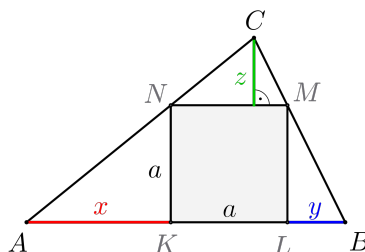


Vstupní test - zadání

- 1) Do trojúhelníku ABC je vepsán čtverec $KLMN$, jehož strana KL leží na straně AB trojúhelníku, vrcholy M, N leží po řadě na stranách BC, CA trojúhelníku. Vyjádřete obsah čtverce $KLMN$ v závislosti na délkách x, y, z (viz obrázek).



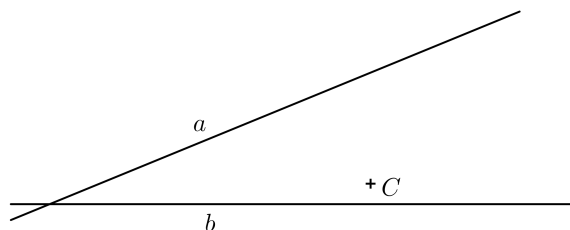
Řešení: Z rovnoběžnosti přímek AB a MN vyplývá rovnost velikostí úhlů CAB, CNM . Trojúhelníky ABC a NMC jsou podobné podle věty (uu). Označme a délku strany čtverce a dejme do poměru základnu a výšku v obou podobných trojúhelnících:

$$\frac{z + a}{x + a + y} = \frac{z}{a}$$

Po úpravě dostáváme hledaný vztah:

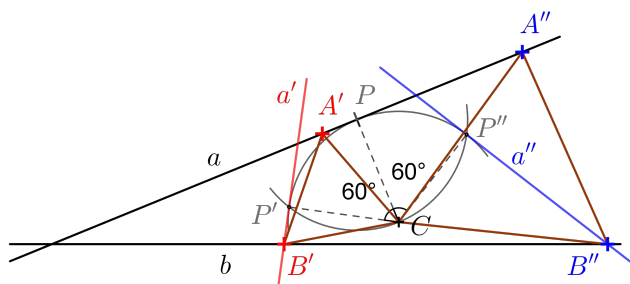
$$a^2 = z(x + y)$$

- 2) Jsou dány dvě různoběžky a, b a bod C neležící na žádné z nich (viz obrázek). Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak aby $A \in a, B \in b$.



Řešení:

Hledané vrcholy rovnostranného trojúhelníku si odpovídají v otočení se středem C o úhel $\pm 60^\circ$. Najdeme obrazy a', a'' přímky a v daných rotacích, hledaný bod B najdeme jako průsečík přímky b s otočenou polohou přímky a . Úloha má dvě řešení.



- 3) Diskutujte vzájemnou polohu přímek a , b v závislosti na reálném parametru s .

$$a: 3sx - 4y = 0$$

$$b: x + y - s = 0$$

Řešení:

Z rovnic přímek určíme normálové vektory obou přímek a zjistíme, pro jaké hodnoty parametru s jsou tyto vektory lineárně závislé:

$$\vec{n}_a = (3s, -4), \vec{n}_b = (1, 1)$$

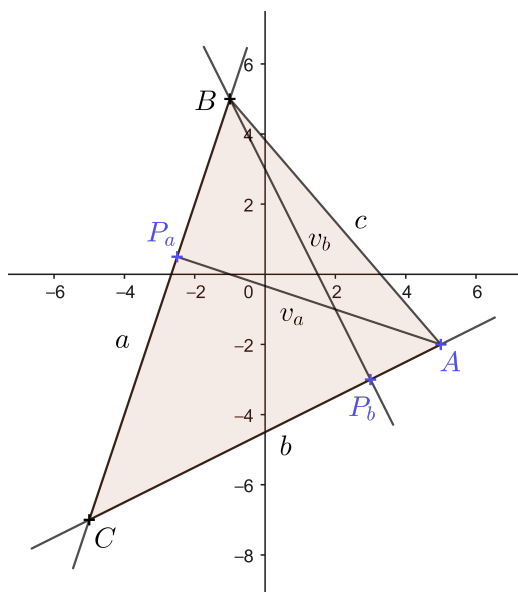
$$\vec{n}_a \vec{n}_b \perp \Leftrightarrow s = -\frac{4}{3}$$

Pro $s = -\frac{4}{3}$ mají rovnice tvar $a: -4x - 4y = 0, b: x + y + \frac{4}{3} = 0$, přímky jsou tedy rovnoběžné různé. Pro $s \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{4}{3}\}$ jsou přímky různoběžné.

