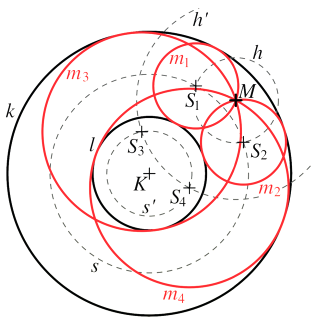
Vlasta Moravcová & Jana Hromadová

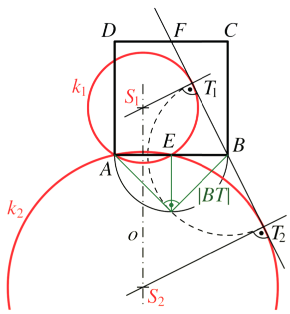
SBÍRKA ÚLOH

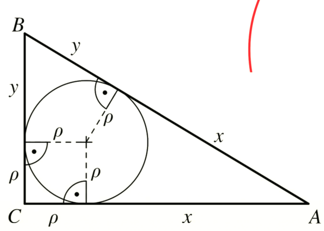
K

ZÁKLADŮM PLANIMETRIE

PRO UČITELSKÉ STUDIUM







Vydání publikace bylo podpořeno vzdělávacím projektem MŠMT Příspěvek P na podporu pedagogických studijních programů s deficitními aprobacemi, 2023.

Recenzoval: doc. RNDr. Leo Boček, CSc.

Sbírka úloh k Základům planimetrie pro učitelské studium
Vlasta Moravcová, Jana Hromadová

Vydal MatfyzPress,
nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy,
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8,
jako svou 682. publikaci (tištěná verze), 683. publikaci (e-kniha – PDF verze).

Sazba v systému LaTeX (Vlasta Moravcová)
Tisk Reprostředisko MFF UK

Publikace byla vydána pro potřeby Katedry didaktiky matematiky MFF UK.
Nakladatelství MatfyzPress neodpovídá za kvalitu a obsah textu.
Publikace není určena k prodeji.

Praha 2023

© V. Moravcová, J. Hromadová, 2023
© MatfyzPress, nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy, 2023

ISBN 978-80-7378-488-1 (tištěná verze)
ISBN 978-80-7378-489-8 (e-kniha – PDF verze)

Obsah

Předmluva

Tato publikace doplňuje učební text *Základy planimetrie pro učitelské studium*[1] a spolu s ním tvoří základní studijní materiál k stejnojmennému předmětu vyučovanému v prvním ročníku učitelského studia na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy.

Sbírka je věnována úlohám, jejichž zadání jsou uvedena na koncích jednotlivých kapitol výše zmíněné práce *Základy planimetrie pro učitelské studium*, čemuž odpovídá i její členění na kapitoly. Pro každou úlohu je zde připomenuto zadání a uveden návod k řešení a výsledek. Je-li úloha důkazová, podáváme jako výsledek stěžejní argumenty důkazu, přičemž v poslední kapitole jsou důkazy záměrně provedeny podrobněji. U konstrukčních úloh prezentujeme jako výsledek obrázek s požadovanou konstrukcí. V mnoha případech je možné úlohu řešit několika způsoby, návod však podáváme vždy jen pro jeden z nich.

Návody k řešení záměrně nejsou rozepsané zcela podrobně, naším cílem je studentům pouze napovědět, jakou cestou je možné se ubírat, jelikož jsme přesvědčeny, že nejvíce se studenti naučí tím, že řešení objeví sami. Se sbírkou tedy čtenářům doporučujeme pracovat tak, že si nejprve přečtou pouze zadání úlohy a pokusí se ji vyřešit sami. Pokud si neví rady nebo se jejich výsledek neshoduje s výsledkem uvedeným v textu, pak teprve doporučujeme prostudovat návod k úloze a pokusit se ji vyřešit znovu dle tohoto návodu.

V návodech a výsledcích se, není-li řečeno jinak, odkazujeme pomocí čísel stran na definice, věty a poznámky uvedené v učebnici *Základy planimetrie pro učitelské studium*. Stejně tak vycházíme i ze značení a zkratek, jejichž seznamy jsou na str. 237–239 téže práce. Úlohy byly čerpány ze zdrojů uvedených na str. 240–241 tamtéž a také z vlastních, za léta sestřádaných zdrojů. Zadání úloh 1.4, 3.5, 6.2, 6.10, 7.10, 9.13, 9.23, 13.2 a 13.7 jsou zde, v zájmu jejich zpřesnění, oproti původnímu znění mírně modifikována.

Věříme, že předložený text pomůže studentům při studiu a celkově přispěje ke zkvalitnění přípravy budoucích učitelů matematiky.

Autorky

[1] Moravcová, V., & Hromadová, J. (2021). *Základy planimetrie pro učitelské studium.* Matfyzpress. Dostupné on-line: <`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~morava/Zaklady_planimetrie.pdf`>.

1 Základní pojmy

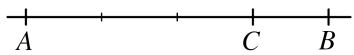
1.1 V rovině je dáno n různých bodů, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. Kolik přímek je těmito body určeno?

Návod: Každé dva různé body určují právě jednu přímku; přímek je tedy tolik, kolika způsoby můžete vybrat dvojici různých bodů z n bodů.

Výsledek: $\binom{n}{2}$, tj. $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

1.2 Pro kolineární body A, B, C platí $(ABC) = -3$. Určete hodnoty (ACB), (BCA) a (BAC).

Návod: Umístěte na přímku body A, B, C libovolně tak, aby $(ABC) = -3$ (viz *dělicí poměr kolineárních bodů*, str. 20), a uvědomte si, jaké jsou poměry vzdáleností jednotlivých dvojic bodů (obr. 1.1).



Obrázek 1.1

Výsledek: $(ACB) = 4$; $(BCA) = \dfrac{4}{3}$; $(BAC) = -\dfrac{1}{3}$.

1.3 Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:

(a) Průnikem dvou trojúhelníků není konvexní množina.

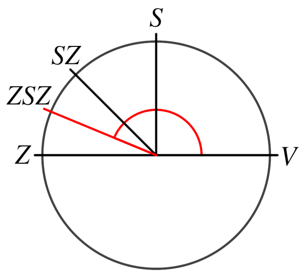
(b) Osa dutého úhlu rozdělí daný úhel na dva ostré úhly.

Návod: (a) Zamyslete se, zda je libovolný trojúhelník komplexní množinou, a aplikujte větu 1.1 (str. 14). (b) Uvědomte si, v jakém intervalu leží velikost libovolného dutého úhlu a v jakém intervalu leží velikost libovolného ostrého úhlu.

Výsledek: (a) Neplatí. (b) Platí.

1.4 Určete velikost konvexního úhlu, který na kompasu svírají směry V a ZSZ. Výsledek zapište v míře stupňové (°), obloukové (rad) i setinné (g).

Návod: Na kružnici vyznačte základní směry sever (S), východ (V), západ (Z) a dále severozápad (SZ) jako střed Z a S a západoseverozápad (ZSZ) jako střed Z a SZ (obr. 1.2). Vyjděte od velikosti přímého úhlu, který svírají směry V a Z.



Obrázek 1.2

Výsledek: 157,5°, $\dfrac{7\pi}{8}$ rad, 175 g.

2 Trojúhelník

2.1 Jsou dány délky dvou stran trojúhelníku KLM: $k = 27\,\mathrm{cm}$, $l = 39\,\mathrm{cm}$. Jakým podmínkám musí vyhovovat délka strany m?

Návod: Využijte *trojúhelníkovou nerovnost* (viz ZT 9, str. 25).

Výsledek: $m \in (12; 66)$, hodnoty jsou uvedeny v cm.

2.2 V jakých trojúhelnících leží průsečík těžnic, výšek, os stran, os úhlů uvnitř/na obvodu/vně trojúhelníku? Kdy tyto body splývají?

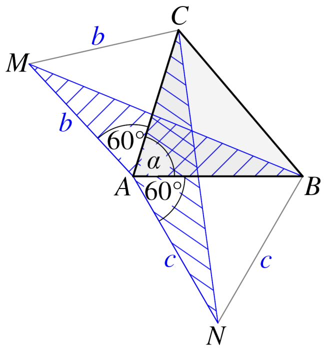
Návod: Uvažujte postupně jednotlivé typy trojúhelníků dle délek stran a velikostí vnitřních úhlů a vycházejte z definice těžnice (str. 35), výšky (str. 38), osy strany a osy úhlu trojúhelníku (str. 36). Jednotlivé situace si načrtněte.

Výsledek: Těžiště a průsečík os úhlů leží vždy uvnitř trojúhelníku. Průsečík výšek, stejně jako průsečík os stran, leží uvnitř každého ostroúhlého trojúhelníku, vně každého tupoúhlého trojúhelníku a na hranici každého pravoúhlého trojúhelníku. Pro různostranný a rovnoramenný trojúhelník nelze polohu průsečíku výšek ani os stran obecně stanovit, neboť tyto trojúhelníky mohou být ostroúhlé, tupoúhlé i pravoúhlé. Uvedené body splývají v rovnostranném trojúhelníku.

2.3 Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Nad jeho stranami AC a AB jsou vně trojúhelníku ABC sestrojeny rovnostranné trojúhelníky ACM a ANB. Dokažte, že $|BM| = |CN|$.

Návod: Hledejte shodné prvky v trojúhelnících ABM a ANC (obr. 2.1).

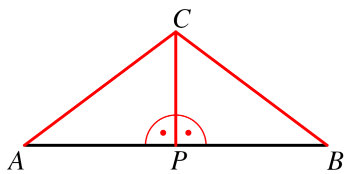
Výsledek: $|BM| = |CN|$, neboť $\triangle ABM \simeq \triangle ANC$ podle věty *sus* (viz ZT 11, str. 29).



Obrázek 2.1

2.4 Dokažte, že výška rovnoramenného trojúhelníku kolmá k jeho základně dělí tento trojúhelník na dva shodné trojúhelníky.

Návod: Označte daný rovnoramenný trojúhelník ABC (se základnou AB) a patu výšky k základně P (obr. 2.2). V trojúhelnících APC, BPC hledejte shodné prvky, využijte definici rovnoramenného trojúhelníku (str. 31).



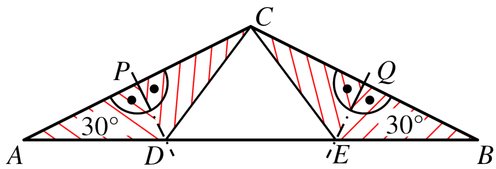
Obrázek 2.2

Výsledek: Trojúhelníky APC, BPC jsou shodné podle věty Ssu (viz ZT 13, str. 29), neboť $|AC| = |BC|$, $|\sphericalangle APC| = |\sphericalangle BPC| = 90°$ a stranu PC mají společnou.

2.5 V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou AB je velikost úhlu α rovna $30°$. Dokažte, že osy ramen tohoto trojúhelníku rozdělují jeho základnu AB na tři shodné díly.

Návod: Označte D průsečík základny AB s osou strany AC a E průsečík základny AB s osou strany BC. Dále označte P, Q po řadě středy stran

AC, BC (obr. 2.3). Dokažte shodnost trojúhelníků ADP, BEQ, CDP, CEQ a uvědomte si, co z toho plyne pro trojúhelník DEC.



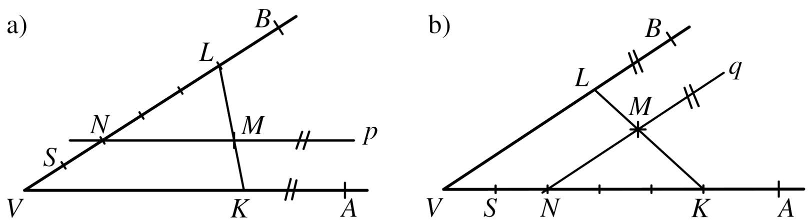
Obrázek 2.3

Výsledek: Ze shodnosti trojúhelníků ADP, BEQ, CDP, CEQ podle vět *sus* a *usu* (viz ZT 11 a 12, str. 29) vyplývá, že $|\sphericalangle DCE| = 60°$. Z toho, že trojúhelník DEC je rovnostranný, vyplývá, že $|AD| = |DE| = |EB|$.

2.6 Vnitřním bodem M konvexního úhlu AVB veďte přímku m tak, aby úsečka KL, kde $K = m \cap \longmapsto VA$, $L = m \cap \longmapsto VB$, byla bodem M dělena v poměru $2 : 3$.

Návod: Bodem M veďte přímku p rovnoběžnou s polopřímkou VA, průsečík přímky p s polopřímkou VB označte N. Na polopřímce VB sestrojte bod L tak, aby $|VN| : |NL| = |KM| : |ML|$.

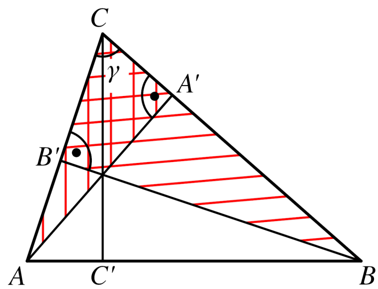
Výsledek: Úloha má dvě řešení. Pro $|KM| : |ML| = 2 : 3$ stačí sestrojit střed S úsečky VN a poté pro bod L platí, že $|VL| = 5|VS|$ (obr. 2.4a). Pro $|KM| : |ML| = 3 : 2$ buď s využitím redukčního úhlu (viz str. 130) rozdělte úsečku VN na tři shodné úsečky délky d, potom $|VL| = 5d$; nebo bodem M veďte rovnoběžku q s polopřímkou VB (namísto VA) a postupujte analogicky jako v prvním řešení (obr. 2.4b).



Obrázek 2.4

2.7 Dokažte, že v trojúhelníku ABC platí: $v_a : v_b : v_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

Návod: Označte A', B', C' po řadě paty výšek v_a, v_b, v_c a využijte podobnost trojúhelníků $AA'C$, $BB'C$, resp. $BB'A$, $CC'A$, podle věty *uu* (viz ZT 16, str. 30) (obr. 2.5).

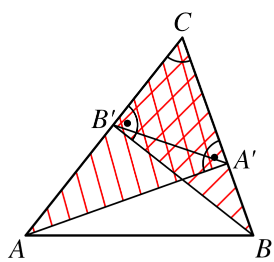


Obrázek 2.5

Výsledek: Z uvedených podobností získáte vztahy $\frac{v_a}{v_b} = \frac{b}{a}$ a $\frac{v_b}{v_c} = \frac{c}{b}$, odkud už plyne dokazované tvrzení.

2.8 Dokažte, že spojnice pat dvou výšek ostroúhlého trojúhelníku odděluje z něho trojúhelník danému trojúhelníku podobný.

Návod: Označte daný trojúhelník ABC a búno uvažujte jeho výšky v_a, v_b, jejichž paty označte po řadě A', B' (obr. 2.6). Využijte toho, že trojúhelníky $AA'C$, $BB'C$ jsou podobné.

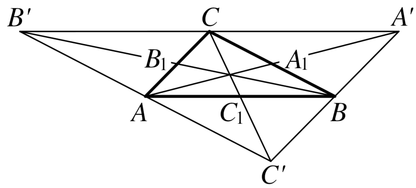


Obrázek 2.6

Výsledek: Trojúhelníky $AA'C$, $BB'C$ jsou podobné podle věty *uu* (viz ZT 16, str. 30). Odtud plyne, že $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|A'C|}{|B'C|}$, navíc $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle A'CB'|$. Trojúhelníky ABC, $A'B'C$ jsou tedy podobné podle věty *sus* (viz ZT 15, str. 30).

2.9 Dokažte, že v trojúhelníku ABC platí: $\frac{1}{2}(a+b+c) < t_a+t_b+t_c < a+b+c$.

Návod: K důkazu první nerovnosti využijte *trojúhelníkovou nerovnost* (viz ZT 9, str. 25) v trojúhelnících ABA_1, BCB_1, CAC_1, kde body A_1, B_1, C_1 jsou po řadě středy stran a, b, c trojúhelníku ABC. Druhá nerovnost plyne z aplikace *trojúhelníkové nerovnosti* na trojúhelníky ABA', BCB', CAC', kde body A_1, B_1, C_1 jsou po řadě středy $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ (obr. 2.7).



Obrázek 2.7

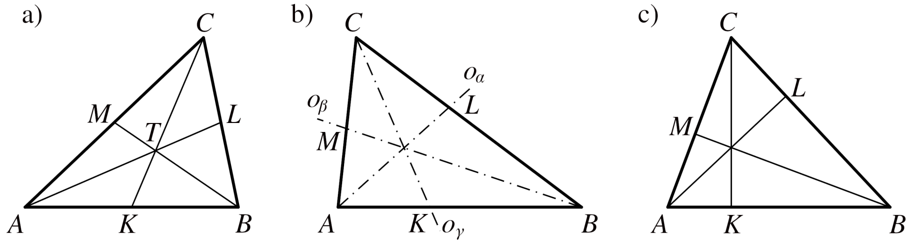
Výsledek: Součtem nerovnic $t_a + \frac{a}{2} > c$, $t_b + \frac{b}{2} > c$, $t_c + \frac{c}{2} > c$ získáte vztah $t_a+t_b+t_c > \frac{1}{2}(a+b+c)$. Součtem nerovnic $b+c > 2t_a$, $a+b > 2t_c$, $a+c > 2t_b$ obdržíte po úpravě vztah $a+b+c > t_a+t_b+t_c$.

2.10 Dokažte věty 2.9 (str. 35), 2.11 (str. 37) a 2.12 (str. 39) pomocí *Cèvovy*, resp. *Meneláovy věty* (tj. vět 2.14 a 2.13, str. 40).

Věta 2.9: Těžnice trojúhelníku se protínají v jednom bodě. Vzdálenost tohoto bodu od středu kterékoliv strany je rovna jedné třetině délky příslušné těžnice.

Návod: Označte daný trojúhelník ABC a středy stran AB, BC, CA, označte po řadě K, L, M. K důkazu první části tvrzení aplikujte na trojúhelník ABC *Cèvovu větu* (věta 2.14, str. 40), pro druhou část tvrzení aplikujte *Meneláovu větu* (věta 2.13, str. 40) např. na trojúhelník AKC a přímku BM. Pro další těžnice postupujte analogicky.

Výsledek: Body K, L, M jsou středy stran trojúhelníku, proto $(ABK) = (BCL) = (CAM) = -1$. Spojnice CK, AL, BM se tedy protínají v jediném bodě T (obr. 2.8a). Z *Meneláovy věty* pro trojúhelník AKC a přímku BM dostáváme $|(AKB) \cdot (KCT) \cdot (CAM)| = 2 \cdot |(KCT)| \cdot |-1| = 1$, tedy $|CT| : |KT| = 2 : 1$. Obdobně pro další těžnice.

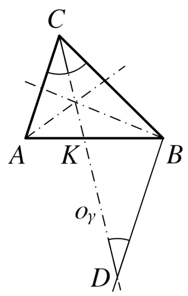


Obrázek 2.8

Věta 2.11: Osy vnitřních úhlů trojúhelníku jsou přímky téhož svazku.

Návod: Označte daný trojúhelník ABC a po řadě K, L, M průsečíky os vnitřních úhlů se stranami AB, BC, CA (obr. 2.8b). K důkazu využijte *Cèvovu větu* (věta 2.14, str. 40) a faktu, že osa vnitřního úhlu trojúhelníku dělí protější stranu v poměru délek přilehlých stran. Skutečnost, že např. bod K dělí stranu AB v poměru $b : a$ odvodíte z podobnosti trojúhelníků AKC, BKD (dle věty *uu*, viz ZT 16, str. 30), kde D je průsečík osy úhlu γ a rovnoběžky se stranou AC vedené bodem B. Dále si uvědomte, že trojúhelník CDB je dle věty 2.5 (str. 32) rovnoramenný (obr. 2.9).

Výsledek: Každý z bodů K, L, M náleží trojúhelníku ABC, dělicí poměry (ABK), (BCL) i (CAM) budou tedy záporné. Dále platí: $\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|BC|}{|AB|} = 1$. Osy vnitřních úhlů trojúhelníku nemohou být rovnoběžné, procházejí tedy jedním bodem.



Obrázek 2.9

Věta 2.12: Výšky trojúhelníku jsou přímky téhož svazku.

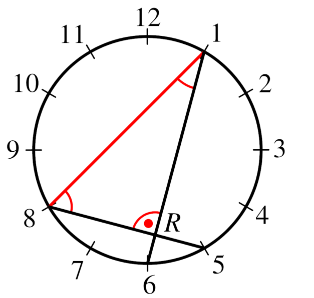
Návod: Uvažujte nejprve ostroúhlý trojúhelník, poté si vše promyslete i pro pravoúhlý a tupoúhlý trojúhelník. Označte daný trojúhelník ABC a paty jeho výšek na strany AB, BC, CA, označte po řadě K, L, M (obr. 2.8c). Vyhledejte v obrázku dvojice podobných trojúhelníků a z poměrů délek vhodných dvojic odpovídajících si stran odvoďte platnost dokazovaného tvrzení.

Výsledek: Z podobnosti trojúhelníků AKC a AMB plyne $|AK| : |AM| = |AC| : |AB|$, obdobně z podobnosti trojúhelníků BLA, BKC plyne $|BL| : |BK| = |BA| : |BC|$ a z podobnosti trojúhelníků CLA, CMB plyne $|CM| : |CL| = |CB| : |CA|$ (dle věty *uu*, viz ZT 16, str. 30). Body K, L i M náleží ostroúhlému trojúhelníku ABC, tedy všechny dělicí poměry budou záporné a stejně tak jejich součin. Vynásobením daných tří poměrů (násobíme zvlášť levé a pravé strany) odvodíme platnost dokazovaného tvrzení. V pravoúhlém trojúhelníku je platnost věty zřejmá, snadno nahlédneme, že výše uvedený postup neselže ani v tupoúhlém trojúhelníku, v němž pouze jedna z pat výšek náleží trojúhelníku a součin dělicích poměrů bude tedy stále záporný.

3 Kružnice, kruh

3.1 Dokažte, že spojnice bodů, které vyznačují na ciferníku hodinek 1, 6 a 5, 8, jsou k sobě kolmé.

Návod: Průsečík daných spojnic označte R. Pomocí věty 3.7 (str. 54) určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku *1R8* u vrcholů *1* a *8* (obr. 3.1).

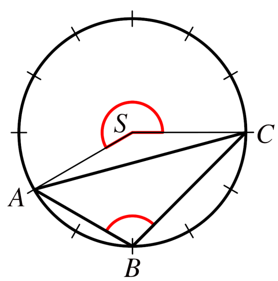


Obrázek 3.1

Výsledek: Velikost vnitřního úhlu u vrcholu *1* je 30°, u vrcholu *8* je velikost 60°. Z věty 2.2 (str. 27) plyne, že velikost úhlu u bodu R je 90°.

3.2 Do kružnice k je vepsán trojúhelník ABC. Body A, B, C dělí kružnici k na tři kružnicové oblouky, jejichž délky jsou v poměru 2 : 3 : 7. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.

Návod: Hledané velikosti úhlů určíte pomocí věty 3.7 (str. 54), úhel ABC je obvodovým úhlem příslušným ke středovému úhlu ASC, kde S je střed kružnice k, atd. (obr. 3.2).

