Řešení zápočtové písemky z 16. 5. 2002

1. Máme určit n tak, aby
$$P(|\nu_n - p| \leq 0{,}01) \geq 0{,}95.$$
Náhodná veličina $n\nu_n$ má binomické rozdělení s parametry n a p. Podle Moivreovy-Laplaceovy integrální věty je
$$\lim_{n\to\infty} P\left[a < \frac{n\nu_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right] = \Phi(b) - \Phi(a),$$
kde $\Phi(z)$ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení. Úpravami dostaneme
$$P(|\nu_n - p| \leq 0{,}01) = P(-0{,}01n \leq n\nu_n - np \leq 0{,}01n) = P\left(-\frac{0{,}01n}{\sqrt{npq}} \leq \frac{n\nu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{0{,}01n}{\sqrt{npq}}\right).$$
Nyní použijeme aproximaci z Moivreovy-Laplaceovy věty
$$P(|\nu_n - p| \leq 0{,}01) \doteq \Phi\left(\frac{0{,}01n}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(-\frac{0{,}01n}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{0{,}01n}{\sqrt{npq}}\right) - 1.$$
a můžeme určit hledané n:
$$\begin{aligned}
P(|\nu_n - p| \leq 0{,}01) &\geq 0{,}95 \\
2\Phi\left(\frac{0{,}01n}{\sqrt{npq}}\right) - 1 &\geq 0{,}95 \\
\Phi\left(\frac{0{,}01}{\sqrt{0{,}21}}\sqrt{n}\right) &\geq 0{,}975 \\
\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{21}} &\geq z(0{,}025) \\
n &\geq 2100 \cdot 1{,}96^2 = 8067{,}36.
\end{aligned}$$
Musíme provést aspoň 8068 pokusů.

2. Náhodná veličina $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ má Studentovo t-rozdělení s n stupni volnosti. Protože
$$P(|T| \geq t_n(\alpha)) = \alpha,$$
musí být $k = \frac{t_{20}(0{,}05)}{\sqrt{20}} = 0{,}466$.

3. Veličiny naměřené před seřízením označíme X_j a veličiny naměřené po seřízení Y_j. Protože oba výběry jsou nezávislé, použijeme dvouvýběrový t-test. Z uvedených dat vypočteme aritmetické průměry $\bar{X} = 249{,}5$ a $\bar{Y} = 250$. Dále vypočteme $\sum_{j=1}^{11}(X_j - \bar{X})^2 = 116{,}32$ a $\sum_{j=1}^{6}(Y_j - \bar{Y})^2 = 2{,}36$. Testová statistika je
$$T = \frac{249{,}5 - 250}{\sqrt{(116{,}32 + 2{,}36)/(11 + 6 - 2)}}\sqrt{\frac{11 \cdot 6}{11 + 6}} = -0{,}35,$$
což je v absolutní hodnotě méně než kritická hodnota $t_{15}(0{,}05) = 2{,}131$, takže na hladině 5% nulovou hypotézu nezamítáme.