- 4) Určete souřadnice vrcholů B , C trojúhelníku ABC , jestliže jsou dány souřadnice vrcholu $A = [5; -2]$ a pat výšek $P_a = [-2,5; 0,5]$, $P_b = [3; -3]$.

Řešení:

Vrchol C trojúhelníku ABC je průsečíkem přímky b určené body A, P_b a přímky a vedené bodem P_a kolmo ke spojnici AP_a . Vrchol B dopočítáme jako průsečík přímky a s kolmicí v_b vedenou bodem P_b k přímce AC .



$$b: x - 2y - 9 = 0$$

$$a: 3x - y + 8 = 0$$

$$C = [-5, -7]$$

$$v_b: 2x + y - 3 = 0$$

$$B = [-1, 5]$$

- 5) V rovině je dána kuželosečka s obecnou rovnicí $3x^2 + y^2 = 36$. Nalezněte její tečny svírající s osou x úhel o velikosti 30° .

Řešení: Přímky, které svírají s osou x úhel 30° lze vyjádřit rovnicí

$$y = \pm \tan(30^\circ)x + c$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x + c$$

Dosadíme-li za y z rovnice tečny do rovnice kuželosečky, dostaneme kvadratickou rovnici s jednou neznámou x .

$$3x^2 + \frac{1}{3}x^2 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}cx + c^2 = 36$$

$$10x^2 \pm 2\sqrt{3}cx + 3c^2 - 3 \cdot 36 = 0$$

Je-li přímka tečnou kuželosečky, pak má s kuželosečkou jediný společný bod, diskriminant uvedené kvadratické rovnice musí být tedy nulový.

$$D = 12c^2 - 4 \cdot 10(3c^2 - 3 \cdot 36) = 9 \cdot 12 \cdot (40 - c^2) = 0 \Leftrightarrow c = \pm 2\sqrt{10}$$

Tečny jsou tedy čtyři a jejich rovnice mají tvar:

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x \pm 2\sqrt{10}$$

- 6) V prostoru nalezněte přímku p , která prochází bodem Q , je rovnoběžná s rovinou ρ a je kolmá k přímce q , je-li: $Q = [2, -1, 4]$, $\rho: 3x + 2y - z + 6 = 0$, $q: x = 2t, y = 1 + 4t, z = t, t \in \mathbb{R}$.

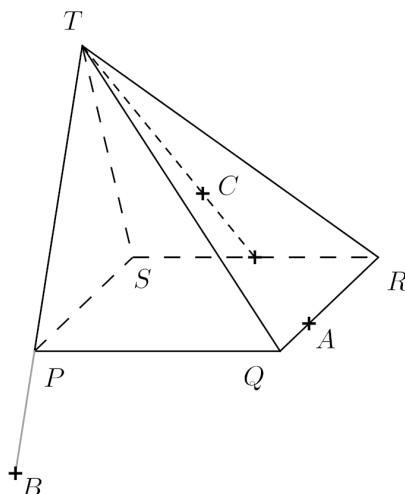
Řešení:

Směrový vektor hledané přímky je kolmý ke směrovému vektoru přímky q , současně je kolmý k normálovému vektoru roviny ρ (plyne z rovnoběžnosti $p \parallel \rho$). Můžeme jej spočítat pomocí vektorového součinu obou vektorů:

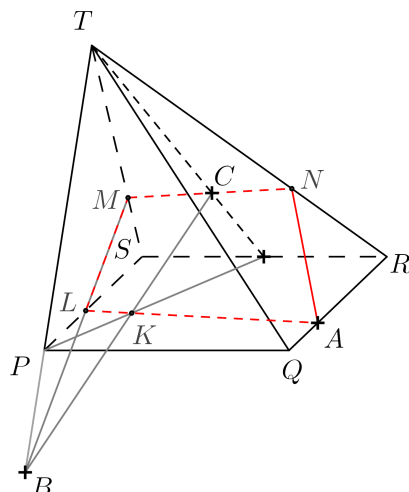
$$\vec{s}_p = \vec{s}_q \times \vec{n}_\rho = (2, 4, 1) \times (3, 2, -1) = (-6, 5, -8)$$

$$p: x = 2 - 6s, y = -1 + 5s, z = 4 - 8s, s \in \mathbb{R}$$

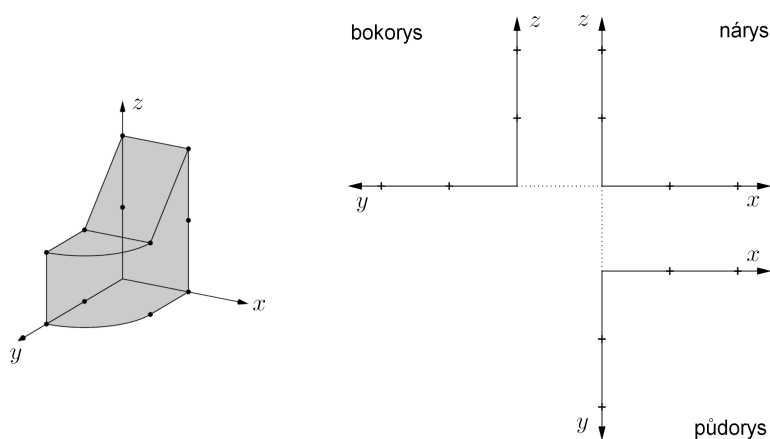
- 7) Sestrojte řez jehlanu $PQRST$ rovinou ABC (viz obrázek).



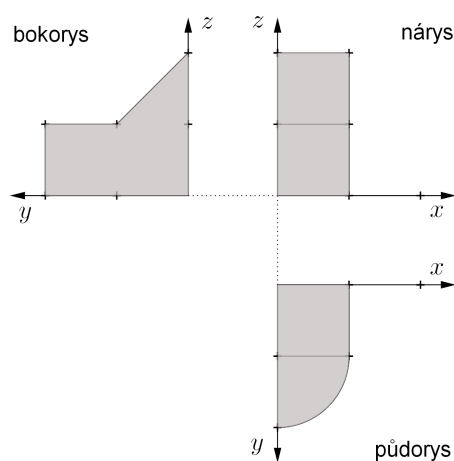
Řešení:



8) Načrtněte pravoúhlé průměty do souřadnicových rovin, včetně všech viditelných hran.



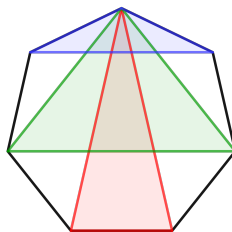
Řešení:



- 9) Jaký je počet všech rovnoramenných trojúhelníků, které mají všechny vrcholy ve vrcholech pravidelného sedmiúhelníku?

Řešení:

Existují tři typy rovnoramenných trojúhelníků, vepsaných do pravidelného sedmiúhelníku, hlavní vrchol každého z nich lze zvolit sedmi způsoby, takových trojúhelníků je tedy $3 \cdot 7 = 21$.



- 10) Určete počet všech pěticeforných čísel, v jejichž zápisu je každá z číslic 0, 2, 4, 5, 7. Kolik z těchto čísel je: a) dělitelných šesti, b) větších než 50 000?

Řešení:

Počet všech způsobů, jak uspořádat 5 číslic, je $5!$. Čísla s nulou na začátku však nejsou pěticeforná, musíme je odečíst:

$$5! - 4! = 96$$

a) Ciferný součet číslic 0, 2, 4, 5, 7 je 18, všechna takto sestavená čísla jsou tedy dělitelná třemi. Aby byla zároveň sudá, musí mít na konci 0, 2 nebo 4. V číslech končících nulou můžeme zbylé číslice uspořádat libovolně, je jich tedy $4!$, v číslech končících dvojkou a čtyřkou nesmí být na začátku nula. Na první pozici máme tedy již jen 3 možnosti a na zbývajících tři pozice máme $3!$ možností.

$$4! + 3 \cdot 3! + 3 \cdot 3! = 60$$

b) Na první pozici smí být jen 2 čísla – 5 nebo 7, na zbývajících pozicích můžeme číslice rozmístit libovolně:

$$2 \cdot 4! = 48$$