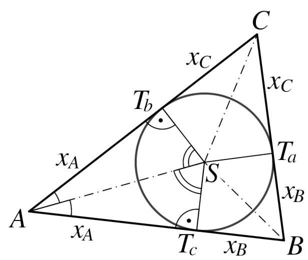


Obrázek 3.2

Výsledek: Vnitřní úhly mají velikost 45°, 105° a 30°.

3.3 Je dán trojúhelník ABC. Vyjádřete „délku tečny“ z bodu A ke kružnici vepsané trojúhelníku ABC v závislosti na délkách stran a, b, c.

Návod: Bod dotyku kružnice vepsané se stranou a, b, c trojúhelníku ABC označte po řadě T_a, T_b, T_c a střed kružnice vepsané označte S. „Délkou tečny“ z bodu A se rozumí $|AT_b|$, resp. $|AT_c|$, neboť ze shodnosti trojúhelníků AT_bS, AT_cS (podle věty *usu*, viz ZT 12, str. 29) plyne, že $|AT_b| = |AT_c|$. Označte x_A, x_B, x_C po řadě „délku tečny“ z bodu A, B, C (obr. 3.3) a vyjádřete délky a, b, c pomocí délek x_A, x_B a x_C. Ze získané soustavy tří lineárních rovnic pro tři neznámé (x_A, x_B, x_C) vyjádřete x_A.



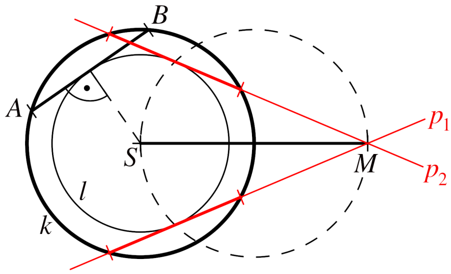
Obrázek 3.3

Výsledek: „Délka tečny“ z bodu A je rovna $\dfrac{b+c-a}{2}$.

3.4 Je dána kružnice $k(S, 4\text{ cm})$ a bod M, kde $|SM| = 8\,\text{cm}$. Bodem M veďte přímku p tak, aby délka tětivy, kterou přímka p vytíná na kružnici k, byla 5 cm.

Návod: Sestrojte libovolnou tětivu AB kružnice k dlouhou 5 cm. Dále sestrojte kružnici l soustřednou s kružnicí k tak, aby tětiva AB ležela na její tečně. Potom každá tětiva kružnice k dlouhá 5 cm leží na nějaké tečně kružnice l.

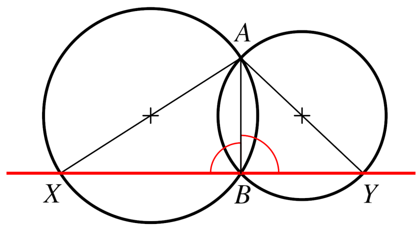
Výsledek: Přímka p je tečnou z bodu M ke kružnici l (konstrukce tečny z bodu ke kružnici viz str. 53). Úloha má dvě řešení (v obr. 3.4 přímky p_1, p_2).



Obrázek 3.4

3.5 Kružnice k, l se protínají v bodech A, B; body X, Y leží po řadě na kružnicích k, l tak, že AX a AY jsou průměry kružnic k, l. Dokažte, že body X, B, Y jsou kolineární.

Návod: Určete velikosti konvexních úhlů XBA, YBA (obr. 3.5). Užijte *Thalétovu větu* (věta 3.6, str. 51).



Obrázek 3.5

Výsledek: $|\sphericalangle XBA| = |\sphericalangle YBA| = 90°$, tedy $|\sphericalangle XBY| = 180°$.

3.6 Sestrojte chordálu dvou kružnic, které

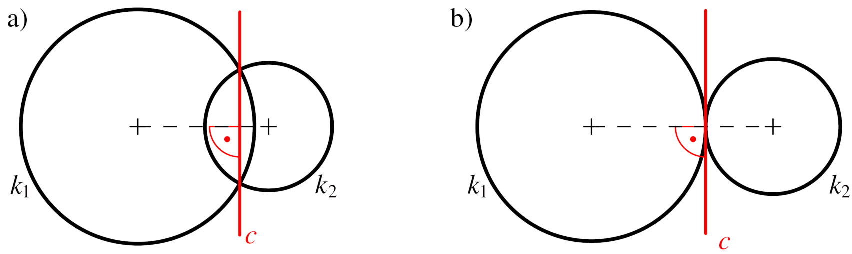
(a) se protínají,

(b) se dotýkají vně,

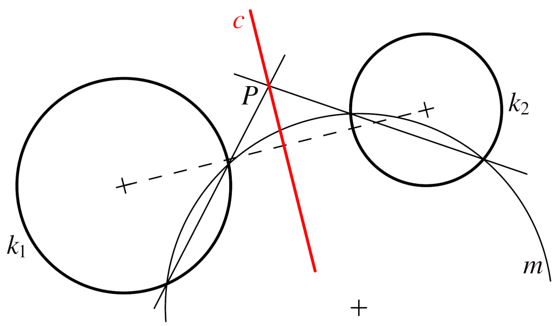
(c) leží navzájem vně.

Návod: Najděte vždy alespoň jeden bod, který má stejnou mocnost k oběma kružnicím, a dále využijte toho, že chordála dvou kružnic je přímka kolmá k jejich středné (viz důkaz věty 3.13, str. 107). V úloze (c) zvolte pomocnou kružnici m, která protíná obě zadné kružnice, a využijte potenční střed tří kružnic (viz věta 3.14, str. 63).

Výsledek: Dané kružnice jsou označeny k_1, k_2; hledaná chordála je označena c. (a) Chordála c je spojnicí průsečíků kružnic k_1, k_2 (obr. 3.6a). (b) Chordála c je kolmicí ke středné kružnic k_1, k_2 a prochází jejich bodem dotyku (obr. 3.6b). (c) Chordála c je kolmicí ke středné kružnic k_1, k_2 a prochází potenčním středem P kružnic k_1, k_2, m (obr. 3.7).



Obrázek 3.6

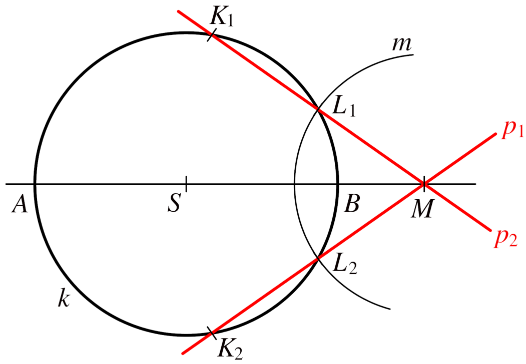


Obrázek 3.7

3.7 Je dána kružnice $k(S, 7\text{ cm})$ a bod M, kde $|MS| = 11\,\text{cm}$. Bodem M veďte sečnu p kružnice k tak, aby jeden její průsečík s kružnicí k byl středem úsečky s krajními body v bodě M a ve druhém průsečíku p a k.

Návod: Průsečíky sečny p s kružnicí k označte K, L tak, že L je středem úsečky KM. Dále označte A, B průsečíky kružnice k se sečnou MS. Z věty 3.11 (str. 60) vyplývá, že $|MK| \cdot |ML| = |MA| \cdot |MB|$.

Výsledek: $|ML| = 6\,\text{cm}$, tedy bod L sestrojíme jako průsečík kružnic k a $m(M, 6\ \text{cm})$. Body M, L určují sečnu p. Úloha má dvě řešení (v obr. 3.8 přímky p_1, p_2).



Obrázek 3.8

3.8 Jsou dány nekolineární body A, B, C. Dále je dán vnitřní bod M úsečky AB. Označme $|MA| = a$, $|MB| = b$, $|MC| = c$. Určete vzdálenost bodu M od průsečíku D ($D \neq C$) přímky MC s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC.

Návod: Z věty 3.11 (str. 60) plyne, že $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$.

Výsledek: $|MD| = \dfrac{ab}{c}$.

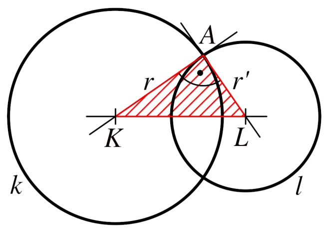
3.9 Je dána kružnice $k(S, 4\ \text{cm})$. Sestrojte množinu bodů, které mají ke kružnici k mocnost 9.

Návod: Pro bod X mající ke kružnici k mocnost 9 platí (viz str. 60), že $9 = |XS|^2 - 16$.

Výsledek: $|XS| = 5$, tedy řešením je kružnice se středem S a poloměrem $5\,\text{cm}$.

3.10 Jsou dány ortogonální kružnice $k(K, r)$, $l(L, r')$. Jakou mocnost má bod K ke kružnici l a bod L ke kružnici k?

Návod: Označte A jeden z průsečíků kružnic k, l. Zamyslete se, co platí pro trojúhelník KLA (obr. 3.9) a využijte větu 3.12 (str. 62).



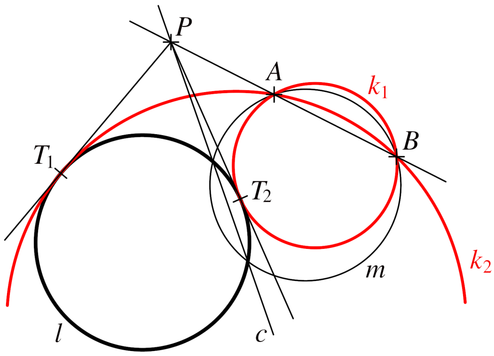
Obrázek 3.9

Výsledek: $m_l^K = r^2$; $m_k^L = r'^2$.

3.11 Sestrojte kružnici k, která prochází danými body A, B a dotýká se vně zadané kružnice l. Body A, B volte ve vnější oblasti kružnice l a v navzájem různé vzdálenosti od jejího středu.

Návod: Sestrojte libovolnou pomocnou kružnici m tak, aby protínala kružnici l a procházela body A, B. K nalezení kružnice k využijte potenční střed kružnic k, l a m.

Výsledek: Chordála c kružnic l, m prochází jejich průsečíky, chordála kružnic k, m je spojnice bodů A a B, průsečík chordál označte P. Chordála kružnice l a hledané kružnice k je společnou tečnou těchto kružnic vedenou z potenčního středu P. Úloha může mít až dvě řešení, řešeními jsou kružnice určené body A, B a vždy jedním z bodů dotyku T_1, T_2 tečen vedených z bodu P ke kružnici l (obr. 3.10). Z těchto kružnic jsou výsledkem jen ty, které mají s kružnicí l (dle zadání) vnější dotyk, tj. v obrázku 3.10 je výsledkem jen kružnice k_1.



Obrázek 3.10

4 Čtyřúhelník

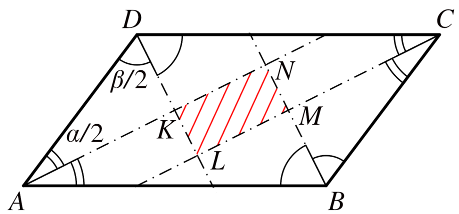
4.1 V lichoběžníku $ABCD$ se základnou AB vypočítejte velikosti vnitřních úhlů, jestliže $\alpha = 57°$, $\gamma = 4\beta$.

Návod: Využijte větu 4.9 (str. 74).

Výsledek: $\beta = 36°$, $\gamma = 144°$, $\delta = 123°$.

4.2 Dokažte, že osy vnitřních úhlů kosodélníku určují pravoúhelník.

Návod: V kosodélníku $ABCD$ označte α velikost vnitřních úhlů při vrcholech A a C a β velikost vnitřních úhlů při vrcholech B a D. Dále označte K, L, M, N průsečíky os vnitřních úhlů jako na obrázku 4.1. Aplikujte větu 2.2 (str. 27) na trojúhelníky ADK, BCM, CDL, ABN.

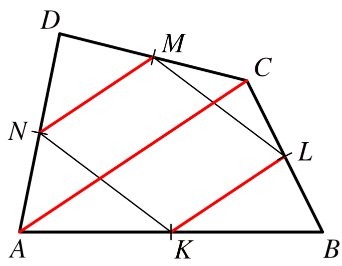


Obrázek 4.1

Výsledek: $|\sphericalangle AKD| = 180° - \left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2}\right) = 90°$, obdobně $|\sphericalangle DLC| =$ $= |\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle ANB| = 90°$, tedy čtyřúhelník $KLMN$ je pravoúhelník.

4.3 Dokažte, že středy stran libovolného čtyřúhelníku jsou vrcholy rovnoběžníku.

Návod: Uvažujte obecný čtyřúhelník $ABCD$ a označte K, L, M, N po řadě středy stran AB, BC, CD, AD (obr. 4.2). Aplikujte větu 2.7 (str. 34) na trojúhelníky ABC a ACD, resp. ABD a BCD.

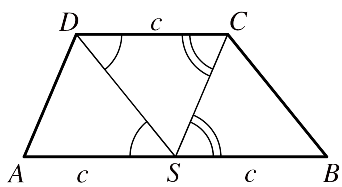


Obrázek 4.2

Výsledek: $\overline{AC} \parallel \overline{KL} \parallel \overline{MN}$ a zároveň $\overline{BD} \parallel \overline{KN} \parallel \overline{LM}$, čtyřúhelník $KLMN$ je tedy rovnoběžníkem.

4.4 V lichoběžníku $ABCD$ se základnou AB platí $a = 2c$. Dokažte, že spojnice vrcholů C, D se středem úsečky AB dělí lichoběžník na tři shodné trojúhelníky.

Návod: Využijte ZT 4 (str. 17) k nalezení shodných úhlů v trojúhelnících SAD, DCS a BSC, kde S značí střed strany AB (obr. 4.3).



Obrázek 4.3

Výsledek: $\triangle SAD \simeq \triangle DCS \simeq \triangle BSC$ podle věty *sus* (viz ZT 11, str. 29).

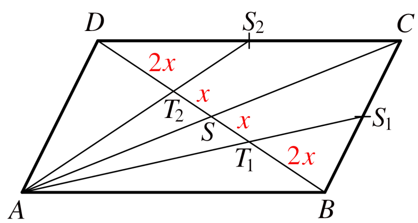
4.5 Vyjádřete délku ramene rovnoramenného lichoběžníku pomocí délek základen tak, aby byl tento lichoběžník dvojstředový.

Návod: Každému rovnoramennému lichoběžníku lze opsat kružnici, stačí tedy stanovit podmínku, kdy má daný lichoběžník kružnici vepsanou. Užijte větu 4.13 (str. 77).

Výsledek: Pro délku ramene b platí: $b = \dfrac{a+c}{2}$, kde a, c jsou délky základen.

4.6 Dokažte, že přímky spojující vrchol A rovnoběžníku $ABCD$ se středy stran BC, CD rozdělují úhlopříčku BD na tři stejné části.

Návod: Označte S průsečík úhlopříček AC a BD, S_1 střed strany BC a S_2 střed strany CD. Uvědomte si, že úsečky AS_1 a BS jsou těžnicemi v trojúhelníku ABC, obdobně úsečky AS_2 a DS jsou těžnicemi v trojúhelníku ACD (obr. 4.4). Využijte větu 2.9 (str. 35).

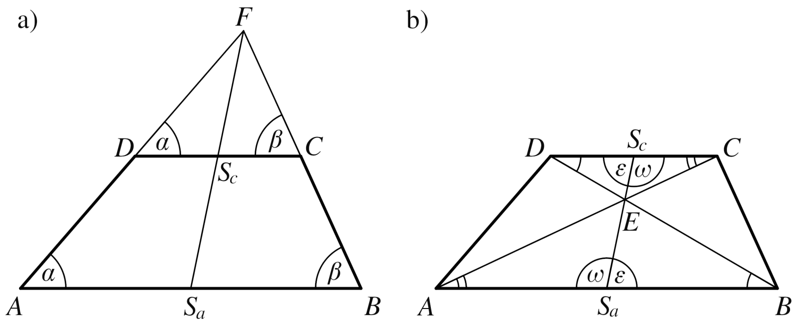


Obrázek 4.4

Výsledek: Těžiště T_1 trojúhelníku ABC dělí úsečku BS v poměru $2:1$, těžiště T_2 trojúhelníku ACD dělí úsečku DS rovněž v poměru $2:1$. Z rovnosti $|BS| = |DS|$ potom plyne, že $|BT_1| = |T_1T_2| = |T_2D|$.

4.7 Dokažte, že přímka spojující středy základen lichoběžníku prochází průsečíkem prodloužených ramen a průsečíkem úhlopříček tohoto lichoběžníku.

Návod: Označte F průsečík ramen lichoběžníku $ABCD$, S_a střed základny AB a S_c průsečík přímky FS_a se základnou CD. Ukažte, že bod S_c je středem úsečky CD. Využijte podobné trojúhelníky AS_aF, DS_cF a BS_aF, CS_cF (obr. 4.5a). Pro důkaz druhé části tvrzení označte E průsečík úhlopříček lichoběžníku $ABCD$, S_a střed základny AB a S_c průsečík přímky ES_a se stranou CD. Ukažte, že bod S_c je středem úsečky CD. K tomu využijte podobné trojúhelníky AS_aE, CS_cE a BS_aE, DS_cE (obr. 4.5b). Trojúhelníky jsou podobné dle věty *uu* (viz ZT 16, str. 30).

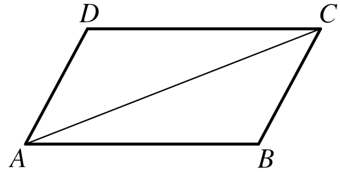


Obrázek 4.5

Výsledek: Z podobnosti trojúhelníků AS_aF, DS_cF plyne $\dfrac{|AS_a|}{|DS_c|} = \dfrac{|S_aF|}{|S_cF|}$, z podobnosti trojúhelníků BS_aF, CS_cF plyne $\dfrac{|S_aF|}{|S_cF|} = \dfrac{|BS_a|}{|CS_c|}$, a tedy $\dfrac{|AS_a|}{|DS_c|} = \dfrac{|BS_a|}{|CS_c|}$. Bod S_a je středem AB, tedy $|AS_a| = |BS_a|$, a proto je také $|DS_c| = |CS_c|$, neboli bod S_c je středem strany CD. V případě průsečíku E úhlopříček lichoběžníku je postup analogický. Jelikož je dvěma různými body přímka jednoznačně určena (viz str. 10), leží body E, F na přímce S_aS_b.

4.8 Dokažte, že ve čtyřúhelníku $ABCD$ platí: $(\overline{AB} \parallel \overline{CD} \wedge |AB| = |CD|)$ právě tehdy, když $ABCD$ je rovnoběžník.

Návod: Dokažte zvlášť jednotlivé implikace. V obou případech využijte shodnost trojúhelníků ABC, CDA a ZT 4 (str. 17) (obr. 4.6). Definice rovnoběžníku viz str. 70.



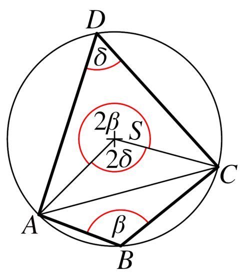
Obrázek 4.6

Výsledek: Při důkazu implikace zleva doprava jsou trojúhelníky ABC, CDA shodné dle věty *sus* (viz ZT 11, str. 29). Z této shodnosti plyne, že $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle DAC|$, a odtud $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. Při důkazu implikace zprava doleva jsou trojúhelníky ABC, CDA shodné dle věty *usu* (viz ZT 12, str. 29). Z této shodnosti plyne, že $|AB| = |CD|$.

4.9 Rozhodněte, zda platí věty obrácené k větám 4.12 (str. 76) a 4.13 (str. 77).

Obrácená věta 4.12: Je-li součet velikostí protějších úhlů čtyřúhelníku shodný, potom je tento čtyřúhelník tětivový.

Návod: Uvažujte čtyřúhelník $ABCD$. Z věty 4.1 (str. 68) plyne, že $\alpha+\gamma = 180°$ a $\beta+\delta = 180°$. Uvažujte kružnici k se středem S opsanou trojúhelníku ACD a promyslete, co platí pro středové úhly ASC a k nim příslušné obvodové úhly (obr. 4.7).



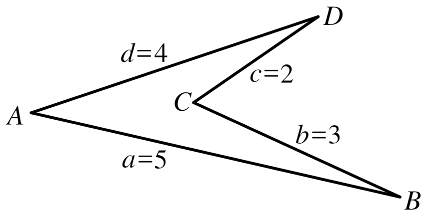
Obrázek 4.7

Výsledek: Středový úhel ASC příslušný obvodovému úhlu ADC o velikosti δ má velikost 2δ, proto velikost k němu doplňkového úhlu do $360°$ je 2β (díky předpokladu, že $\beta + \delta = 180°$). Jelikož velikost úhlu ABC je poloviční vzhledem ke středovému úhlu ASC o velikosti 2β, musí bod B ležet na kružnici k.

Obrácená věta 4.13: Je-li součet délek protějších stran čtyřúhelníku shodný, potom je tento čtyřúhelník tečnový.

Návod: Promyslete platnost věty pro nekonvexní čtyřúhelník.

Výsledek: Nekonvexnímu čtyřúhelníku nelze vepsat kružnici, avšak existuje nekonvexní čtyřúhelník $ABCD$, který splňuje předpoklad $a+c=b+d$ (např. obr. 4.8), proto tato věta neplatí.



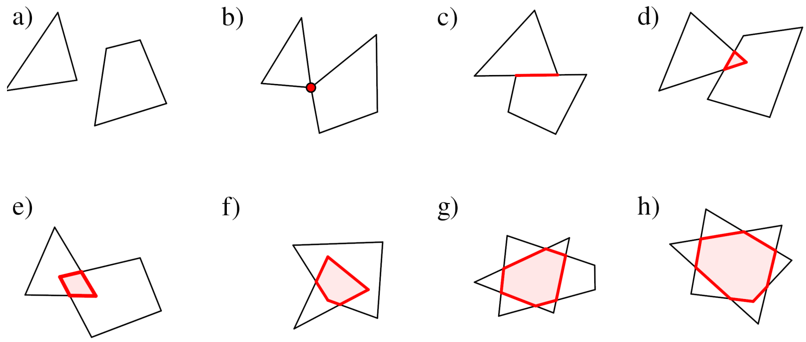
Obrázek 4.8

5 Mnohoúhelník

5.1 Proveďte úplnou diskusi průniku trojúhelníku a konvexního čtyřúhelníku.

Návod: Uvažujte různé vzájemné polohy daných útvarů. Užijte větu 1.1 (str. 14). Uvědomte si, kolik nejvýše stran může získaný objekt mít.

Výsledek: Průnikem může být celkem osm různých objektů: prázdná množina, bod, úsečka, trojúhelník, konvexní čtyřúhelník, konvexní pětiúhelník, konvexní šestiúhelník nebo konvexní sedmiúhelník (obr. 5.1).



Obrázek 5.1

5.2 Určete počet vrcholů pravidelného mnohoúhelníku, jehož vnitřní úhel má velikost 144°.

Návod: Využijte větu 5.2 (str. 83).

Výsledek: 10.

5.3 Dokažte, že v pravidelném dvanáctiúhelníku je velikost vnitřního úhlu pětinásobkem velikosti vnějšího úhlu.

Návod: Pomocí věty 5.2 (str. 83) určete velikost α vnitřního úhlu pravidelného dvanáctiúhelníku, pro velikost α' vnějšího úhlu platí, že $\alpha' = 180° - \alpha$.

