodnoty binomického rozdělání
- problém šatnářky – střední počet správně vydaných kabátů
- věta o úplné střední hodnotě
- úloha o kloboucích
- problém sběratele kupónů
- střední hodnota geometrického rozdělání

10. náhodná procházka

- symetrická náhodná procházka na celých číslech:
 - rozdělání polohy částice
 - dosažení libovolné bariéry s pravděpodobností 1
 - návrat do počátku v konečném čase
 - střední doba čekání na návrat do počátku je nekonečná
- symetrická náhodná procházka ve více dimenzích

11. ruinování hráče a rekordy

- ruinování hráče – náhodná procházka s absorpčními bariérami
- náhodná procházka s jednou absorpční bariérou
- rekordy:
 - střední hodnota počtu rekordů
 - pravděpodobnost výskytu r rekordů
 - doba výskytu druhého rekordu – výpočet rozdělání, nekonečná střední hodnota

12. rekordy a optimalizační úlohy

- rozdělení doby výskytu r -tého rekordu, medián
- doba mezi dvěma rekordy
- problém výběru partnera
- rezervace míst v letadle

13. normální rozdělení, testování hypotéz

- Galtonovo prkno
- de Moivreova-Laplaceova lokální věta
- normální rozdělení
- testování symetrie mince
- studentská kolej

Cvičení

Kombinatorické pravděpodobnosti

- problém Chevaliera de Méré
- úloha o rozdělení sázky
- Newtonův-Pepysův problém
- narozeninový problém – hledání párů
- narozeninový problém – hledání oslavence
- skoro narozeniny
- narozeninová dovolená
- hazardní hry
- náhodné setkání
- ponožkový problém
- úloha o vadných fotoaparátech
- loterijní problém
- lehkovážný porotce

Geometrická pravděpodobnost

- úloha o setkání
- kulička vrhána na mříž z válcových prutů
- řezání tyče
- rozdělení úsečky a sestavení trojúhelníku

- součet a součin náhodných čísel
- částice z kotouče má zasáhnout úsečku

Nezávislost, podmíněná pravděpodobnost

- korektury
- favoriti dostihu
- úloha o zapomenutém deštníku
- Bertrandův zásuvkový paradox
- věžňovo dilema
- úloha o výstředním žalárníkovi
- diagnostika při výběru z osudí
- úloha o dopravní nehodě
- lékařská diagnostika

Diskrétní náhodné veličiny

- počet her v úloze o rozdělení sázky
- placení obědů
- hra Chuck-a-Luck
- souboj proti silnějšimu

Úlohy o výpočtu střední hodnoty

- různé narozeniny
- shoda narozenin
- úloha o lovení bažantů
- úloha o řadě v divadle
- Bernoulliho úloha

Náhodná procházka, ruinování hráče

- opilec před útesem
- tenis
- jak sázet, když musíme
- vlk a ovečky

Optimalizační úlohy

- soubory krevních vzorků