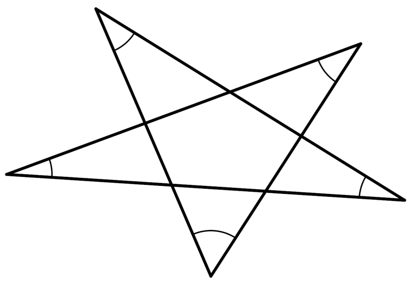
Výsledek: $\alpha = 150°$, $\alpha' = 30°$, tedy $\alpha = 5\alpha'$.

5.4 Který konvexní mnohoúhelník má dvakrát více úhlopříček než stran?

Návod: Využijte větu 5.1 (str. 82).

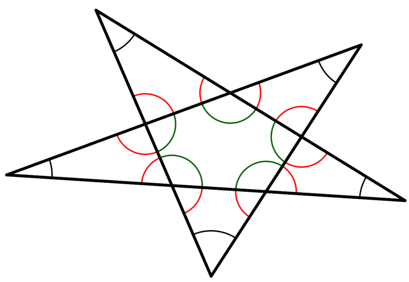
Výsledek: Sedmiúhelník.

5.5 Vypočítejte součet velikostí vyznačených úhlů v obrázku 5.2.



Obrázek 5.2

Návod: Pro hledaný součet s velikostí vyznačených úhlů dle věty 2.2 (str. 27) platí, že $s + k = 5 \cdot 180°$, kde k je součet velikostí červeně vyznačených úhlů v obrázku 5.3. Tyto „červené“ úhly jsou vedlejšími úhly k „zeleným“ vnitřním úhlů pětiúhelníku $ABCDE$ (obr. 5.3), proto $k+2m = 10 \cdot 180°$, kde m je součet velikostí vnitřních úhlů pětiúhelníku $ABCDE$ (viz věta 5.2, str. 83).



Obrázek 5.3

Výsledek: 180°.

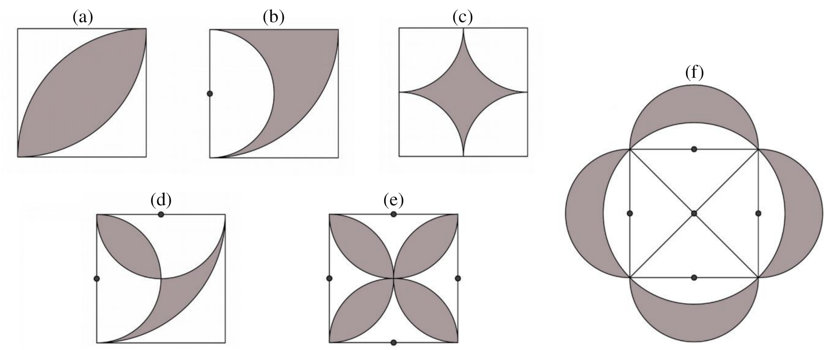
6 Obvod a obsah

6.1 Trojúhelníky KLM a $K'L'M'$ jsou podobné, přičemž $|K'M'| = k|KM|$, $k > 0$. Jaký je poměr jejich (a) obvodů, (b) obsahů?

Návod: Vyjádřete obvod/obsah obou trojúhelníků pomocí délek úseček vztahujících se pouze k trojúhelníku KLM (každá úsečka vztahující se k trojúhelníku $K'L'M'$ je k-krát delší než odpovídající úsečka v trojúhelníku KLM).

Výsledek: (a) $1 : k$; (b) $1 : k^2$.

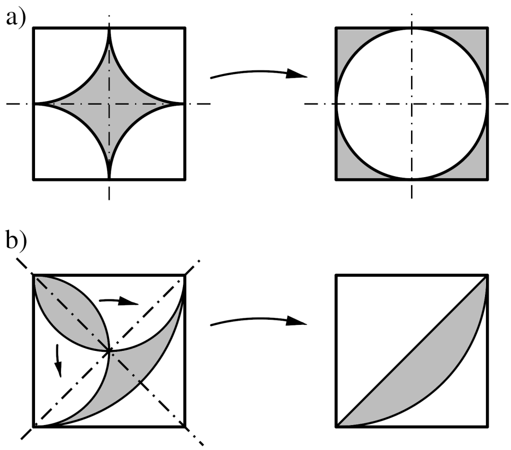
6.2 Vyjádřete obvody a obsahy šedě vybarvených obrazců (a)–(f) v obrázku 6.1 v závislosti na délce strany a čtverce, jemuž jsou obrazce „vepsány/opsány“. Obrazce jsou ohraničeny úsečkami a částmi kružnic, jejichž středy jsou vždy ve vrcholech nebo zvýrazněných středech stran či úhlopříček čtverce.



Obrázek 6.1

Návod: (a) Obvod je součtem délek dvou shodných čtvrtin kružnice s poloměrem a. Obsah je součtem obsahů dvou shodných kruhových úsečí s poloměrem a. (b) Obvod je součtem délek čtvrtiny kružnice s poloměrem a, polokružnice s poloměrem $\frac{a}{2}$ a úsečky délky a. Obsah je rozdílem obsahů kruhové výseče s poloměrem a a půlkruhu s poloměrem $\frac{a}{2}$. (c) Obvod je součtem délek čtyř shodných čtvrtin kružnice s poloměrem $\frac{a}{2}$. Čtverec lze rozdělit na čtyři shodné menší čtverce a vhodně přeuspořádat (obr. 6.2a), následně je patrné, že obsah je rozdílem obsahu čtverce o straně délky a

a kruhu o poloměru $\frac{a}{2}$. (d) Obvod je součtem délek dvou shodných polokružnic s poloměrem $\frac{a}{2}$ a čtvrtiny kružnice s poloměrem a. Obsah je stejný jako rozdíl obsahů kruhové výseče o poloměru a a pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku s odvěsnami o délce a (obr. 6.2b). (e) Obvod je součtem délek čtyř polokružnic s poloměrem $\frac{a}{2}$. Obsah lze určit jako součet obsahů čtyř shodných útvarů podobných útvaru z úlohy 6.2a, jen vepsáných do čtverce o straně dlouhé $\frac{a}{2}$. (f) Obvod je součtem délek čtyř shodných polokružnic s poloměrem $\frac{a}{2}$ a délky kružnice o poloměru rovném polovině délky úhlopříčky daného čtverce. Obsah lze vypočítat vztahem $4S_1 + S_2 - S_3$, kde S_1 je obsah půlkruhu s poloměrem $\frac{a}{2}$, S_2 je obsah daného čtverce a S_3 je obsah kruhu o poloměru rovném polovině délky úhlopříčky daného čtverce.

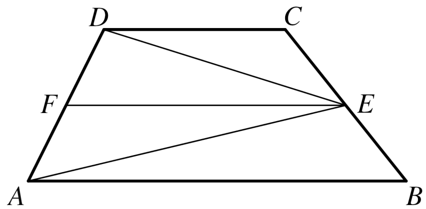


Obrázek 6.2

Výsledek: (a) $o = \pi a$, $S = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$; (b) $o = a(1+\pi)$, $S = \frac{\pi a^2}{8}$; (c) $o = \pi a$, $S = a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$; (d) $o = \frac{3\pi a}{2}$, $S = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$; (e) $o = 2\pi a$, $S = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$; (f) $o = \pi a\left(2 + \sqrt{2}\right)$, $S = a^2$.

6.3 Střed ramene BC lichoběžníku $ABCD$ označte E. Jaký je poměr obsahů lichoběžníku $ABCD$ a trojúhelníku ADE?

Návod: Obsah trojúhelníku ADE vyjádřete jako součet obsahů trojúhelníků FEA a FED, kde FE je střední příčkou lichoběžníku $ABCD$ (obr. 6.3). Využijte větu 4.10 (str. 74) a uvědomte si, že body A a D jsou stejně vzdálené od přímky EF.



Obrázek 6.3

Výsledek: 2 : 1.

6.4 Délky základen lichoběžníku jsou 6 cm a 4 cm, jeho obsah je 25 cm^2. Vypočtěte obsahy čtyř trojúhelníků, na které je lichoběžník rozdělen svými úhlopříčkami.

Návod: Označte daný lichoběžník $ABCD$, kde AB a CD jsou základny. Ze vztahu pro obsah lichoběžníku (str. 94) určete výšku lichoběžníku $ABCD$. Pro výpočet obsahů trojúhelníků ABS a CDS dále využijte, že tyto trojúhelníky jsou podobné podle věty *uu* (ZT 16, str. 30). Označte S průsečík úhlopříček AC, BD. Pro výpočet obsahů trojúhelníků BCS a ADS si stačí uvědomit, že tyto obsahy jsou shodné, neboť jsou shodné obsahy trojúhelníků ABC a ABD a obsah trojúhelníku BCS, resp. ADS, lze vyjádřit jako rozdíl obsahů trojúhelníku ABC, resp. ABD, a ABS.

Výsledek: Obsah trojúhelníku ABS je 9 cm^2, obsah trojúhelníku BCS i trojúhelníku ADS je 6 cm^2 a obsah trojúhelníku CDS je 4 cm^2.

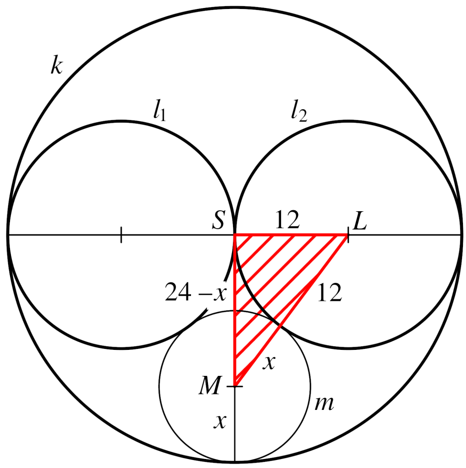
6.5 Lichoběžníku $ABCD$ lze vepsat kružnici. Délky jeho ramen jsou 3 cm a 5 cm, jeho střední příčka jej dělí na dva lichoběžníky, jejichž poměr obsahů je 5 : 11. Určete délky jeho základen.

Návod: Využijte věty 4.13 (str. 77) a 4.10 (str. 75) a sestavte soustavu rovnic pro dvě neznámé (délky základen).

Výsledek: 7 cm a 1 cm.

6.6 Do kružnice $k(S, 24 \text{ cm})$ jsou vepsány dvě kružnice l_1, l_2 o poloměrech 12 cm tak, že s kružnicí k mají vnitřní dotyk a spolu navzájem mají vnější dotyk v bodě S. Vypočtěte poloměr kružnice m, která se dotýká všech tří zadaných kružnic.

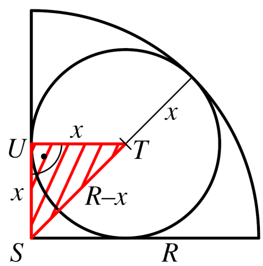
Návod: Využijte *Pýthagorovu větu* (věta 6.5, str. 100) v trojúhelníku MLS, kde L, M jsou po řadě středy kružnic l_2, m (obr. 6.4).



Obrázek 6.4

Výsledek: 8 cm.

6.7 Do čtvrtkruhu o daném poloměru R vepište kruh o maximálním obsahu. Určete poloměr vepsaného kruhu v závislosti na R.



Obrázek 6.5

Návod: Využijte *Pýthagorovu větu* (věta 6.5, str. 100) v trojúhelníku SUT, kde S je střed daného čtvrtkruhu, T je střed vepsaného kruhu a U je pata kolmice spuštěná z bodu T na stranu daného čtvrtkruhu (obr. 6.5).

Výsledek: $R(\sqrt{2}-1)$.

6.8 Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC a délky jeho výšek, je-li $a = 10\,\mathrm{cm}$, $b = 8\,\mathrm{cm}$, $c = 14\,\mathrm{cm}$.

Návod: Využijte *Hérónův vzorec* (věta 6.10, str. 105) a následně základní vztah pro obsah trojúhelníku pomocí délky strany a příslušné výšky (viz str. 94).

Výsledek: $S = 16\sqrt{6}\,\mathrm{cm}^2$, $v_a = \dfrac{16\sqrt{6}}{5}\,\mathrm{cm}$, $v_b = 4\sqrt{6}\,\mathrm{cm}$, $v_c = \dfrac{16\sqrt{6}}{7}\,\mathrm{cm}$.

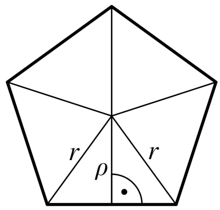
6.9 Je dán čtverec $ABCD$. Označme S střed jeho strany BC a Q průsečík přímek AS a BD. Přímky AS a BD dělí čtverec $ABCD$ na čtyři části. Určete jejich obsahy, jestliže obsah trojúhelníku BSQ je $8\,\mathrm{cm}^2$.

Návod: Obsah trojúhelníku DAQ plyne z podobnosti trojúhelníků DAQ a BSQ. Pro výpočet obsahu trojúhelníku ABQ využijeme toho, že bod Q je stejně vzdálen od přímky AB jako od přímky BS a zároveň že $|AB| = 2|BS|$. Obsah čtyřúhelníku $QSCD$ je rozdílem obsahů trojúhelníků BCD a BSQ přičemž obsah trojúhelníku BCD je shodný s obsahem trojúhelníku ABD.

Výsledek: Obsah trojúhelníku DAQ je $32\,\mathrm{cm}^2$, obsah trojúhelníku ABQ je $16\,\mathrm{cm}^2$ a obsah čtyřúhelníku $QSCD$ je $40\,\mathrm{cm}^2$.

6.10 Vyjádřete poloměr r kružnice opsané a poloměr ϱ kružnice vepsané pravidelnému pětiúhelníku, jehož strana má délku a.

Návod: Pravidelný pětiúhelník rozdělte na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků (obr. 6.6). Poloměr r je délkou ramene a poloměr ϱ je výškou k základně každého z těchto trojúhelníků. Použijte goniometrické funkce, popřípadě využijte vztah pro $\cos 72°$ odvozený na str. 138 a *Pýthagorovu větu* (věta 6.5, str. 100).



Obrázek 6.6

Výsledek: Pomocí goniometrických funkcí: $r = \dfrac{a}{2\sin 36^\circ}$, $\varrho = \dfrac{a}{2}\tan 54^\circ$. Pomocí vztahu pro $\cos 72^\circ$ a *Pýthagorovy věty*: $r = \dfrac{a}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}$, $\varrho = \dfrac{a}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$.

6.11 V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou c je dána odvěsna $a = 4\,\text{cm}$ a těžnice $t_a = 6\,\text{cm}$. Vypočítejte délku těžnice t_b.

Návod: Označte S_a, S_b po řadě středy stran a, b. Aplikací *Pýthagorovy věty* (věta 6.5, str. 100) na trojúhelník AS_aC určete délku strany b, následně pomocí téže věty v trojúhelníku S_bBC určete délku těžnice t_b.

Výsledek: $2\sqrt{6}\,\text{cm}$.

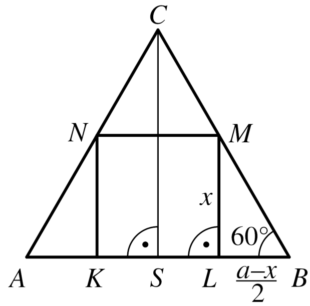
6.12 V obdélníku $ABCD$ vyjádřete vzdálenost bodu C od úsečky BD v závislosti na délkách $a = |AB|$, $b = |BC|$.

Návod: Hledaná vzdálenost je výškou na přeponu pravoúhlého trojúhelníku BCD, patu výšky označte P. Délku jeho přepony určete pomocí *Pýthagorovy věty* (věta 6.5, str. 100). Dále využijte podobnost trojúhelníků ABD, PDC (*uu*, viz ZT 16, str. 30).

Výsledek: $\dfrac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}$.

6.13 Do rovnostranného trojúhelníku ABC o straně délky a je vepsán čtverec $KLMN$. Vyjádřete délku x strany čtverce v závislosti na délce a, jestliže $\overline{KL} \subset \overline{AB} \ \wedge\ M \in \overline{BC} \ \wedge\ N \in \overline{AC}$.

Návod: Označte S střed strany AB (obr. 6.7) a využijte podobnost trojúhelníků BSC, BLM podle věty *uu* (ZT 16, str. 30).



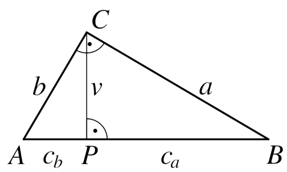
Obrázek 6.7

Výsledek: $x = a\left(2\sqrt{3} - 3\right)$.

6.14 Dokažte *Pýthagorovu větu* (věta 6.5, str. 100) jako přímý důsledek vět *Eukleidových* (věty 6.8 a 6.9, str. 103–104).

Návod: Stačí využít větu o odvěsně (věta 6.9, str. 104) pro obě odvěsny pravoúhlého trojúhelníku.

Výsledek: V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou c rozdělenou patou výšky na úseky c_a, c_b (obr. 6.8) platí, že $a^2 = cc_a \wedge b^2 = cc_b$. Součtem obou vztahů a úpravou získáme $a^2 + b^2 = c^2$.



Obrázek 6.8

6.15 Dokažte *Eukleidovy věty* (věty 6.8 a 6.9, str. 103–104) jako přímý důsledek *věty Pýthagorovy* (věta 6.5, str. 100).

Návod: Pravoúhlý trojúhelník označte ABC (s pravým úhlem při vrcholu C), patu jeho výšky v na přeponu označte P a úseky přepony c_a,

c_b (obr. 6.8). Využijte Pýthagorovu větu (věta 6.5) v trojúhelnících ABC, APC i PBC, tj. vztahy

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= c^2, & (1)\\
v^2 + c_b^2 &= b^2, & (2)\\
v^2 + c_a^2 &= a^2. & (3)
\end{aligned}
$$

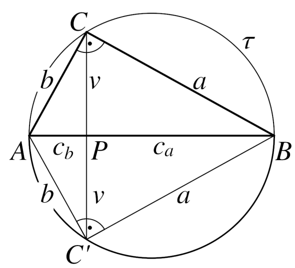
Při úpravách využijte též, že $c = c_a + c_b$ a vzorec pro druhou mocninu dvojčlenu.

Výsledek: *Eukleidovu větu o výšce* (věta 6.8) odvodíte vyjádřením a porovnáním b^2 z rovnic (1) a (2) a následným dosazením za a^2 z rovnice (3). Pro odvození *Eukleidovy věty o odvěsně* (věta 6.9) vyjděte od rovnice (3) a postupně dosaďte za v^2 z rovnice (2) a za b^2 z rovnice (1). Následně upravte.

6.16 Dokažte *Eukleidovy věty* (věty 6.8 a 6.9, str. 103–104) užitím mocnosti bodu ke kružnici.

Návod: Užijte věty 3.11 (str. 60) a 3.12 (str. 62). Pro odvození *Eukleidovy věty o výšce* (věta 6.8) uvažujte *Thalétovu kružnici* (viz str. 53) nad přeponou daného trojúhelníku, pro odvození *Eukleidovy věty o odvěsně* (věta 6.9) uvažujte *Thalétovu kružnici* nad odvěsnou daného trojúhelníku.

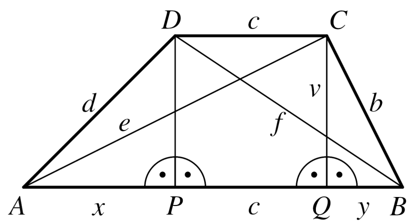
Výsledek: Označte daný pravoúhlý trojúhelník a jeho prvky jako na obrázku 6.8. Z mocnosti bodu B k *Thalétově kružnici* nad odvěsnou AC plyne vztah $a^2 = cc_a$, analogicky z mocnosti bodu A k *Thalétově kružnici* nad odvěsnou BC plyne vztah $b^2 = cc_b$. Z mocnosti paty P výšky na přeponu k *Thalétově kružnici* τ nad přeponou AB (obr. 6.9) plyne vztah $v^2 = c_a c_b$.



Obrázek 6.9

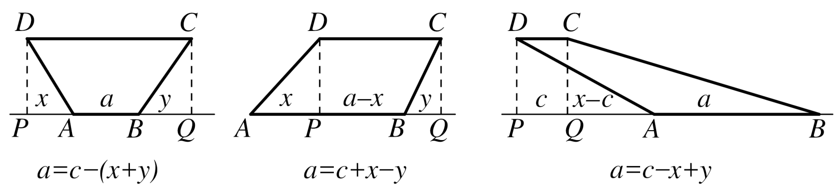
6.17 Dokažte, že v lichoběžníku $ABCD$ se základnou AB platí $e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac$.

Návod: Označte P, Q po řadě paty kolmic z bodů D, C k přímce AB a $x = |AP|$, $y = |QB|$ (obr. 6.10). Využijte *Pýthagorovu větu* (věta 6.5, str. 100) v trojúhelnících AQC (vztah 1), BPD (vztah 2), APD (vztah 3), BQC (vztah 4).



Obrázek 6.10

Výsledek: Součtem vztahů (1) a (2) a dosazením ze vztahů (3) a (4) za v^2 získáme $e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2a^2 \pm 2a(x + y)$, resp. $e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2a^2 \pm 2a(x - y)$ (záleží na poloze bodů P, Q vůči bodům A, B, viz obr. 6.11, v němž jsou znázorněny některé z možných situací), a použijeme vztah porovnávající součty/rozdíly délek x, y, a a délky strany c, z nějž dosadíme za $(x \pm y)$. Po úpravě vyjde $e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac$.

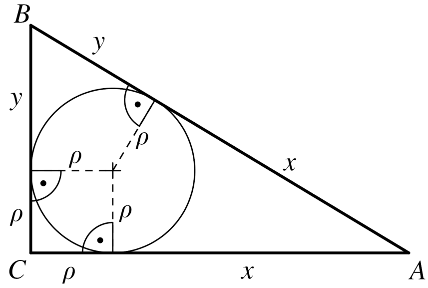


Obrázek 6.11

6.18 Dokažte, že v pravoúhlém trojúhelníku je součet délek odvěsen roven součtu průměrů kružnice opsané a vepsané.

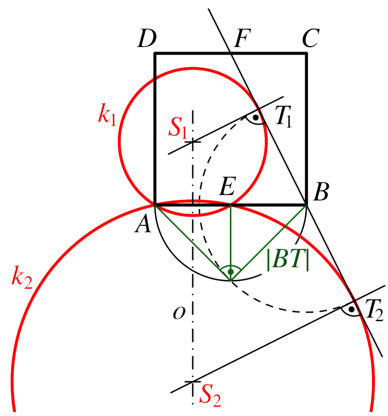
Návod: Uvědomte si, kde leží střed kružnice opsané pravoúhlého trojúhelníku (aplikujte *Thalétovu větu*, viz věta 3.6, str. 51). Dále zapište délky stran daného trojúhelníku jako součty délek dvou úseček, na něž je strana dělena bodem dotyku s kružnicí vepsanou.

Výsledek: Při označení daného trojúhelníku ABC (s přeponou c), poloměru kružnice opsané r, poloměru kružnice vepsané ϱ a délek úseků, na něž je přepona dělena bodem dotyku s kružnicí vepsanou, jako x a y (viz obr. 6.12), platí: $a + b = x + y + 2\varrho = c + 2\varrho = 2r + 2\varrho$.



Obrázek 6.12

6.19 Je dán čtverec $ABCD$, bod E je středem úsečky AB, bod F je středem úsečky CD. Sestrojte kružnici k, která se dotýká přímky FB a prochází body A, E.



Obrázek 6.13

Návod: Nejprve sestrojte bod dotyku T kružnice k s přímkou BF. Z mocnosti bodu B ke kružnici k plyne, že $|BT|^2 = |BA| \cdot |BE|$ (viz věty 3.11

a 3.12, str. 60–62). Střed S kružnice k je potom průsečíkem osy o úsečky AE a kolmice vedené z bodu T k přímce BF.

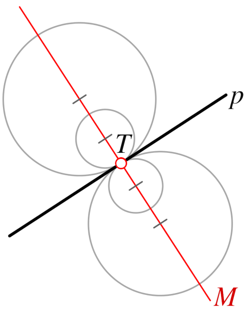
Výsledek: Délku $|BT|$ lze sestrojit pomocí *Eukleidovy věty o odvěsně* (věta 6.9, str. 104) – viz pomocný pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB v obrázku 6.13. Úloha má dvě řešení (k_1, k_2 se středy S_1, S_2 v obr. 6.13).

7 Množiny bodů dané vlastnosti

7.1 Sestrojte množinu středů všech kružnic, které se dotýkají dané přímky p v jejím daném bodě T.

Návod: Sestrojte několik konkrétních středů takových kružnic, využijte větu 3.5 (str. 49).

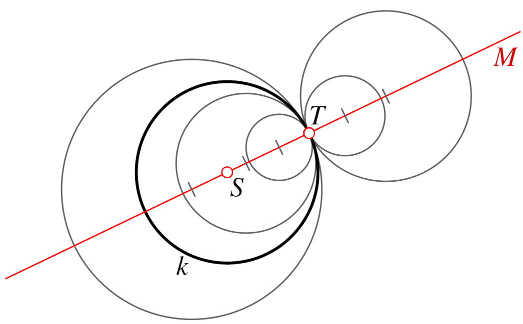
Výsledek: Hledanou množinou M je kolmice k přímce p vedená bodem T vyjma bodu T (obr. 7.1).



Obrázek 7.1

7.2 Sestrojte množinu středů všech kružnic, které se dotýkají dané kružnice k v jejím daném bodě T.

Návod: Sestrojte několik konkrétních středů takových kružnic, využijte vztahu mezi bodem dotyku dvou kružnic a střednou těchto kružnic (viz str. 59). Uvažujte vnější i vnitřní dotyk kružnic.



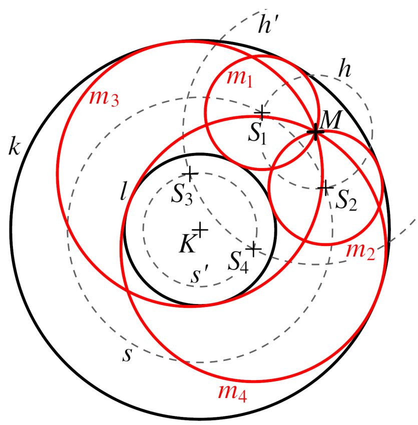
Obrázek 7.2

Výsledek: Hledanou množinou M je přímka ST, kde S je střed kružnice k, vyjma bodů S, T (obr. 7.2).

7.3 Jsou dány soustředné kružnice $k(K, 5\text{ cm})$, $l(K, 2\text{ cm})$ a bod M tak, že $|KM| = 4\,\text{cm}$. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají kružnic k, l a prochází bodem M.

Návod: Hledané kružnice označme m_i, $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Kružnice k, m_i budou mít vždy vnitřní dotyk. Kružnice l, m_i mohou mít vnější i vnitřní dotyk, záleží na poloměru kružnice m_i.

Výsledek: Zadané podmínky splňují čtyři různé kružnice m_1, m_2, m_3, m_4 (obr. 7.3). Kružnice m_1, m_2 mající vnější dotyk s kružnicí l musí mít poloměr rovný 1,5 cm. Jejich středy S_1, S_2 jsou průsečíky kružnic $s(K, 3{,}5\,\text{cm})$, $h(M, 1{,}5\,\text{cm})$. Kružnice m_3, m_4 mající vnitřní dotyk s kružnicí l musí mít poloměr rovný 3,5 cm. Jejich středy S_2, S_3 jsou průsečíky kružnic $s'(K, 1{,}5\,\text{cm})$, $h'(M, 3{,}5\,\text{cm})$.

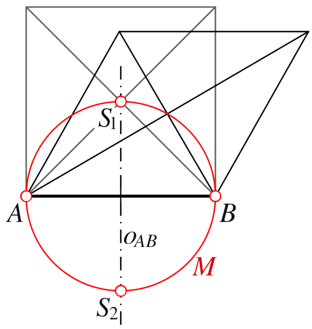


Obrázek 7.3

7.4 Je dána úsečka AB. Sestrojte množinu středů všech kosočtverců $ABCD$.

Návod: Užijte větu 4.6 (str. 72) a *Thalétovu* větu (věta 3.6, str. 51). Pracujte s definicí kosočtverce (str. 72), dle níž čtverec není kosočtvercem.

Výsledek: Hledanou množinou M je kružnice nad průměrem AB vyjma bodů A, B a průsečíků S_1, S_2 této kružnice s osou o_{AB} úsečky AB (obr. 7.4).

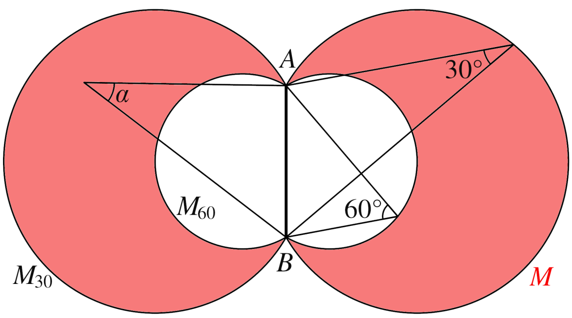


Obrázek 7.4

7.5 Je dána úsečka AB. Znázorněte množinu bodů, ze kterých je úsečka AB vidět pod úhlem o velikosti $\alpha \in (30°; 60°)$.

Návod: Sestrojte nejprve množiny bodů M_{30}, M_{60}, z nichž je úsečka AB vidět pod úhly o velikostech 30° a 60° (viz str. 118).

Výsledek: Hledanou množinou M je rovinný útvar ohraničený množinami M_{30}, M_{60} bez hraniční křivky (obr. 7.5).

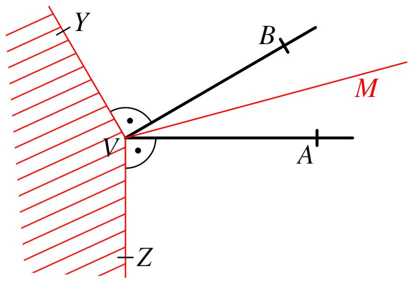


Obrázek 7.5

7.6 Znázorněte množinu bodů stejně vzdálených od ramen ostrého úhlu AVB.

Návod: Kromě osy daného úhlu AVB hledejte také body ležící vně tohoto úhlu a splňující daný požadavek. Uvědomte si, jak je definována vzdálenost bodu od polopřímky (viz str. 19).

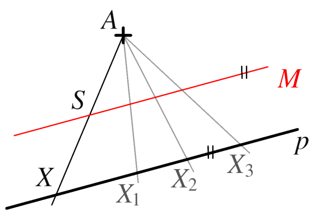
Výsledek: Hledanou množinou M je sjednocení osy konvexního úhlu AVB s konvexním úhlem YVZ (obr. 7.6), kde $(\longmapsto VY \perp \longmapsto VB) \wedge (Y \in \overrightarrow{AVB})$ a $(\longmapsto VZ \perp \longmapsto VA) \wedge (Z \in \overrightarrow{BVA})$.



Obrázek 7.6

7.7 Je dána přímka p a bod A, který na ní neleží. Sestrojte množinu středů všech úseček AX, jestliže X probíhá přímku p.

Návod: Zvolte na přímce p tři libovolné navzájem různé body X_1, X_2, X_3 (bod X_2 mezi body X_1, X_3) a aplikujte větu 2.7 (str. 34) postupně na trojúhelníky X_1X_3A, X_1X_2A. Zamyslete se nad vzájemnou polohou středu úsečky X_2A a střední příčky trojúhelníku X_1X_3A rovnoběžné se stranou X_1X_3.



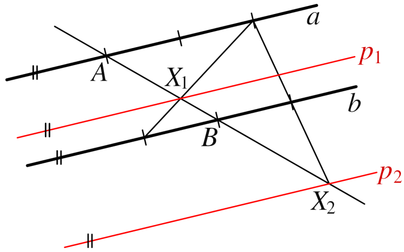
Obrázek 7.7

Výsledek: Hledanou množinou M je přímka rovnoběžná s přímkou p procházející středem S úsečky AX, kde X je libovolný bod přímky p (obr. 7.7).

7.8 Jsou dány různé rovnoběžky a, b. Sestrojte množinu bodů, které mají od přímky a dvojnásobnou vzdálenost než od přímky b.

Návod: Sestrojte libovolnou příčku q přímek a, b a označte A, B po řadě průsečíky příčky q s přímkami a, b. Na příčce q sestrojte všechny body X, pro které platí $|AX| = 2|BX|$, neboli $|AX| : |BX| = 2 : 1$ (viz str. 130).

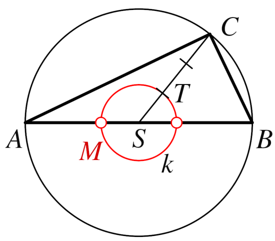
Výsledek: Body X existují dva různé, v obrázku 7.8 jsou označeny X_1, X_2. Hledanou množinou je sjednocení přímek p_1, p_2 rovnoběžných s přímkami a, b, přičemž $X_1 \in p_1$ a $X_2 \in p_2$.



Obrázek 7.8

7.9 Určete množinu těžišť všech pravoúhlých trojúhelníků se společnou přeponou AB.

Návod: Užijte *Thalétovu větu* (věta 3.6, str. 51) pro stanovení všech možných poloh třetího vrcholu C pravoúhlého trojúhelníku ABC a uvědomte si, co platí pro $|SC|$, resp. $|ST|$, kde S je střed strany AB a T těžiště trojúhelníku ABC.



Obrázek 7.9

Výsledek: Hledanou množinou M je kružnice $k\left(S; \frac{1}{6}|AB|\right)$ vyjma jejích průsečíků s úsečkou AB (obr. 7.9).

7.10 Sestrojte několik různých bodů

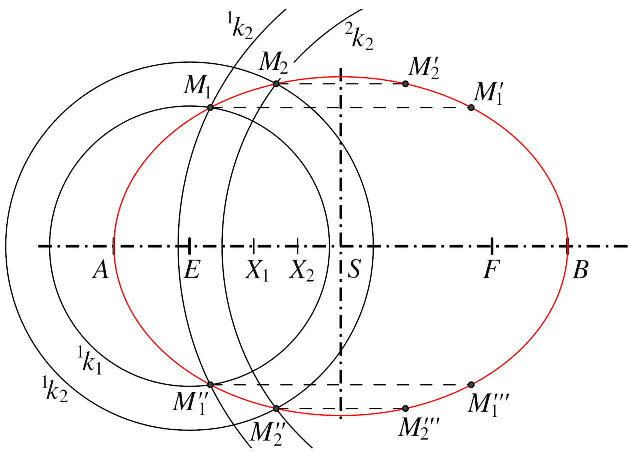
(a) elipsy, jsou-li dána ohniska E, F a vzdálenost $2a > |EF|$,

(b) paraboly, je-li dána řídicí přímka d a ohnisko F, kde $F \notin d$,

(c) hyperboly, jsou-li dána ohniska E, F a vzdálenost $2a < |EF|$.

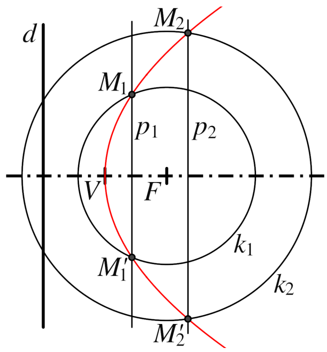
Návod: Užijte definice kuželoseček na str. 119–120. (a/c) Střed elipsy/hyperboly je středem úsečky EF, na hlavní ose EF potom můžete sestrojit vrcholy A, B tak, že $|AS| = |BS| = a$. Při konstrukci bodu elipsy, resp. hyperboly, dále zvolte na přímce EF libovolně bod X ležící mezi ohnisky E, F, resp. vně úsečky EF, a dále pracujte s kružnicemi se středy v bodech E, F a poloměry $|AX|$, $|BX|$. Postup lze opakovat s volbou jiných poloh bodů X.

(b) Osou paraboly je kolmice vedená bodem F k řídicí přímce d, na ose leží vrchol V paraboly, přičemž $|VF| = |Vd|$. Pro konstrukci dalšího libovolného bodu paraboly je třeba zvolit libovolnou rovnoběžku p s přímkou d tak, aby $|pd| > |Vd|$. Pro bod M paraboly ležící na přímce p potom platí, že $|Md| = |pd| = |MF|$. Postup lze opakovat s volbou jiných přímek p.



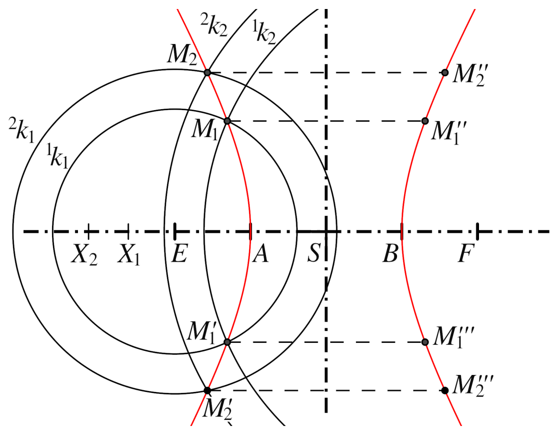
Obrázek 7.10

Výsledek: (a) Bod M_i elipsy je průsečíkem kružnice ${}^ik_1(E;|AX_i|)$ a kružnice ${}^ik_2(F;|BX_i|)$. V obrázku 7.10 jsou takto sestrojeny body M_1, M_2. Dále lze využít osovou i středovou souměrnost elipsy (body M_1', M_1'', M_1''' atd.).
(b) Bod M_i paraboly je průsečíkem přímky p_i a kružnice $k_i(F;|p_id|)$. V obrázku 7.11 jsou takto sestrojeny body M_1, M_2. Dále lze využít osovou souměrnost paraboly (body M_1', M_2').



Obrázek 7.11

(c) Bod M_i hyperboly je průsečíkem kružnic ${}^ik_1(E;|AX_i|)$, ${}^ik_2(F;|BX_i|)$. V obrázku 7.12 jsou takto sestrojeny body M_1, M_2. Dále lze využít osovou i středovou souměrnost hyperboly (body M_1', M_1'', M_1''' atd.).

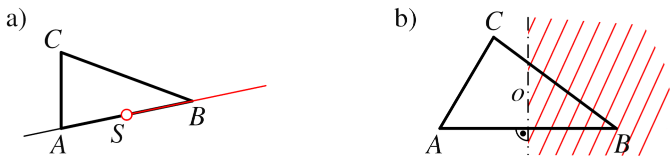


Obrázek 7.12

7.11 Je dán trojúhelník ABC. V množině M sestrojte množinu bodů X majících vlastnost $|XA| > |XB|$, jestliže (a) $M = \longleftrightarrow AB$, (b) $M = E_2$, (c) $M = \triangle ABC$.

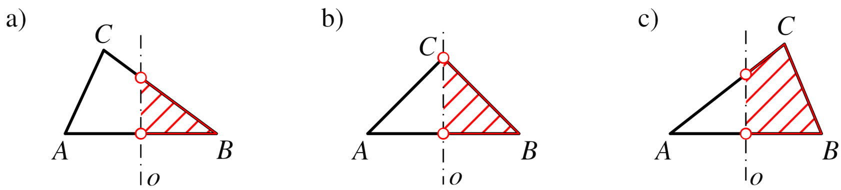
Návod: (a) Klíčovým bodem je střed S úsečky AB. (b) Sestrojte osu o úsečky AB a pozorujte, co platí pro body náležící $\overrightarrow{oA}$ a co platí pro body náležící $\overrightarrow{oB}$. (c) Určete průnik trojúhelníku ABC a množiny, která je řešením podúlohy (b).

Výsledek: (a) Hledanou množinou je $\longmapsto SB$ vyjma bodu S (obr. 7.13a). (b) Hledanou množinou je polorovina $\overrightarrow{oB}$ bez hraniční přímky o (obr. 7.13b).



Obrázek 7.13

(c) Hledanou množinou je průnik trojúhelníku ABC s $\overrightarrow{oB}$ (viz řešení b). Výsledkem může být trojúhelník bez jedné strany (obr. 7.14a,b) nebo konvexní čtyřúhelník bez jedné strany, záleží na poloze bodu C (obr. 7.14c).



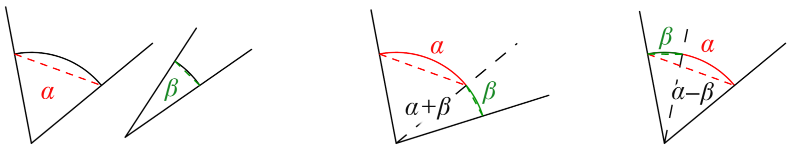
Obrázek 7.14

8 Konstrukční úlohy

8.1 Jsou dány ostré úhly o velikostech α a β, přičemž $\alpha > \beta$. Graficky sestrojte úhel o velikosti a) $\alpha + \beta$, b) $\alpha - \beta$.

Návod: Využijte kružnicové oblouky se středy ve vrcholech daných úhlů o libovolném, ale navzájem shodném poloměru, a tětivy odpovídající těmto obloukům.

Výsledek: Viz obrázek 8.1.



Obrázek 8.1

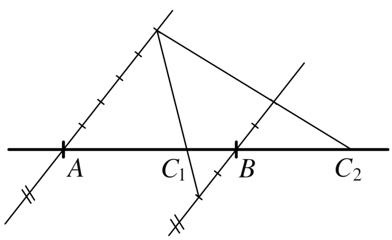
8.2 Na přímce AB sestrojte bod C tak, aby:

(a) $|AC| : |CB| = 5 : 2$,

(b) $|AC| : |AB| = 5 : 2$.

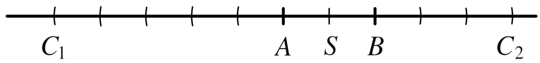
Návod: (a) Použijte konstrukci popsanou na str. 130. (b) Úsečku AB rozdělte jejím středem S na dvě shodné úsečky a od bodu A poté kružítkem naneste pět takových úseček.

Výsledek: (a) Úloha má 2 řešení (v obrázku 8.2 body C_1, C_2).



Obrázek 8.2

(b) Úloha má 2 řešení (v obrázku 8.3 body C_1, C_2).



Obrázek 8.3

8.3 Je dána přímka a a body A, B tak, že $A \notin a \wedge B \in a$. Pomocí eukleidovského pravítka a kružítka sestrojte:

(a) v bodě B kolmici m k přímce a,
(b) bodem A kolmici q k přímce a,
(c) bodem A rovnoběžku r s přímkou a,
(d) polopřímku BX tak, aby velikost úhlu ABX byla $60°$.

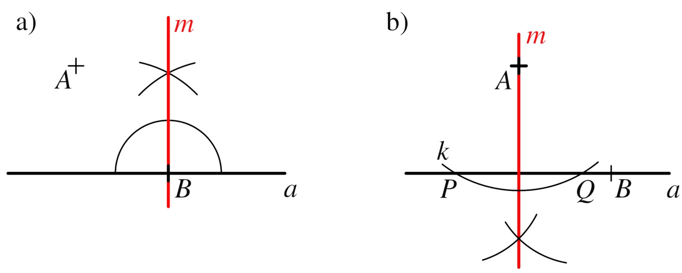
Návod: (a) Sestrojte osu přímého úhlu s vrcholem B, jehož ramena leží na přímce a.

(b) Sestrojte kružnici k se středem A a libovolným poloměrem takovým, aby přímka a byla její sečnou. Vzniklé průsečíky označte P, Q a sestrojte osu úsečky PQ.

(c) Sestrojte kosočtverec s libovolnou délkou strany d, pro kterou platí $d > |Aa|$. Výchozím bodem kosočtverce je bod A a jedna strana kosočtverce leží na přímce a.

(d) Začněte kružnicí k se středem v bodě B a libovolným poloměrem r. Využijte toho, že vnitřní úhly v rovnostranném trojúhelníku mají velikost $60°$.

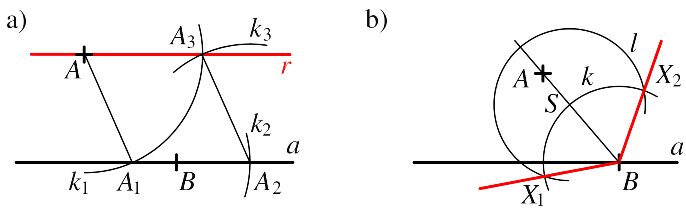
Výsledek: (a) Viz obrázek 8.4a. (b) Viz obrázek 8.4b.



Obrázek 8.4

(c) Viz obrázek 8.5a. Index i u popisu kružnic i bodů určuje, v jakém pořadí byly útvary sestrojeny. Hledaná rovnoběžka obsahuje stranu AA_3 sestrojeného kosočtverce $AA_1A_2A_3$.

(d) Úloha má dvě řešení, v obrázku 8.5b se jedná o polopřímky BX_1, BX_2. Průsečík kružnice k s polopřímkou BA označte S. Body X_1, X_2 jsou průsečíky kružnice k s kružnicí $l(S; r)$.

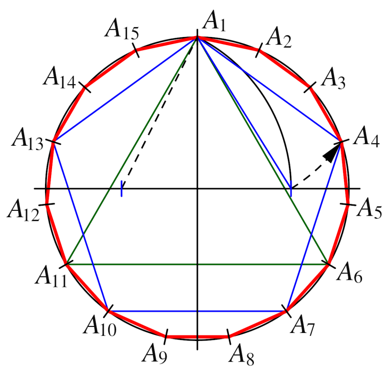


Obrázek 8.5

8.4 Sestrojte pravidelný patnáctiúhelník vepsaný do dané kružnice.

Návod: Do téže kružnice vepište pravidelný trojúhelník i pravidelný pětiúhelník se společným výchozím vrcholem.

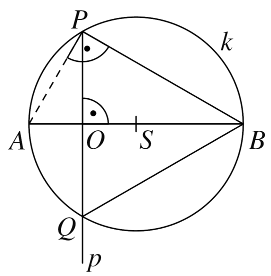
Výsledek: Vepište dané kružnici pravidelný trojúhelník $A_1A_6A_{11}$ a pravidelný pětiúhelník $A_1A_4A_7A_{10}A_{13}$. Úsečka A_6A_7 je stranou pravidelného patnáctiúhelníku $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}A_{13}A_{14}A_{15}$ (obr. 8.6).



Obrázek 8.6

8.5 Dokažte, že přibližná délka strany pravidelného sedmiúhelníku (viz str. 131) je rovna polovině délky strany rovnostranného trojúhelníku vepsaného téže kružnici.

Návod: Vyjděte od obrázku příslušné konstrukce v učebnici (obrázek 8.7 na str. 131). Druhý průsečík přímky AS s kružnicí k označte B a druhý průsečík přímky p s kružnicí k označte Q (obr. 8.7). Vyjádřete délky úseček OP, PQ a PB v závislosti na poloměru r kružnice k, užijte *Eukleidovy věty* (věty 6.8 a 6.9, str. 103–104).



Obrázek 8.7

Výsledek: $|OP| = \frac{r}{2}\sqrt{3}$, $|PB| = r\sqrt{3} = 2|OP| = |PQ|$ tedy trojúhelník PQB je rovnostranný a $|OP|$ je rovna polovině délky jeho strany.

8.6 Početně určete, jak moc jsou popsané přibližné konstrukce pravidelného sedmiúhelníku (str. 131), pravidelného devítiúhelníku (str. 132) a rektifikace kružnice (str. 132) nepřesné.

Návod: Búno uvažujte jednotkový poloměr dané kružnice (opsané, resp. té, kterou chceme rektifikovat). Vyjádřete délky stran pravidelného sedmiúhelníku a pravidelného devítiúhelníku i délku poloviny kružnice přesně (např. užitím goniometrických funkcí) a tak, jak je sestrojena přibližnou metodou. Následně určete podíl obou hodnot, výsledek zaokrouhlete tak, abyste viděli počet nulových desetinných míst.

Výsledek: Přesné hodnoty jsou označeny a, přibližné x.

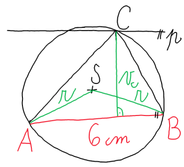
Pravidelný sedmiúhelník: $a = 2\sin\frac{180^\circ}{7}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{a}{x} \doteq 1{,}002$. Chyba tedy vzniká až v řádu tisícin.

Pravidelný devítiúhelník: $a = 2\sin 20°$, $x = \sqrt{2 + \dfrac{(7-8\sqrt{3})\sqrt{5+2\sqrt{3}}}{13}}$, $\dfrac{a}{x} \doteq 1{,}002$. Chyba tedy vzniká až v řádu tisícin.

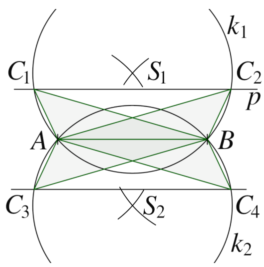
Rektifikace kružnice: $a = \pi$, $x = \sqrt{\dfrac{40}{3} - 2\sqrt{3}}$, $\dfrac{a}{x} \doteq 1{,}000\,02$. Chyba tedy vzniká až v řádu statisícin.

8.7 Je dána úsečka AB délky 6 cm. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li $v_c = 2$ cm a $r = 4$ cm, kde r značí poloměr kružnice opsané.[2]

Návod: Jedná se o polohovou úlohu, nejprve tedy sestrojte úsečku AB. Bod C je potom průsečíkem ekvidistanty p přímky AB a kružnice $k(S;\ 4\,\text{cm})$ opsané trojúhelníku ABC, kde ekvidistanta p je množinou všech bodů, které mají od přímky AB vzdálenost 2 cm, a trojúhelník ABS sestrojíte dle konstrukce sss (viz str. 126–127).



Výsledek: Úloha má čtyři řešení: $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$, $\triangle ABC_3$, $\triangle ABC_4$ (obr. 8.8).

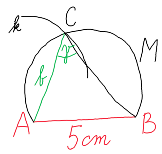


Obrázek 8.8

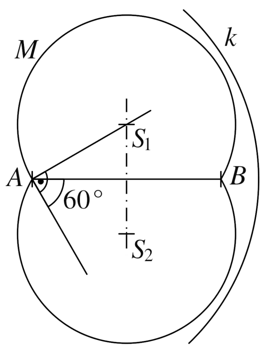
[2]Kompletní řešení úloh 8.7 až 8.12 by mělo obsahovat rozbor, zápis konstrukce, konstrukci a závěr. Zde jako návod uvádíme v podstatě stručný rozbor s náčrtkem a jako výsledek pouze obrázek s konstrukcí a závěr. Obrázky jsou rýsovány dle zadaných údajů, avšak v různých poměrech dle potřeby zmenšeny. Postup konstrukce, který lze zpravidla zapsat více způsoby, ponecháváme na čtenáři, přičemž v obrázcích konstrukcí jsou zakresleny a popsány i objekty, o nichž se v rozboru nepíše, ale jsou potřeba k zapsání postupu konstrukce.

8.8 Je dána úsečka AB délky 5 cm. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li $b = 6$ cm, $\gamma = 60°$.

Návod: Jedná se o polohovou úlohu, nejprve tedy sestrojte úsečku AB. Bod C je potom průsečíkem množiny M všech bodů, z nichž je úsečka AB vidět pod úhlem 60°, a kružnice $k(A;\ 6\,\text{cm})$.



Výsledek: Množina M a kružnice k nemají žádný společný bod, úloha nemá řešení (obr. 8.9).



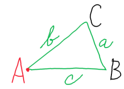
Obrázek 8.9

8.9 Jen na základě rozboru nejprve odhadněte počet řešení úlohy, poté, pokud to lze, ověřte svůj odhad konstrukcí:

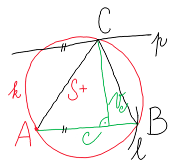
(a) Je dán bod A. Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže $a = 4$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm.

(b) Je dána kružnice $k(S, 4\ \text{cm})$ a bod $A \in k$. Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže $v_c = 1$ cm, $c = 6$ cm a k je kružnice trojúhelníku ABC opsaná.

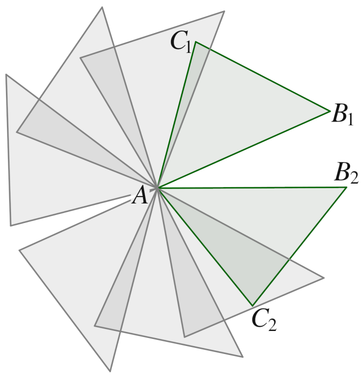
Návod: (a) Jedná se o konstrukci trojúhelníku typu *sss* (viz str. 126–127), stačí tedy ověřit, že je splněna trojúhelníková nerovnost (viz ZT 9, str. 25). Úloha je zadána polohově, jako řešení počítejte všechna možná umístění trojúhelníku ABC.



(b) Jedná se o polohovou úlohu, začněte tedy kružnicí k a jejím bodem A. Bod B poté sestrojíte jako průsečík kružnic k a $l(A; c)$. Bod C je průsečíkem kružnice k a ekvidistanty p přímky AB, přičemž p je množinou všech bodů, které mají od přímky AB vzdálenost v_c.

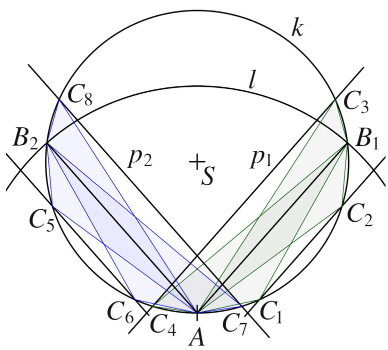


Výsledek: (a) Úloha má nekonečně mnoho řešení; řešením je každý trojúhelník získaný rotací trojúhelníku AB_1C_1 nebo trojúhelníku AB_2C_2 okolo bodu A o libovolný úhel (v obrázku 8.10 jsou sestrojeny trojúhelníky AB_1C_1, AB_2C_2 a ke každému z nich další tři trojúhelníky získané uvedenou rotací).



Obrázek 8.10

(b) Úloha má osm řešení: $\triangle AB_1C_1$, $\triangle AB_1C_2$, $\triangle AB_1C_3$, $\triangle AB_1C_4$, $\triangle AB_2C_5$, $\triangle AB_2C_6$, $\triangle AB_2C_7$, $\triangle AB_2C_8$ (obr. 8.11).



Obrázek 8.11

8.10 Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže:

(a) $c = 6\,\text{cm}$, $v_c = 2\,\text{cm}$, $r = 4\,\text{cm}$;

(b) $\gamma = 90°$, $\alpha = 60°$, $\varrho = 1{,}5\,\text{cm}$;

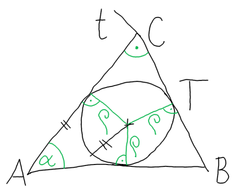
(c) $c = 5\,\text{cm}$, $t_a = 6\,\text{cm}$, $t_b = 3\,\text{cm}$;

(d) $c = 7\,\text{cm}$, $v_a = 6{,}5\,\text{cm}$, $\alpha = 30°$;

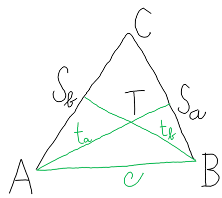
(e) $c = 8\,\text{cm}$, $v_c = 1{,}5\,\text{cm}$, $\gamma = 120°$.

Návod: (a) Úloha je nepolohovou variantou úlohy 8.7 výše, můžeme postupovat stejně.

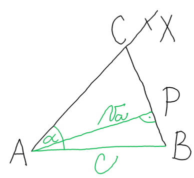
(b) Nejprve sestrojte úhel α s vrcholem A o velikosti $60°$. Poté sestrojte kružnici $k(S;\ \varrho)$, která se dotýká ramen tohoto úhlu, a nakonec tečnu t kružnice k v bodě T, kde T je krajní bod průměru kružnice k rovnoběžného s jedním z ramen úhlu α a zároveň je $|AT| > |AS|$. Body B, C jsou průsečíky přímky t s rameny úhlu α, přičemž úhel ACB musí být pravý.



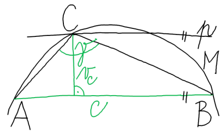
(c) Nejprve sestrojte trojúhelník ABT (sss, str. 126–127), kde T je těžiště trojúhelníku ABC. Bod C je průsečíkem polopřímek AS_a, BS_b, kde $S_a \in \longmapsto AT \wedge$ $\wedge\ |AS_a| = t_a$ a $S_b \in \longmapsto BT\ \wedge\ |BS_b| = t_b$.



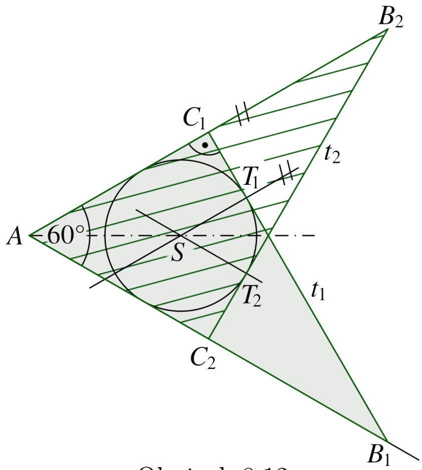
(d) Označte P patu výšky v_a. Sestrojte trojúhelník ABP (Ssu, viz str. 127). Bod C je průsečíkem přímky BP s polopřímkou AX, kde $|\sphericalangle BAX| = \alpha$.



(e) Začněte stranou AB. Bod C je potom průsečíkem ekvidistanty p přímky AB, kde p je množina bodů vzdálených $1{,}5\,\text{cm}$ od přímky AB, a množiny M bodů, z nichž je úsečka AB vidět pod úhlem $120°$ (viz str. 118).

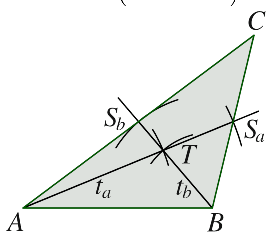


Výsledek: (a) Úloha má dvě řešení: $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_3$ (obr. 8.8). (b) Úloha má jedno řešení: $\triangle AB_1C_1$ (obr. 8.12).



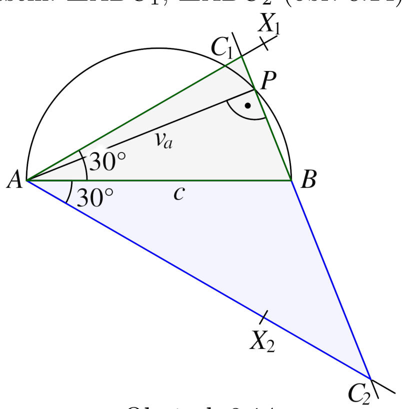
Obrázek 8.12

(c) Úloha má jedno řešení: $\triangle ABC$ (obr. 8.13).



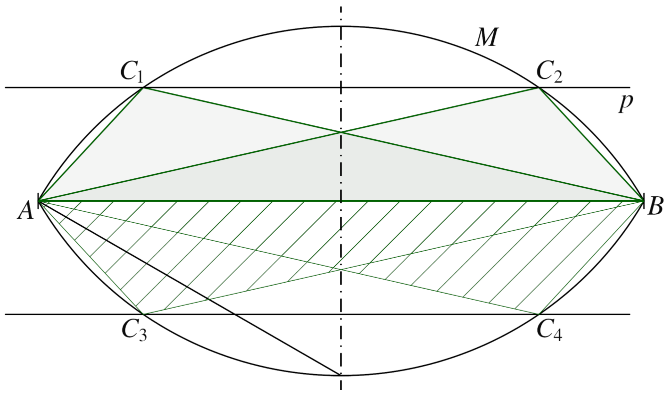
Obrázek 8.13

(d) Úloha má dvě řešení: $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$ (obr. 8.14).



Obrázek 8.14

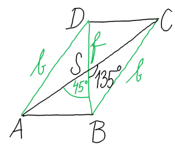
(e) Úloha má dvě řešení: $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$ (obr. 8.15).



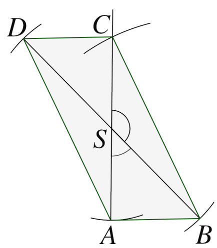
Obrázek 8.15

8.11 Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, jestliže $b = 4\,\text{cm}$, $f = 5\,\text{cm}$, $|\sphericalangle ASB| = 45°$.

Návod: Úhel ASC, kde S je průsečík úhlopříček rovnoběžníku $ABCD$, je přímý, proto $|\sphericalangle BSC| = 135°$. Sestrojte nejprve trojúhelník SBC (Ssu, viz str. 127). Body A, D poté leží po řadě na polopřímkách CS, BS a zároveň je bod S středem úsečky AC i BD.



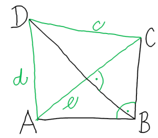
Výsledek: Úloha má jedno řešení: rovnoběžník $ABCD$ (obr. 8.16).



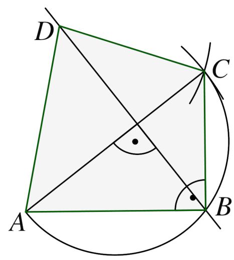
Obrázek 8.16

8.12 Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$, je-li $c = 4\,\text{cm}$, $d = 5\,\text{cm}$, $e = 6\,\text{cm}$, $|\sphericalangle ASB| = 90°$, $\beta = 90°$.

Návod: Začněte trojúhelníkem ACD (*sss*, viz str. 126–127). Bod B je průsečíkem kolmice k k přímce AC vedené bodem D a *Thalétovy kružnice* nad průměrem AC (viz str. 53).



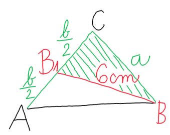
Výsledek: Úloha má jedno řešení: (konvexní) čtyřúhelník $ABCD$ (obr. 8.17).



Obrázek 8.17

8.13 Je dána úsečka BB_1, jejíž délka je 6 cm. Proveďte diskusi konstrukce trojúhelníku ABC, pro který je $\overline{BB_1}$ těžnicí t_b, $a = 8\,\text{cm}$ a $|AC| = b\,\text{cm}$, kde $b \in \mathbb{R}^+$.

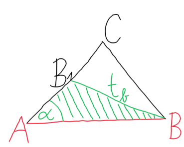
Návod: Zaměřte se na trojúhelník BCB_1 a využijte *trojúhelníkovou nerovnost* (viz ZT 9, str. 25).



Výsledek: Pro $b \in (0; 4\rangle \cup \langle 28; \infty)$ úloha nemá řešení, pro $b \in (4; 28)$ má úloha dvě řešení (údaje jsou uvedeny v cm).

8.14 Je dána úsečka AB délky 6 cm. Proveďte diskusi konstrukce trojúhelníku ABC, pro který platí: $t_b = 3\,\text{cm}$, $\alpha \in (0; 180°)$.

Návod: Zaměřte se na trojúhelník ABB_1 a zamyslete se, kdy bude tento trojúhelník pravoúhlý.



Výsledek: Pro $\alpha \in (0°; 30°)$ má úloha čtyři řešení, pro $\alpha = 30°$ má úloha dvě řešení a pro $\alpha \in (30°; 180°)$ úloha nemá řešení.

8.15 Je dána jednotková úsečka OP a úsečky o délkách a, b ($a > b > |OP|$). Sestrojte úsečku AB o délce:

(a) $\sqrt{a^2 + b^2}$,

(b) $\sqrt{a^2 - b^2}$,

(c) $\sqrt{ab}$,

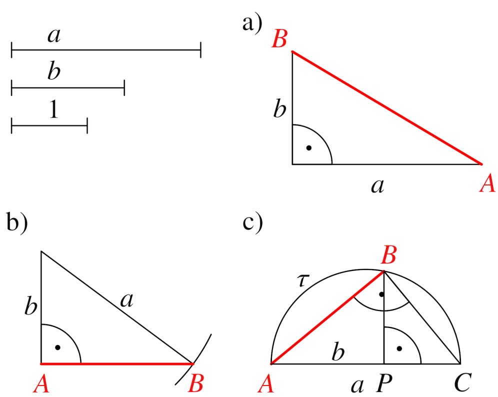
(d) $\dfrac{a}{b}$,

(e) ab.

Návod: (a), (b) Využijte pravoúhlý trojúhelník, jehož dvě strany mají délky a a b, a *Pýthagorovu větu* (věta 6.5, str. 100).

(c) Využijte jednu z *Eukleidových vět*, např. *o odvěsně* (věta 6.9, str. 104).

(d), (e) Využijte podobnost trojúhelníků se společným vrcholem a stranami ležícími na ramenou téhož úhlu.



Obrázek 8.18

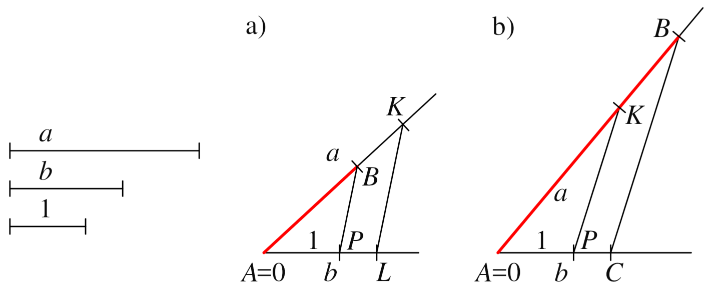
Výsledek: (a) Úsečka AB je přeponou pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami a, b (obr. 8.18a).

(b) Úsečka AB je odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku s přeponou a a odvěsnou b (obr. 8.18b).

(c) Úsečka AB je odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku s přeponou AC o délce a a úsekem b přepony přilehlým k hledané odvěsně. Bod B je průsečíkem *Thalétovy kružnice* τ nad úsečkou AC (viz str. 53) a kolmice vedené k úsečce AC krajním bodem P úseku o délce b (obr. 8.18c).

(d) $|AB| : 1 = a : b$, v obrázku 8.19a je využita podobnost trojúhelníků ABP, AKL podle věty *uu* (viz ZT 16, str. 30), velikost úhlu při vrcholu A je volena libovolně.

(e) $|AB| : b = a : 1$, v obrázku 8.19b je využita podobnost trojúhelníků ABC, AKP podle věty *uu* (viz ZT 16, str. 30), velikost úhlu při vrcholu A je volena libovolně.

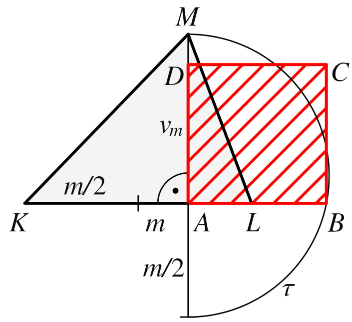


Obrázek 8.19

8.16 Sestrojte čtverec $ABCD$ o stejném obsahu, jako má daný různostranný ostroúhlý trojúhelník KLM.

Návod: Pro obsah trojúhelníku užijte vztah (6.1) ze strany 94. K sestrojení strany čtverce využijte jednu z *Eukleidových vět*, např. *o výšce* (věta 6.8, str. 103).

Výsledek: Pro délku $|AB|$ strany čtverce $ABCD$ platí: $|AB| = \sqrt{v_m \cdot \dfrac{m}{2}}$, kde v_m je výška na stranu m trojúhelníku KLM. Úsečka AB je tedy výškou na přeponu pravoúhlého trojúhelníku s úseky přepony o délkách v_m, $\dfrac{m}{2}$. Krajní bod této výšky leží na *Thalétově kružnici* τ (viz str. 53) nad úsečkou o délce $v_m + \dfrac{m}{2}$ (obr. 8.20).

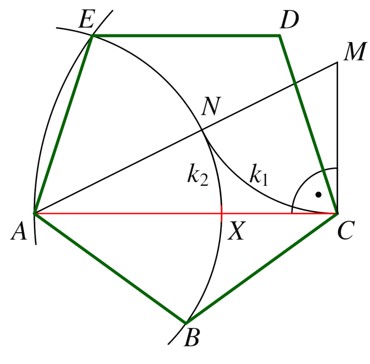


Obrázek 8.20

8.17 Sestrojte pravidelný pětiúhelník $ABCDE$, je-li $|AC| = 6\,\mathrm{cm}$.

Návod: Rozdělte úsečku AC ve zlatém řezu (viz str. 136–137) a využijte délku větší části rozdělené úsečky.

Výsledek: Dělí-li bod X úsečku AC ve zlatém řezu tak, že $|AX| > |XC|$, je délka strany hledaného pětiúhelníku rovna $|AX|$. Lze tedy postupně sestrojit trojúhelníky ABC, ACE, ECD (*sss*, viz str. 126–127) (obr. 8.21).



Obrázek 8.21

9 Shodnosti

9.1 Je dán čtverec $ABCD$. Ve kterých osových souměrnostech má jeho hranice (tj. uzavřená lomená čára $ABCDA$)

(a) právě dva samodružné vrcholy,

(b) právě jednu samodružnou úsečku s krajními body ve vrcholech čtverce,

(c) právě dvě samodružné úsečky s krajními body ve vrcholech čtverce?

Návod: Využijte toho, že množinou všech samodružných bodů v osové souměrnosti je osa této souměrnosti. V úloze (c) uvažujte slabě samodružné úsečky (viz str. 154).

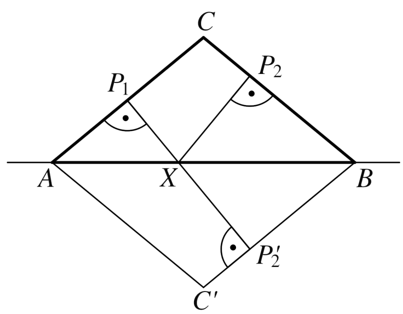
Výsledek: (a) $\mathcal{O}(\longleftrightarrow AB)$, $\mathcal{O}(\longleftrightarrow BC)$, $\mathcal{O}(\longleftrightarrow CD)$, $\mathcal{O}(\longleftrightarrow AD)$, $\mathcal{O}(\longleftrightarrow AC)$, $\mathcal{O}(\longleftrightarrow BD)$;

(b) $\mathcal{O}(\longleftrightarrow AB)$, $\mathcal{O}(\longleftrightarrow BC)$, $\mathcal{O}(\longleftrightarrow CD)$, $\mathcal{O}(\longleftrightarrow AD)$;

(c) $\mathcal{O}(o_{AB})$, $\mathcal{O}(o_{BC})$, kde o_{AB}, o_{BC} jsou osy úseček AB, BC.

9.2 Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Dokažte, že součet vzdáleností každého bodu X úsečky AB od přímek AC a BC je konstantní.

Návod: Označte paty kolmic vedených z bodu X na strany AC, BC po řadě P_1, P_2 a využijte $\mathcal{O}(\longleftrightarrow AB)\colon\ C \longrightarrow C',\ P_2 \longrightarrow P_2'$ (obr. 9.1).



Obrázek 9.1

Výsledek: Čtyřúhelník $AC'BC$ je kosočtverec. Platí: $|P_1X| + |XP_2| = |P_1X| + |XP_2'| = |P_1P_2'| = |\longleftrightarrow AC, \longleftrightarrow C'B| =$ konst. pro libovolný bod $X \in AB$.

9.3 Je dán ostrý úhel XVY a jeho vnitřní bod C. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy A, B ležely po řadě na polopřímkách VX, VY a obvod trojúhelníku ABC byl minimální.

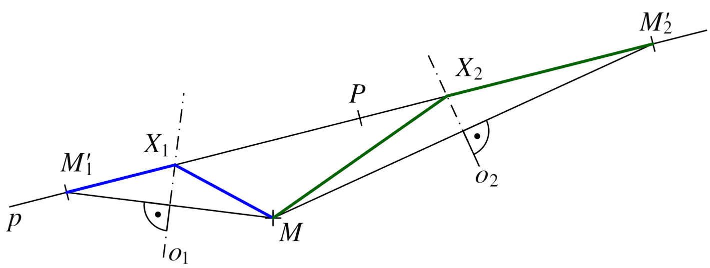
Návod: Sestrojte obraz bodu C v $\mathcal{O}(\longleftrightarrow VX)$ a v $\mathcal{O}(\longleftrightarrow VY)$.

Výsledek: Obraz bodu C v první osové souměrnosti označte C', ve druhé C''. Body A, B jsou po řadě průsečíky přímky $C'C''$ s polopřímkami VX, VY.

9.4 Je dán bod M, přímka p a bod $P \in p$ tak, že $|Mp| = 2\,\text{cm} \wedge |PM| = 3{,}5\,\text{cm}$. Sestrojte všechny body $X \in p$ takové, že $|PX| + |XM| = 8\,\text{cm}$.

Návod: Setrojte bod $M' \in p$ tak, aby $|PM'| = 8\,\text{cm}$, a použijte takovou osovou souměrnost, v níž je bod M' obrazem bodu M.

Výsledek: Bod X je průsečíkem osy $o_{MM'}$ úsečky MM' s přímkou p. Úloha má dvě řešení, v obrázku 9.2 jsou označena X_1, X_2.



Obrázek 9.2

9.5 Je dána kružnice $k(S, r)$ a bod A, který na ní neleží. Určete množinu všech bodů X takových, že bod A je středem úsečky XY a $Y \in k$.

Návod: Využijte $\mathcal{S}(A)$.

Výsledek: Hledanou množinou je kružnice k', která je obrazem kružnice k ve středové souměrnosti se středem A.

9.6 Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod M. Sestrojte všechny úsečky XY se středem M a s krajními body X, Y ležícími na hranici trojúhelníku ABC.

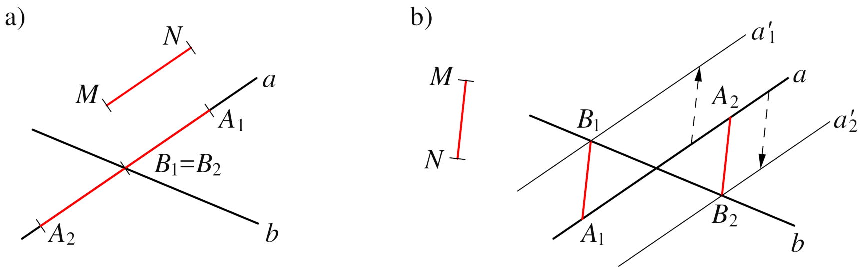
Návod: Využijte $\mathcal{S}(M)$.

Výsledek: Krajními body hledaných úseček jsou průsečíky hranice trojúhelníku ABC a hranice jeho obrazu ve $\mathcal{S}(M)$. Úloha může mít jedno, dvě nebo tři řešení.

9.7 Jsou dány různoběžky a, b a úsečka MN. Sestrojte úsečku AB shodnou a rovnoběžnou s úsečkou MN tak, aby její krajní body A, B ležely po řadě na přímkách a, b.

Návod: Je-li $\overline{MN} \parallel a$, je bod B průsečíkem přímek a, b. Jinak sestrojte obraz a' přímky a v $\mathcal{T}(\mathsf{MN})$, resp. v $\mathcal{T}(\mathsf{NM})$.

Výsledek: Pro $\overline{MN} \parallel a$ leží úsečka AB na přímce a (obr. 9.3a). V ostatních případech je bod B průsečíkem přímek a', b (obr. 9.3b). Úloha má dvě řešení.

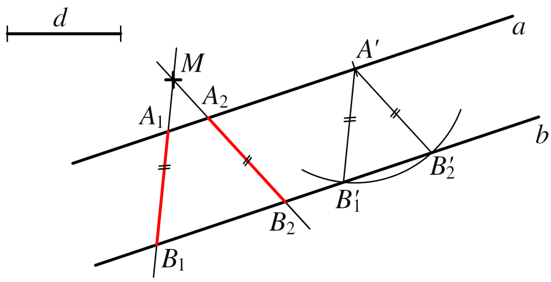


Obrázek 9.3

9.8 Jsou dány různé rovnoběžky a a b, bod M ($M \notin a \ \wedge \ M \notin b$) a úsečka délky $d > |ab|$. Bodem M veďte všechny přímky m, které protínají přímky a, b v bodech A, B tak, že $|AB| = d$.

Návod: Nejprve zvolte libovolný bod $A' \in a$ a sestrojte úsečku $A'B'$ tak, aby $|A'B'| = d \ \wedge \ B' \in b$.

Výsledek: Přímka m je rovnoběžná s úsečkou AB, úloha má 2 řešení (viz obr. 9.4).

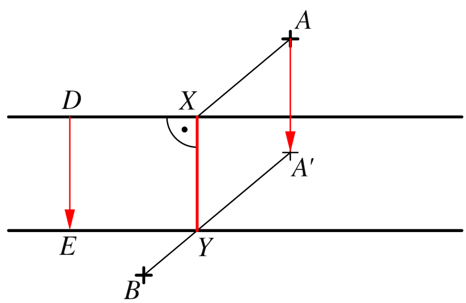


Obrázek 9.4

9.9 Vyhledejte místo na řece šířky d, ve kterém by měl stát most ve směru kolmém na tok řeky tak, aby cesta z obce A do obce B, které leží na různých stranách řeky mimo její břehy, byla nejkratší.

Návod: Využijte obraz A' bodu A v $\mathcal{T}(\mathsf{DE})$, kde body D, E jsou krajní body libovolné úsečky reprezentující šířku řeky, tj. úsečky kolmé na řeku s krajními body na jejích březích, a $|AD| < |AE|$.

Výsledek: Označte Y průsečík přímky $A'B$ s břehem řeky, který je blíže k bodu B, a X průsečík kolmice vedené bodem Y k řece s druhým břehem řeky. Potom úsečka XY představuje hledaný most (obr. 9.5).

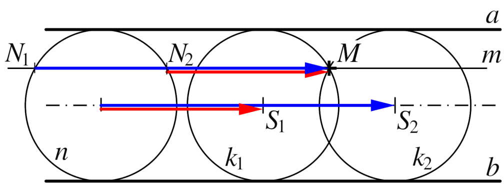


Obrázek 9.5

9.10 Uvnitř rovinného pásu určeného různými rovnoběžkami a, b je dán bod M. Sestrojte kružnici k, která prochází bodem M a dotýká se přímek a, b.

Návod: Sestrojte libovolnou kružnici n, která se dotýká přímek a, b (tzn., že její střed leží na ose rovinného pásu určeného rovnoběžkami a, b). Poté využijte posunutí o vhodnou orientovanou úsečku rovnoběžnou s přímkami a, b.

Výsledek: Označte N průsečík přímky m, kde $m \parallel a \ \wedge \ M \in m$, a kružnice n. Potom k je obrazem n v $\mathcal{T}(\mathsf{NM})$. Úloha má dvě řešení (obr. 9.6).



Obrázek 9.6

9.11 Specifikujte střed a úhel otočení, v němž je samodružný/á

(a) rovnostranný trojúhelník,

(b) čtverec,

(c) kružnice.

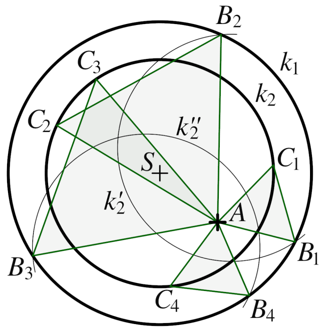
Návod: Jako středy rotace zvažujte středy daných útvarů. Nezapomeňte na to, že rotace může být i identitou.

Výsledek: Rotace (okolo libovolného bodu) o orientovaný úhel o velikosti $k \cdot 360°$, kde $k \in \mathbb{Z}$, je identitou, tedy v těchto rotacích jsou samodružné všechny tři zadané útvary. Dále pak (a) střed rovnostranného trojúhelníku (tj. těžiště) a orientovaný úhel o velikosti $k{\cdot}120°$, $k \in \mathbb{Z}$; (b) střed čtverce (tj. průsečík úhlopříček) a orientovaný úhel o velikosti $k \cdot 90°$, $k \in \mathbb{Z}$; (c) střed kružnice a orientovaný úhel o libovolné velikosti α, $\alpha \in \mathbb{R}$.

9.12 Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(S, 4\,\mathrm{cm})$, $k_2(S, 3\,\mathrm{cm})$ a bod A, kde $|SA| = 2\,\mathrm{cm}$. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC tak, aby $B \in k_1 \ \wedge \ C \in k_2$.

Návod: Použijte $\mathscr{R}(A, \pm 60^\circ)$.

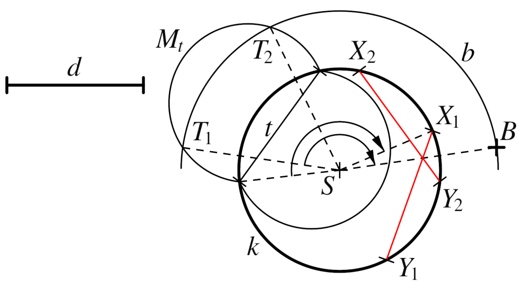
Výsledek: Bod B je průsečíkem kružnic k_1, k_2', kde k_2' je obrazem k_2 v rotaci $\mathscr{R}$. Úloha má 4 řešení (obr. 9.7).



Obrázek 9.7

9.13 Je dána kružnice $k(S, r)$, bod B a úsečka délky $d < 2r$. Sestrojte tětivu XY kružnice k délky d tak, aby byla vidět z bodu B pod úhlem o velikosti 60°.

Návod: Sestrojte libovolnou tětivu t délky d kružnice k a množinu bodů M_t, z nichž je tato tětiva vidět pod úhlem o velikosti 60°. Poté užijte rotaci se středem S o vhodný orientovaný úhel.



Obrázek 9.8

Výsledek: Tětiva XY je obrazem tětivy t v rotaci $\mathscr{R}(S, \widehat{TSB})$, kde T je průsečík M_t s kružnicí $b(S;\ |SB|)$. Úloha může mít dvě (obr. 9.8), jedno, nebo žádné řešení, záleží na poloze bodu B.

9.14 Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže:[3]

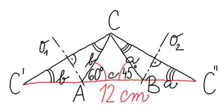
(a) $o = 12\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, kde o značí obvod $\triangle ABC$,

(b) $c = 4\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 60°$, $b - a = 1\,\mathrm{cm}$,

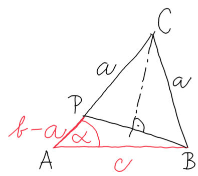
(c) $t_a = 5\,\mathrm{cm}$, $b = 7\,\mathrm{cm}$, $c = 4\,\mathrm{cm}$,

(d) $t_a = 4{,}5\,\mathrm{cm}$, $t_b = 6\,\mathrm{cm}$, $t_c = 7\,\mathrm{cm}$.

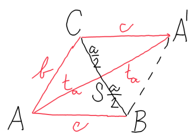
Návod: (a) Sestrojte trojúhelník $C'C''C$ (*sus*, viz str. 127), kde $|C'C''| = o$ a velikosti úhlů přilehlých ke straně $C'C''$ určíme pomocí vět 2.3 (str. 28) a 2.5 (str. 32). Bod A je potom průsečíkem osy o_1 úsečky $C'C$ se stranou $C'C''$, bod B je průsečíkem osy o_2 úsečky $C''C$ se stranou $C'C''$, neboť trojúhelníky CAC', CBC'' jsou rovnoramenné, a tudíž osově souměrné.



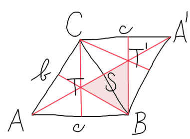
(b) Nejprve sestrojte trojúhelník ABP (*sus*, viz str. 127), kde $|AP| = b - a$ a $|\sphericalangle BAP| = \alpha$. Bod C je potom průsečíkem polopřímky AP a osy o strany BP.



(c) Nejprve sestrojte trojúhelník $AA'C$ (*sss*, viz str. 127), kde $|AA'| = 2t_a$, $|CA'| = c$. Střed úsečky AA' označte S. Bod B je obrazem bodu C ve středové souměrnosti se středem S.

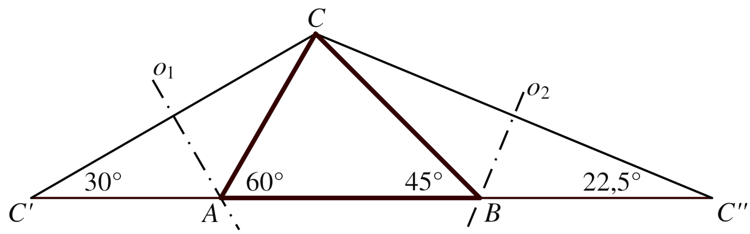


(d) Využijte obraz trojúhelníku ABC ve středové souměrnosti se středem S strany BC. Obraz těžiště T trojúhelníku ABC v téže středové souměrnosti označte T'. Nejprve sestrojte trojúhelník $BT'T$ (*sss*, viz str. 127), kde $|BT| = 4\,\mathrm{cm}$, $|BT'| = \dfrac{14}{3}\,\mathrm{cm}$ a $|TT'| = 3\,\mathrm{cm}$. Bod S je středem úsečky TT'. Bod C je obrazem bodu B ve středové souměrnosti se středem S a bod A leží na polopřímce ST ve vzdálenosti t_a od bodu S.



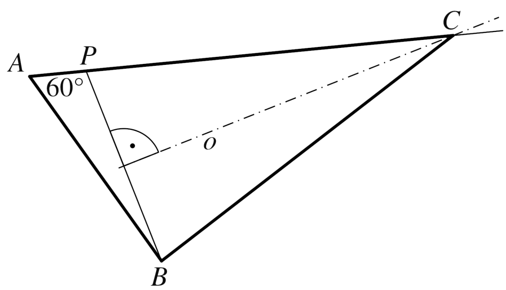
[3] Obdobně jako v kapitole 8 i zde by kompletní řešení úloh 9.14 až 9.17 mělo obsahovat rozbor, zápis konstrukce, konstrukci a závěr. Zde jako návod uvádíme de facto stručný rozbor s náčrtkem a jako výsledek obrázek s konstrukcí a závěr. V obrázcích konstrukcí jsou zakresleny a popsány i objekty, o nichž se v rozboru nepíše, ale jsou potřeba k zapsání postupu konstrukce.

Výsledek: (a) Úloha má jedno řešení: $\triangle ABC$ (obr. 9.9).



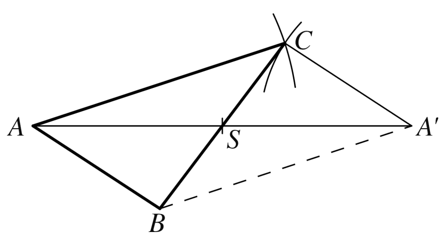
Obrázek 9.9

(b) Úloha má jedno řešení: $\triangle ABC$ (obr. 9.10).



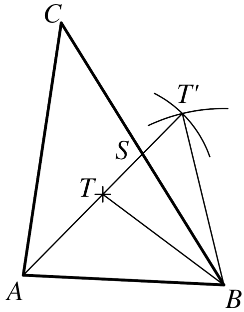
Obrázek 9.10

(c) Úloha má jedno řešení: $\triangle ABC$ (obr. 9.11).



Obrázek 9.11

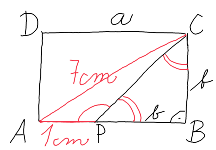
(d) Úloha má jedno řešení: $\triangle ABC$ (obr. 9.12).



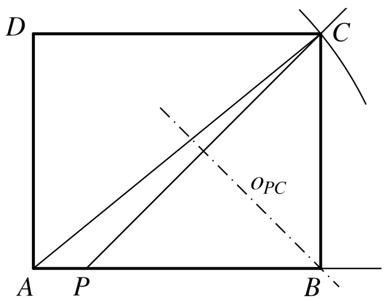
Obrázek 9.12

9.15 Sestrojte obdélník $ABCD$, jestliže $e = 7\,\text{cm}$, $a - b = 1\,\text{cm}$.

Návod: Začněte trojúhelníkem APC (Ssu, viz str. 127–128), kde $|AP| = a - b$ a $|\sphericalangle APC| = 135°$, neboť trojúhelník PBC je pravoúhlý rovnoramenný (tedy můžeme aplikovat věty 2.3, str. 28, a 2.5, str. 32). Bod B je potom průsečíkem polopřímky AP s osou o úsečky PC a bod D je obrazem bodu B ve středové souměrnosti se středem ve středu úsečky AC.



Výsledek: Úloha má jedno řešení: obdélník $ABCD$ (obr. 9.13).



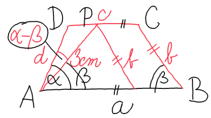
Obrázek 9.13

9.16 Sestrojte lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD, jestliže

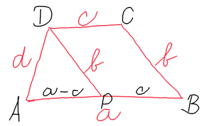
(a) $b = 3\,\text{cm}$, $c = 2{,}5\,\text{cm}$, $d = 2{,}6\,\text{cm}$, $\alpha - \beta = 20°$,

(b) $a = 6{,}5\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $c = 3\,\text{cm}$, $d = 3\,\text{cm}$.

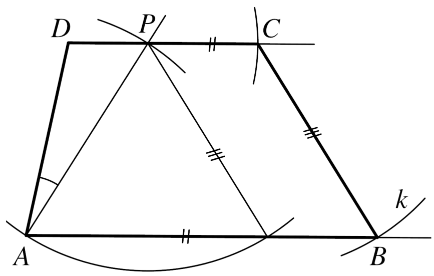
Návod: (a) Nejprve sestrojte trojúhelník APD (*sus*, viz str. 127), kde $|AP| = b$ a $|\sphericalangle PAD| = \alpha - \beta$. Bod C potom leží na polopřímce DP ve vzdálenosti 2,5 cm od bodu D a bod B je průsečíkem přímky a vedené bodem A rovnoběžně s $\overline{DP}$ a kružnice $k(C;\ b)$, přičemž $\overline{BC} \nparallel \overline{AP}$.



(b) Sestrojte trojúhelník APD (*sss*, viz str. 127), kde $|AP| = a - c$, $|PD| = b$. Bod B potom leží na polopřímce AP ve vzdálenosti a od bodu A a bod C je obrazem bodu D v $\mathcal{T}(\mathrm{PB})$.

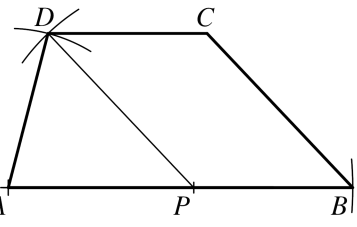


Výsledek: (a) Úloha má jedno řešení: lichoběžník $ABCD$ (obr. 9.14).



Obrázek 9.14

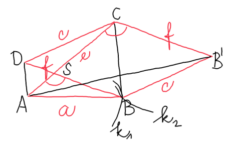
(b) Úloha má jedno řešení: lichoběžník $ABCD$ (obr. 9.15).



Obrázek 9.15

9.17 Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jestliže $a = 5\,\text{cm}$, $c = 3{,}5\,\text{cm}$, $e = 6\,\text{cm}$, $f = 5{,}5\,\text{cm}$, $|\sphericalangle ASB| = 120°$, kde S je průsečík úhlopříček čtyřúhelníku $ABCD$.

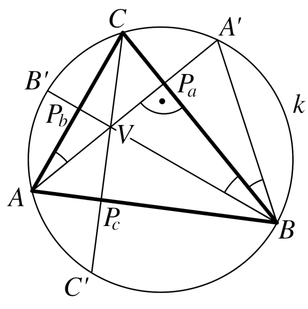
Návod: Uvažujte bod B', který je obrazem bodu B v $\mathcal{T}(\mathsf{DC})$. Nejprve sestrojte trojúhelník $AB'C$ (*sus*, viz str. 127), kde $|B'C| = f$ a $|\sphericalangle ACB'| = 120°$. Bod B je potom průsečíkem kružnic $k_1(A;\ a)$, $k_2(B';\ c)$ a bod D je obrazem bodu C v $\mathcal{T}(\mathsf{B'B})$.



Výsledek: Kružnice k_1, k_2 se neprotnou, úloha tedy nemá řešení. Pro jiné zadané rozměry by mohla mít až dvě řešení.

9.18 Dokažte, že v trojúhelníku ABC leží obrazy ortocentra v osových souměrnostech s osami AB, BC, AC na kružnici trojúhelníku ABC opsané.

Návod: Označte V ortocentrum, k kružnici opsanou a A' její průsečík s přímkou AV různý od bodu A. Dokažte, že bod A' je obrazem bodu A v osové souměrnosti s osou BC. Využijte postupně větu 3.8 (str. 56) pro úhly $A'BC$ a $A'AC$, podobnost trojúhelníků P_aCA a P_bCB, kde body P_a, P_b jsou po řadě paty výšek v_a, v_b, a shodnost trojúhelníků VP_aB, $A'P_aB$ (obr. 9.16).



Obrázek 9.16

Výsledek: Z věty 3.8 (str. 56) plyne, že $|\sphericalangle A'BC| = |\sphericalangle A'AC|$, označte tuto velikost δ. Z podobnosti trojúhelníků P_aCA, P_bCB (*uu*, viz ZT 16, str. 30) plyne dále, že $\delta = |\sphericalangle P_bBC| = |\sphericalangle VBP_a|$. Tedy trojúhelníky VP_aB, $A'P_aB$ jsou shodné dle *usu* (ZT 12, str. 29), a proto je $|A'P_a| = |VP_a|$, neboli bod A' je obrazem bodu V v osové souměrnosti s osou BC. Pro obrazy ortocentra v dalších dvou osových souměrnostech postupujte analogicky, resp. užijte *cyklickou záměnu* (str. 28).

9.19 Sestrojte libovolnou dvojici (a) přímo shodných, (b) nepřímo shodných trojúhelníků ABC, $A'B'C'$ tak, aby $A \neq A' \ \wedge\ B \neq B' \ \wedge\ C \neq C'$, a sestrojte osy osových souměrností, jejichž složením se jeden trojúhelník zobrazí na druhý.

Návod: Skládejte postupně takové osové souměrnosti, v nichž se vždy jeden z vrcholů aktuálního trojúhelníku zobrazí do odpovídajícího vrcholu trojúhelníku $A'B'C'$.

Výsledek: Nejprve pracujte s osou o_1 úsečky AA', tedy $\mathscr{O}(o_1)\colon \triangle ABC \to$ $\to \triangle A'B_1C_1$. Pokud je $B_1 \neq B'$ použijte dále osu o_2 úsečky B_1B' atd.

9.20 V rovině je dáno pět různých bodů S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, které neleží v přímce. Sestrojte všechny uzavřené lomené čáry $ABCDEA$, pro něž jsou body S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 po řadě středy stran AB, BC, CD, DE, EA.

Návod: Sestrojte libovolnou lomenou čáru $A'B'C'D'E'F'$ takovou, že body S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 jsou po řadě středy úseček $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, $E'F'$ a využijte body A', F' k nalezení bodu A.

Výsledek: Bod A je středem úsečky $A'F'$.

9.21 Ukažte, že posunutá souměrnost $\mathscr{P}$ se dá složit ze středové souměrnosti $\mathscr{S}(S)$ a osové souměrnosti $\mathscr{O}(o)$, kde $S \notin o$, v libovolném pořadí.

Návod: Uvědomte si, ve kterých případech získáme složením dvou osových souměrností posunutí a středovou souměrnost.

Výsledek: Posunutou souměrnost jsme definovali jako zobrazení složené z osové souměrnosti $\mathscr{O}(o)$ a posunutí $\mathscr{T}(\mathsf{AB})$, kde $\overline{AB} \parallel o$ (str. 165). Dále z důkazu věty 9.12 (str. 172) víme, že posunutí lze složit ze dvou osových souměrností s rovnoběžnými různými osami a středovou souměrnost získáme složením dvou osových souměrností s navzájem kolmými osami. Z uvedených informací již vyplývá, že posunutou souměrnost lze získat také složením středové a osové souměrnosti.

9.22 Jaké zobrazení získáme složením $\mathscr{O}(o)$ a $\mathscr{T}(\mathsf{AB})$, kde

(a) $\overline{AB} \perp o$,

(b) $|\sphericalangle \longleftrightarrow AB, o| = 60°$?

Návod: Situaci si načrtněte.

Výsledek: (a) Osová souměrnost s osou p, kde $p \parallel o \ \wedge \ |op| = \dfrac{|AB|}{2}$.

(b) Posunutá souměrnost s osou p a orientovanou úsečkou KL, kde $p \parallel o \wedge$ $\wedge \ |op| = \dfrac{|AB|\sqrt{3}}{4}$ a $|KL| = \dfrac{|AB|}{2}$.

9.23 Jaká/é shodnost/i je/jsou, resp. může/mohou být, určena/y

(a) třemi samodružnými nekolineárními body,

(b) dvěma různými samodružnými body,

(c) právě jedním samodružným bodem?

Návod: Zamyslete se nad definicemi jednotlivých shodností. Čím jsou jednoznačně určeny? Které body jsou samodružné?

Výsledek: (a) identita; (b) osová souměrnost, identita; (c) středová souměrnost.

10 Podobnosti

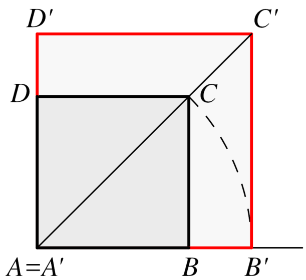
10.1 Je dán čtverec $ABCD$ o straně dlouhé 4 cm. Sestrojte jeho obraz ve stejnolehlosti

(a) $\mathscr{H}(A, \sqrt{2})$,

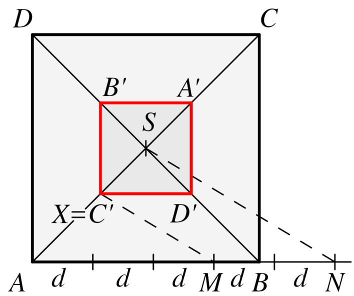
(b) $\mathscr{H}(S, -\frac{2}{5})$, kde S je průsečík úhlopříček AC, BD.

Návod: (a) Využijte délku úhlopříčky daného čtverce. (b) K sestrojení úsečky o délce $\frac{2}{5}$ dané délky využijte podobnost trojúhelníků.

Výsledek: (a) Bod A je samodružný, pro jeho obraz A' tedy platí, že $A' = A$. Obraz B' bodu B leží na polopřímce AB a zároveň je $|A'B'| = |AC|$, neboť $|AC| = \sqrt{2}|AB|$. Další postup je již zřejmý z obrázku 10.1, výsledkem je čtverec $A'B'C'D'$.



Obrázek 10.1



Obrázek 10.2

(b) Obraz A' bodu A leží na polopřímce SC a zároveň je $|A'S| = \frac{2}{5}|AS| = |SX|$. K sestrojení bodu X byla v obrázku 10.2 použita podobnost trojúhelníků ANS, AMX, kde $|AN| = 5d$ a $|AM| = 3d$, přičemž délku d lze volit libovolně.

10.2 Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže

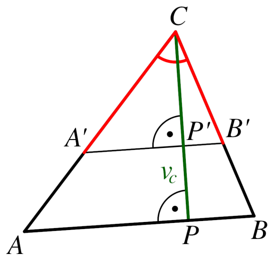
(a) $b : a = 5 : 4$, $\gamma = 60°$, $v_c = 5\,\text{cm}$,

(b) $a : b : c = 7 : 4 : 5$, $v_b = 4\,\text{cm}$.

Návod: (a) Sestrojte libovolný trojúhelník $A'B'C$ takový, že $b' : a' = 5 : 4$ a $|\sphericalangle A'CB'| = \gamma$ (*sus*). Poté využijte stejnolehlost se středem C.

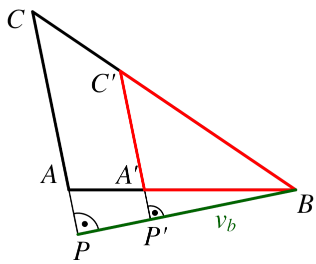
(b) Sestrojte libovolný trojúhelník $A'BC'$ takový, že $a' : b : c' = 7 : 4 : 5$ (sss). Poté využijte stejnolehlost se středem B.

Výsledek: (a) Patu výšky na stranu $A'B'$ trojúhelníku $A'B'C$ označte P'. Pata P výšky v_c hledaného trojúhelníku ABC potom leží na polopřímce CP' a body A, B odpovídají bodům A', B' ve stejnolehlosti se středem C a koeficientem $\dfrac{|CP'|}{|CP|}$ (obr. 10.3).



Obrázek 10.3

(b) Patu výšky na stranu $A'C'$ trojúhelníku $A'BC'$ označte P'. Pata P výšky v_b hledaného trojúhelníku ABC potom leží na polopřímce BP' a body A, C odpovídají bodům A', C' ve stejnolehlosti se středem B a koeficientem $\dfrac{|BP'|}{|BCP|}$ (obr. 10.4).

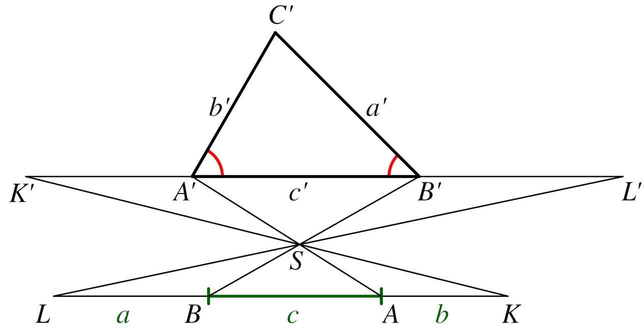


Obrázek 10.4

10.3 Užitím stejnolehlosti řešte úlohu 9.14a (str. 73 tohoto textu).

Návod: Sestrojte libovolný trojúhelník $A'B'C'$, jehož vnitřní úhly mají velikosti $60°$, $45°$ (a $75°$) a využijte úsečku $K'L'$, jejíž délka je součtem délek stran tohoto trojúhelníku. Úsečku $K'L'$ umístěte například tak, že $A'B' \subset K'L' \ \wedge \ |K'A'| = |A'C'| \ \wedge \ |B'L'| = |B'C'|$.

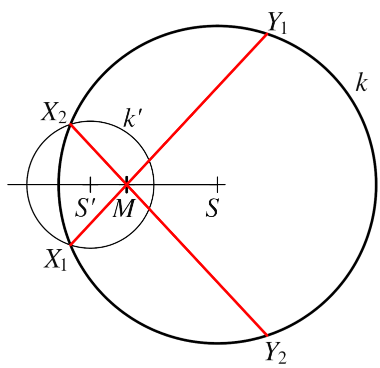
Výsledek: Sestrojte úsečku KL dlouhou 12 cm rovnoběžně s úsečkou $K'L'$ a nalezněte střed (vnitřní nebo vnější, viz str. 179) jedné ze stejnolehlostí, v níž si úsečky $K'L'$, KL odpovídají. Potom body, které v této stejnolehlosti odpovídají bodům A', B', jsou vrcholy A, B hledaného trojúhelníku ABC (obr. 10.5).



Obrázek 10.5

10.4 Je dána kružnice $k(S, 3{,}5\,\text{cm})$ a bod M, kde $|SM| = 2\,\text{cm}$. Sestrojte všechny tětivy kružnice k, které procházejí bodem M a jsou jím děleny v poměru $2 : 5$.

Návod: Užijte stejnolehlost se středem M a koeficientem $-\dfrac{2}{5}$. V této stejnolehlosti sestrojte obraz k' kružnice k.



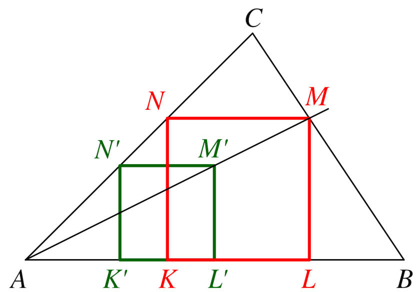
Obrázek 10.6

Výsledek: Jedním z krajních bodů hledané tětivy je průsečík kružnic k, k'. Úloha má dvě řešení (v obrázku 10.6 úsečky X_1Y_1, X_2Y_2).

10.5 Do daného ostroúhlého trojúhelníku ABC vepište čtverec $KLMN$ tak, aby $\overline{KL} \subset \overline{AB} \ \wedge \ M \in \overline{BC} \ \wedge \ N \in \overline{AC}$.

Návod: Sestrojte libovolný čtverec $K'L'M'N'$ takový, že $\overline{K'L'} \subset \overline{AB} \ \wedge$ $\wedge \ N' \in \overline{AC}$. Poté použijte stejnolehlost se středem A.

Výsledek: Bod M je průsečíkem úsečky BC a polopřímky AM'. Konstrukce zbývajících vrcholů je již zřejmá (viz obr. 10.7).



Obrázek 10.7

10.6 Sestrojte společné tečny kružnic $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, jestliže

(a) $|O_1O_2| = 9\,\text{cm}$, $r_1 = 2\,\text{cm}$, $r_2 = 5\,\text{cm}$,

(b) $|O_1O_2| = 7\,\text{cm}$, $r_1 = 2\,\text{cm}$, $r_2 = 5\,\text{cm}$,

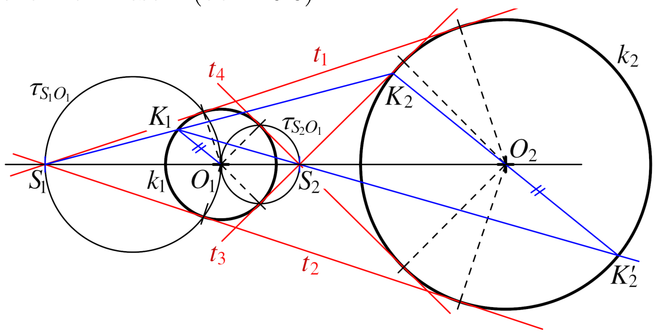
(c) $|O_1O_2| = 6\,\text{cm}$, $r_1 = 2\,\text{cm}$, $r_2 = 5\,\text{cm}$,

(d) $|O_1O_2| = 8\,\text{cm}$, $r_1 = 3\,\text{cm}$, $r_2 = 3\,\text{cm}$.

Návod: (a)–(c) Společné tečny dvou kružnic s různými poloměry, pokud existují, prochází středem stejnolehlosti těchto kružnic (viz str. 182). Nalezením středu stejnolehlosti tedy problém převedete na konstrukci tečny z bodu ke kružnici (viz str. 53).

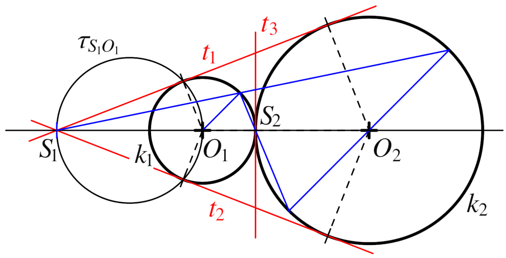
(d) Kružnice jsou shodné (a různé). Jejich společné tečny, pokud existují, procházejí středem stejnolehlosti (resp. středem souměrnosti) těchto kružnic nebo jsou rovnoběžné se střednou.

Výsledek: (a) Středy stejnolehlosti existují dva a každým prochází dvě tečny. Úloha má 4 řešení (obr. 10.8).



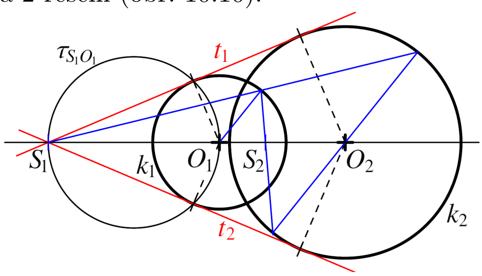
Obrázek 10.8

(b) Středy stejnolehlosti existují dva. Vnějším středem prochází dvě tečny, vnitřním středem pouze jedna – kolmá ke středné. Úloha má 3 řešení (obr. 10.9).



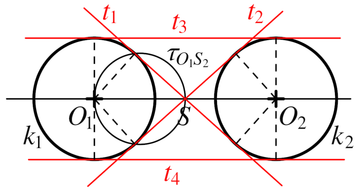
Obrázek 10.9

(c) Středy stejnolehlosti existují dva, avšak tečny lze vést pouze z vnějšího středu. Úloha má 2 řešení (obr. 10.10).



Obrázek 10.10

(d) Úloha má 4 řešení (dvě tečny procházejí středem souměrnosti daných kružnic, dvě jsou rovnoběžné se střednou daných kružnic, viz obr. 10.11).



Obrázek 10.11

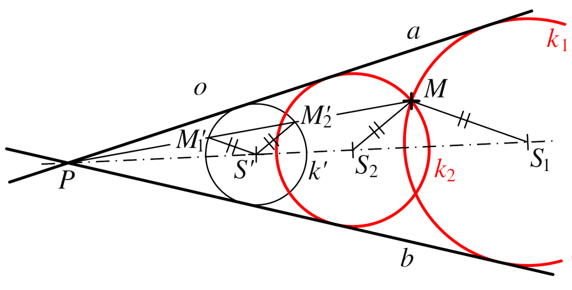
10.7 Řešte Apollóniovu úlohu Bpp v případě, kdy

(a) dané přímky jsou různoběžné a daný bod neleží na žádné z nich ani na ose daných přímek,

(b) dané přímky jsou různoběžné, daný bod leží na ose daných přímek a není to průsečík těchto přímek.

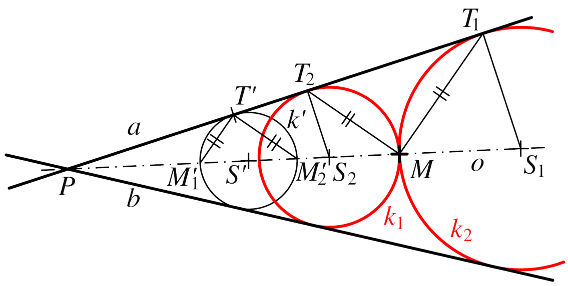
Návod: Označte dané přímky a, b a daný bod M. Sestrojte libovolně kružnici k' takovou, aby se dotýkala obou zadaných přímek a ležela ve stejném konvexním úhlu vymezeném přímkami a, b jako bod M (tj. její střed S' musí ležet na ose toho z úhlů vymezených přímkami a, b, v němž leží bod M.) Poté využijte stejnolehlost se středem P, kde P je průsečík přímek a, b, v níž se kružnice k' zobrazí na hledanou kružnici k.

Výsledek: (a) Pro střed S hledané kružnice k platí, že $\overline{SM} \parallel \overline{S'M'}$, kde M' je průsečík polopřímky PM s kružnicí k'. Úloha má dvě řešení (obr. 10.12).



Obrázek 10.12

(b) Pro bod dotyku T hledané kružnice k s přímkou a platí, že $\overline{TM} \parallel \overline{T'M'}$, kde M' je průsečík polopřímky PM s kružnicí k' a T' je bod dotyku kružnice k' s přímkou a. Úloha má dvě řešení (obr. 10.13).

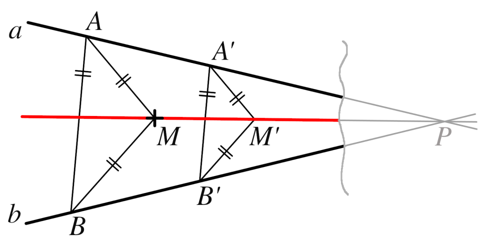


Obrázek 10.13

10.8 Jsou dány různoběžky a, b. Jejich průsečík P leží mimo nákresnu (tzv. *nedostupný průsečík*). Dále je dán bod M, který neleží na žádné z přímek a, b. Sestrojte přímku MP.

Návod: Sestrojte libovolný trojúhelník ABM takový, že $A \in a \wedge B \in b$. Poté využijte stejnolehlost se středem v nedostupném bodě P.

Výsledek: Ve stejnolehlosti se středem P sestrojte libovolný trojúhelník $A'B'M'$, který je obrazem trojúhelníku ABM (koeficient stejnolehlosti volte libovolně), tj. $A' \in a$, $B' \in b$ a odpovídající si strany trojúhelníků ABM, $A'B'M'$ jsou rovnoběžné. Přímka MP je totožná s přímkou MM' (obr. 10.14).

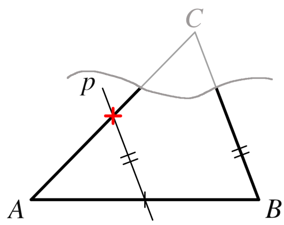


Obrázek 10.14

10.9 Vrchol C trojúhelníku ABC leží mimo nákresnu. Sestrojte střed úsečky AC.

Návod: Využijte větu 2.7 (str. 34).

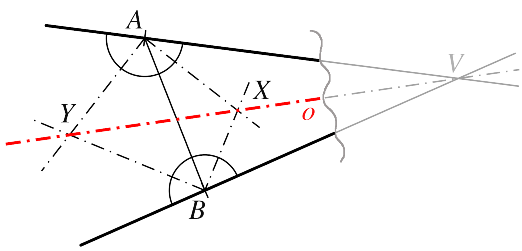
Výsledek: Střed úsečky AC je průsečíkem strany AC a přímky p, která prochází středem strany AB a je rovnoběžná se stranou BC (obr. 10.15).



Obrázek 10.15

10.10 Je dán konvexní úhel AVB, přičemž vrchol V leží mimo nákresnu. Sestrojte osu úhlu AVB.

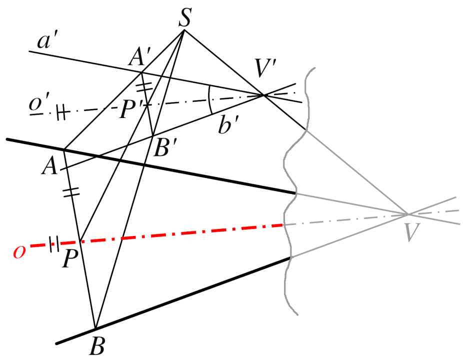
Návod: Využijte průsečíky os vnitřních a vnějších úhlů trojúhelníku AVB při vrcholech A a B, pokud se tyto průsečíky vejdou do nákresny. Pokud ne, použijte libovolnou stejnolehlost, pomocí níž obrázek zmenšíte/přemístíte tak, aby se obraz V' bodu V vešel do nákresny.



Obrázek 10.16

Výsledek: Hledaná osa je spojnicí bodů X a Y, kde X je průsečíkem os vnitřních úhlů a Y je průsečíkem os vnějších úhlů trojúhelníku ABV při vrcholech A, B (obr. 10.16). Pokud je právě jeden z bodů X, Y nedostupný, lze úlohu převést na problém v úloze 10.8. Pokud jsou oba body X, Y

nedostupné, lze celou situaci zmenšit volbou vhodné stejnolehlosti. V obrázku 10.17 je zvolen střed S a ve stejnolehlosti s tímto středem a libovolným koeficientem λ z intervalu $(0;1)$ jsou sestrojeny obrazy A', B' bodů A, B (tzn. $A' \in \longmapsto SA$, $B' \in \longmapsto SB$, $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$), obrazy a', b' přímek AV, BV ($a' \parallel \longleftrightarrow AV$, $A' \in a'$, $b' \parallel \longleftrightarrow BV$, $B' \in b'$), průsečík V' přímek a', b' a osa o' konvexního úhlu $A'V'B'$. Hledaná osa o úhlu AVB je potom s polopřímkou o' rovnoběžná a prochází bodem P, který odpovídá ve zvolené stejnolehlosti bodu P' ($P' = \longmapsto o' \cap \overline{A'B'}$).

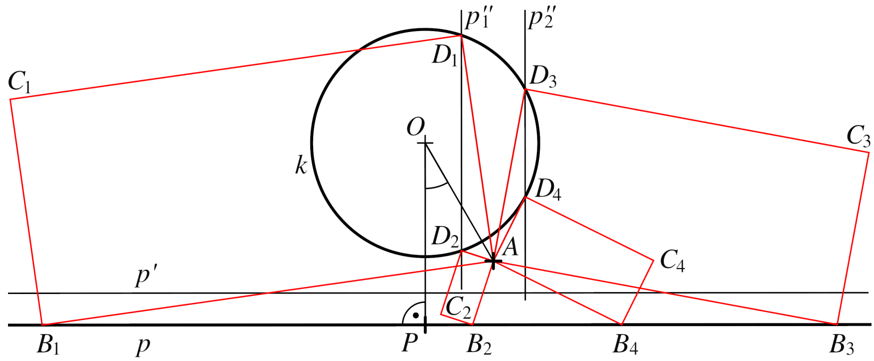


Obrázek 10.17

10.11 Je dána kružnice $k(O, 2{,}5\,\text{cm})$, bod P, kde $|OP| = 4\,\text{cm}$, bod A, kde $|OA| = 3\,\text{cm}$ a $|\sphericalangle POA| = 30°$, a přímka p, kde $P \in p \ \wedge \ p \perp \longleftrightarrow OP$. Sestrojte obdélník $ABCD$ tak, aby $B \in p \ \wedge \ D \in k \ \wedge \ |AB| = 2|BC|$.

Návod: Využijte zobrazení složené ze stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\dfrac{1}{2}$ a z rotace se středem A o orientovaný úhel $\pm 90°$. V uvedeném zobrazení sestrojte obraz p'' přímky p.

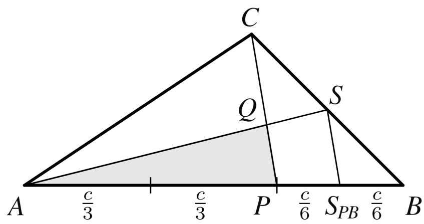
Výsledek: Bod D je průsečíkem přímky p'' a kružnice k, neboť je roven obrazu B'' bodu B ve výše popsaném složeném zobrazení. V obrázku 10.18 je zakreslena také přímka p', která je obrazem přímky p ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\dfrac{1}{2}$. Úloha má 4 řešení.



Obrázek 10.18

10.12 Je dán trojúhelník ABC. Označme S střed strany BC, P bod ležící na straně AB ve vzdálenosti $\frac{1}{3}|AB|$ od bodu B a Q průsečík přímek PC a AS. Určete poměr obsahů trojúhelníků APQ a ABC.

Návod: Využijte podobnost trojúhelníků APQ, $AS_{PB}S$ (uu, viz ZT 16, str. 30), kde S_{PB} je střed úsečky PB a S je střed strany BC. Uvědomte si, že úsečka SS_{PB} je střední příčka trojúhelníku PBC (obr. 10.19).



Obrázek 10.19

Výsledek: Koeficient stejnolehlosti, v níž se trojúhelník $AS_{PB}S$ zobrazí na trojúhelník APQ, je roven $\frac{4}{5}$. Poměr obsahů trojúhelníků APQ a ABC je $\frac{4}{15}$.

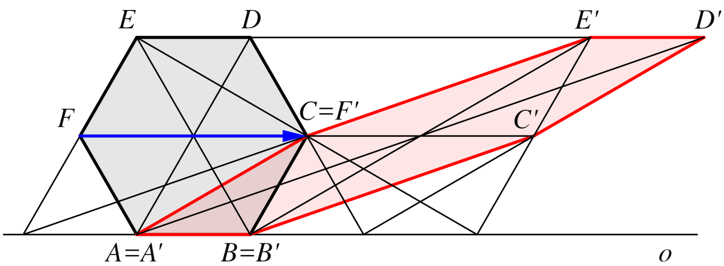
11 Osová afinita

11.1 Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ o straně dlouhé 3 cm. Sestrojte jeho obraz v osové afinitě v rovině, jestliže:

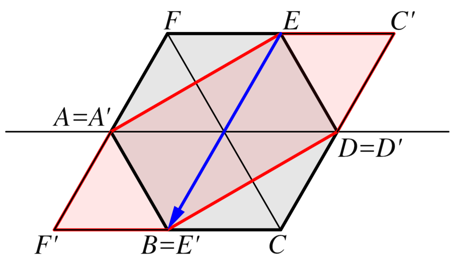
(a) osou afinity je přímka AB a obrazem bodu F je bod C,
(b) osou afinity je přímka AD a obrazem bodu E je bod B,
(c) osou afinity je přímka AB a obrazem středu S úsečky AE je bod D.

Návod: Body ležící na ose afinity jsou samodružné. K zobrazení dalších bodů lze využít mimo jiné toho, že afinita zachovává rovnoběžnost a střed úsečky.

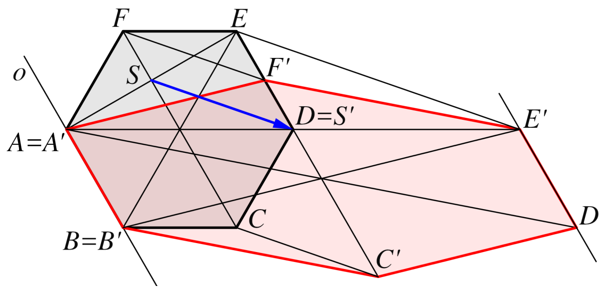
Výsledek: (a) Viz obr. 11.1; (b) viz obr. 11.2; (c) viz obr. 11.3.



Obrázek 11.1



Obrázek 11.2

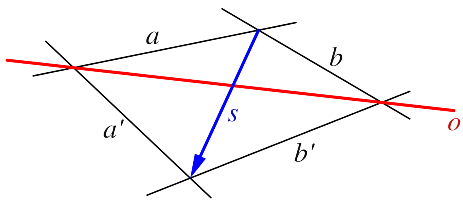


Obrázek 11.3

11.2 Jsou dány čtyři navzájem různoběžné přímky a, a', b, b'. Určete osu a směr afinity, v níž se přímky a, b zobrazí po řadě na přímky a', b'.

Návod: Osa afinity je spojnice samodružných bodů, směr afinity je daný dvojicí odpovídajících si nesamodružných bodů. Uvažujte různé možnosti umístění zadaných prvků.

Výsledek: Pokud žádné tři z daných přímek neprochází týmž bodem, pak je osa určena průsečíky přímek a, a' a b, b'. Směr určuje přímka procházející průsečíky přímek a, b a a', b' (obr. 11.4). Pokud právě tři ze zadaných přímek prochází týmž bodem, potom afinita není těmito přímkami určená. Pokud všechny čtyři přímky náleží témuž svazku, afinita není jednoznačně zadána, osou může být libovolná přímka procházející středem svazku.

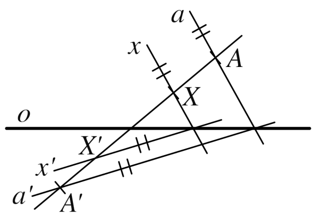


Obrázek 11.4

11.3 Osová afinita v rovině je zadána osou o a dvojicí různých odpovídajících si bodů A–A' (tj. $A \notin o \ \wedge \ A' \notin o$). Na přímce AA' zvolte bod X různý od A i od A' a zobrazte jej v dané osové afinitě.

Návod: Využijte toho, že osová afinita zachovává rovnoběžnost.

Výsledek: Bodem A proložte libovolnou různoběžku a s osou o, té odpovídá přímka a' procházející bodem A'. Poté bodem X veďte rovnoběžku x s přímkou a, jíž odpovídá rovnoběžka x' s přímkou a'. Bod X' je průsečíkem přímek x', AA' (obr. 11.5).



Obrázek 11.5

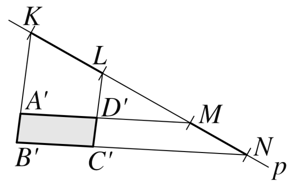
11.4 Zvolte libovolnou kružnici k o středu S a bod S' vně kružnice k. Sestrojte obrazy alespoň deseti různých bodů kružnice k v osové afinitě, jestliže S' je obrazem bodu S. Osu afinity volte libovolně tak, aby se jednalo o afinitu (a) pravoúhlou, (b) kosoúhlou. Odhadněte, která křivka bude obrazem kružnice k.

Návod: Body, které zobrazujete, volte na kružnici k rovnoměrně rozmístěné. Zkuste kružnici k opsat libovolný čtverec a sestrojte i jeho obraz.

Výsledek: (a) Je-li afinitou speciálně osová souměrnost, potom je obrazem kružnice k opět kružnice (se středem S' a poloměrem shodným s poloměrem kružnice k). V ostatních případech je obrazem kružnice k elipsa. Opsaný čtverec se zobrazí na opsaný pravoúhelník. (b) Obrazem kružnice k je elipsa. Opsaný čtverec se zobrazí na opsaný kosoúhelník.

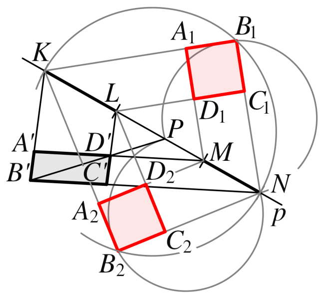
11.5 Na přímce p jsou dány dvě disjunktní úsečky KL, MN. Sestrojte čtverec tak, aby jeho prodloužené strany protínaly přímku p v bodech K, L, M, N.

Návod: Sestrojte libovolný rovnoběžník $A'B'C'D'$ takový, že body K, L, M, N leží po řadě na přímkách $A'B'$, $C'D'$, $A'D'$, $B'C'$ (obr. 11.6). Potom existuje osová afinita s osou p, v níž se rovnoběžník $A'B'C'D'$ zobrazí na čtverec $ABCD$, stačí jen najít správnou dvojici odpovídajících si bodů. Zkuste nalézt například bod B odpovídající bodu B'. Využijte toho, že velikost úhlu KBN musí být $90°$ a velikost úhlu PBN, kde P je průsečík přímky $B'D'$ s přímkou p, musí být $45°$.



Obrázek 11.6

Výsledek: Bod B je průsečíkem Thalétovy kružnice nad úsečkou KN (viz str. 53) a množiny bodů, z nichž je úsečka PN vidět pod úhlem o velikosti 45° (viz str. 118). Úloha má dvě řešení (v obrázku 11.7 čtverce $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$).

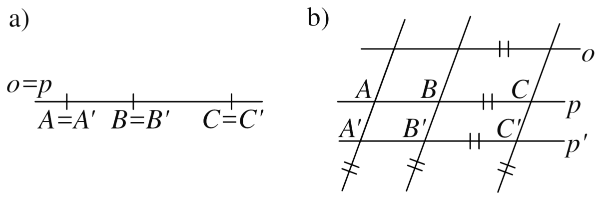


Obrázek 11.7

11.6 Dokažte, že osová afinita v rovině zachovává dělicí poměr tří kolineárních bodů.

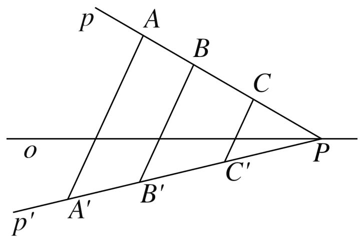
Návod: Mějte tři navzájem různé body A, B, C ležící na přímce p a osovou afinitu s osou o. Chcete dokázat, že pro obrazy A', B', C' bodů A, B, C v dané afinitě platí, že $(ABC) = (A'B'C')$. Obrazem přímky v osové afinitě je přímka, body A', B', C' jsou tedy kolineární a přímka p', na níž leží, je obrazem přímky p. Navíc, díky směru afinity, je vždy zachováno pořadí bodů na přímce, stačí tedy dokázat, že $|(ABC)| = |(A'B'C')|$. Uvažujte zvlášť různé polohy přímky p vůči ose a směru dané afinity a využijte podobnost trojúhelníků.

Výsledek: Pro $p \parallel o$ je $|AC| = |A'C'|$ i $|BC| = |B'C'|$, tedy tvrzení platí (obr. 11.8a, 11.8b).

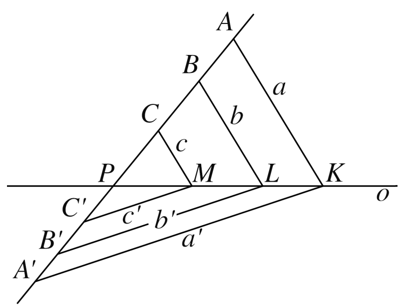


Obrázek 11.8

Je-li přímka p různoběžná s osou afinity, rozlište ještě situace, kdy přímka p má směr afinity a kdy ne. V obou případech označte P průsečík přímky p a osy o a búno uvažujte uspořádání bodů jako v obrázku 11.9, resp. 11.10. V prvním případě (obr. 11.9) využijte podobné trojúhelníky $AA'P$, $BB'P$, $CC'P$. Ve druhém případě (obr. 11.10) pracujte s podobnými trojúhelníky $AA'K$, $BB'L$, $CC'M$, kde body K, L, M jsou průsečíky osy o s rovnoběžkami a, b, c procházejícími po řadě body A, B, C.



Obrázek 11.9



Obrázek 11.10

Z podobnosti výše uvedených trojúhelníků v obou případech platí

$$\frac{|CP|}{|C'P|} = \frac{|BP|}{|B'P|} = \frac{|AP|}{|A'P|},$$

odkud po dosazení $|CP| + |BC|$ za $|BP|$ a obdobně za $|B'P|$, $|AP|$ i $|A'P|$ po úpravě získáme

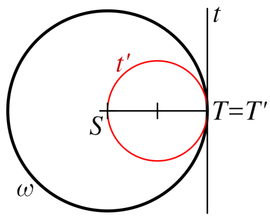
$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|B'C'|}.$$

12 Kruhová inverze

12.1 Je dána kružnice $\omega(S, 2\,\text{cm})$ a její tečna t. V kruhové inverzi se základní kružnicí ω sestrojte obraz přímky t.

Návod: Přímka t neprochází středem S, jejím obrazem proto bude kružnice. Obecně je tedy třeba zobrazit tři body přímky t, při volbě vhodných bodů stačí zobrazit body dva. Využijte samodružný bod a nevlastní bod přímky t.

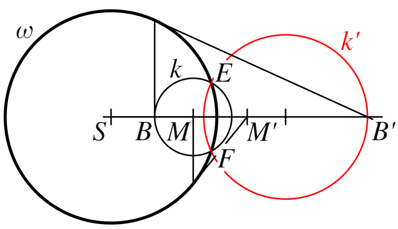
Výsledek: Obrazem tečny t je kružnice t' sestrojená nad průměrem ST, kde T je bod dotyku tečny t s kružnicí ω a zároveň samodružný bod tečny t (obr. 12.1).



Obrázek 12.1

12.2 Je dána kružnice $\omega(S, 3{,}5\,\text{cm})$, bod M, kde $|SM| = 3\,\text{cm}$, a kružnice $k(M, 1{,}5\,\text{cm})$. V kruhové inverzi se základní kružnicí ω sestrojte obraz bodu M a kružnice k.

Návod: Kružnice k neprochází středem S, jejím obrazem tedy bude kružnice k'. Kromě obrazu bodu M je tedy třeba sestrojit obrazy tří různých bodů kružnice k. Využijte samodružné body a konstrukci obrazu bodu v kruhové inverzi popsanou na str. 198–199.



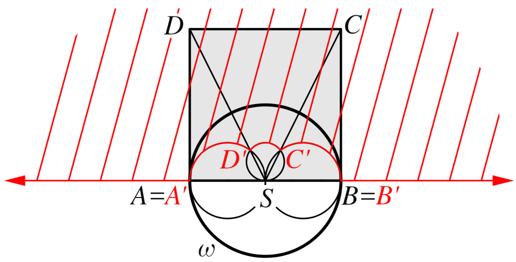
Obrázek 12.2

Výsledek: Obrazem bodu M je bod M'. Obrazem kružnice k je kružnice k' opsaná trojúhelníku $B'EF$, kde B' je obraz libovolného bodu $B \in k$ a body E, F jsou průsečíky kružnic k, ω, a tedy jsou v dané kruhové inverzi samodružné (obr. 12.2). Všimněte si, že bod M' patrně není středem kružnice k' (viz dále úloha 12.4).

12.3 Je dán čtverec $ABCD$ o straně 6 cm. Střed strany AB označte S. Zobrazte čtverec $ABCD$ v kruhové inverzi se základní kružnicí $\omega(S, 3\,\text{cm})$.

Návod: Obrazem čtverce je neomezená plocha (v obr. 12.3 červeně šrafovaná), jejíž částečnou hranici tvoří sjednocení obrazů stran čtverce $ABCD$.

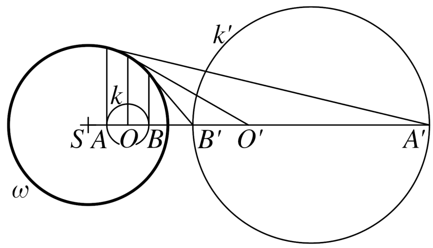
Výsledek: Body A, B jsou samodružné a střed kruhové inverze, který se zobrazí na nevlastní bod, je bodem úsečky AB. Obrazem úsečky AB je dvojice polopřímek s počátky v bodech A', B' (viz obr. 12.3). Obrazy stran BC, CD, AD jsou kružnicové oblouky kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům $B'C'S$, $C'D'S$, $A'D'S$.



Obrázek 12.3

12.4 Mějme kruhovou inverzi se základní kružnicí $\omega(S, r)$. Dokažte, že bod O', který je v dané kruhové inverzi obrazem středu O libovolné kružnice k neprocházející bodem S, není středem obrazu k' kružnice k.

Návod: Rozlište dva případy, a sice zda jsou kružnice k a ω soustředné, či nikoliv. První případ je snadný. Ve druhém uvažujte průměr AB libovolné kružnice k takový, že přímka AB prochází středem inverze S a búno je $|SA| < |SB|$. Střed kružnice k označte O a obrazy bodů A, B, O v dané kruhové inverzi označte A', B', O' (obr. 12.4). Ukažte, že $(A'B'O') \neq -1$. Využijte definici kruhové inverze (str. 198) a předpoklad, že bod O je středem úsečky AB, tedy, že $(ABO) = -1$.



Obrázek 12.4

Výsledek: Je-li $O = S$, potom je bod O' nevlastní, avšak středem kružnice k' je bod S. Je-li $O \neq S$, potom z definice kruhové inverze, předpokladu $|SA| < |SB|$ a z uspořádání bodů A, B, O plyne, že $|SA'| > |SB'|$ a bod O' leží mezi body A', B'. Odtud plyne, že

$$(A'B'O') = -\frac{|A'O'|}{|B'O'|} = -\frac{|SA'| - |SO'|}{|SO'| - |SB'|}.$$

Délku $|SA'|$ vyjádříme ze vztahu $|SA| \cdot |SA'| = r^2$ (tj. užijeme definici kruhové inverze), obdobně vyjádříme délky $|SB'|$ a $|SO'|$ a dosadíme do výpočtu dělicího poměru $(A'B'O')$. Po úpravě získáme

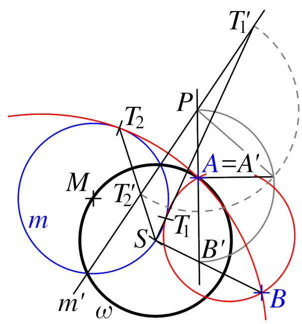
$$(A'B'O') = -\frac{|SB|}{|SA|},$$

tedy $(A'B'O')$ je různý od -1, neboť $|SA| \neq |SB|$.

12.5 Řešte Apollóniovu úlohu BBk.

Návod: Úlohu lze řešit užitím potenčního středu tří kružnic, viz úloha 3.11 (str. 22 tohoto textu). Zde však ukážeme postup užitím kruhové inverze. Označte dané body A, B, danou kružnici $m(M; r_m)$ a hledanou kružnici k. Použijte kruhovou inverzi se základní kružnicí $\omega(S; r)$, kde S zvolte na kružnici m a r libovolně, ale menší než r_m, a převeďte úlohu na problém BBp (v obr. 12.5 je r záměrně voleno tak, aby $A \in \omega$). K jeho řešení poté využijte mocnost bodu ke kružnici a *Eukleidovu větu o odvěsně* (věta 6.9, str. 104). Uvažujte různé vzájemné polohy daných objektů.

Výsledek: V kruhové inverzi se základní kružnicí ω jsou obrazy bodů A, B body A', B', obrazem kružnice m je přímka m' a obrazem hledané kružnice k je obecně opět kružnice k' (při náhodné specifické volbě kružnice ω se může stát, že k' přejde v přímku), která je nyní zadána dvěma body A', B' a tečnou m'. Pro průsečík P přímek $A'B'$, m' platí $|PA'| \cdot |PB'| = |PT'|$, kde bod T' je bodem dotyku tečny m' a kružnice k' (viz věta 3.12, str. 62). Vzdálenost $|PT'|$ zjistíme konstrukčně užitím *Eukleidovy věty o výšce* (viz str. 104, resp. 134). Jsou-li oba body A, B vnějšími body kružnice m, má úloha 2 řešení (obr. 12.5). Stejně tak, jsou-li oba body A, B vnitřními body kružnice m. Je-li právě jeden z bodů A, B bodem kružnice m, má úloha 1 řešení. V ostatních případech úloha nemá řešení.[4]



Obrázek 12.5

12.6 Řešte Apollóniovu úlohu Bkk.

Návod: Užijte kruhovou inverzi se středem v daném bodě.

Výsledek: Označte daný bod B, dané kružnice l, m a hledanou kružnici k. Kruhová inverze se středem B zobrazí bod B na nevlastní bod, kružnice l, m na kružnice l', m' a kružnici k na přímku k'. Úlohu tedy převedeme na problém konstrukce tečny společné dvěma kružnicím (viz str. 182 a úloha 10.7, str. 84 tohoto textu). Úloha může mít 4, 3, 2, 1 nebo žádné řešení,[5] záleží na vzájemné poloze daných objektů. Speciálně, pokud se dané kružnice dotýkají v daném bodě, má úloha nekonečně mnoho řešení.

[4] Předpokládáme, že dané objekty jsou navzájem různé, jinak by klasifikace vzájemných poloh s ohledem na počet řešení byla složitější.

[5] Předpokládáme, že dané objekty jsou navzájem různé, jinak by klasifikace vzájemných poloh s ohledem na počet řešení byla složitější.

12.7 Řešte Apollóniovu úlohu kkk.

Návod: Označte dané kružnice $a(A; r_a)$, $b(B; r_b)$, $c(C; r_c)$ a hledanou kružnici k. Búno nechť je $r_a \leq r_b \ \wedge \ r_a \leq r_c$. Úlohu převeďte na problém Bkk (viz úloha 12.6 výše) tak, aby daným bodem byl bod A a danými kružnicemi kružnice soustředné s kružnicemi b, c.

Výsledek: Kružnice k', která je řešením úlohy Bkk, kde daným bodem je bod A a danými kružnicemi jsou kružnice $b'(B; r_b \pm r_a)$, $c'(C; r_c \pm r_a)$, je soustředná s hledanou kružnicí k. Úloha může mít až 8 řešení v závislosti na vzájemné poloze daných objektů.[6] Speciálně, mají-li dané kružnice společný právě jeden bod, má úloha nekonečně mnoho řešení.

[6] Předpokládáme, že dané objekty jsou navzájem různé, jinak by klasifikace vzájemných poloh s ohledem na počet řešení byla složitější.

13 Axiomatika planimetrie

13.1 Na základě axiomů I definujte *různoběžné přímky.*

Návod: Uvažujeme-li tři nekolineární body A, B, C a každými dvěma z nich určenou jednu přímku, pak různoběžnými přímkami jsou například přímky AB a BC.

Výsledek: Různoběžnými přímkami nazveme takové dvě přímky, které mají společný právě jeden bod.

13.2 Množinou P všech bodů geometrického modelu M_5 splňujícího axiomy I je $\{A, B, C, D, E\}$ a přímkami tohoto modelu jsou dvouprvkové podmnožiny množiny P. Vypište všechny navzájem různé přímky modelu M_5 a ke každé z nich uveďte všechny přímky, které se s ní (a) protínají, (b) neprotínají.

Návod: Přímka je určena dvěma různými body. Přímky, které se protínají, jsou různoběžné (viz úloha 13.1).

Výsledek: Geometrický model M_5 obsahuje $\binom{5}{2}$, tj. 10 přímek. Jednotlivé přímky jsou vypsány v prvním sloupci následující tabulky a vždy v příslušném řádku jsou ke každé přímce uvedeny přímky, které se s ní protínají/neprotínají.

přímka	protínající přímky	neprotínající přímky
AB	AC, AD, AE, BC, BD, BE	CD, CE, DE
AC	AB, AD, AE, BC, CD, CE	BD, BE, DE
AD	AB, AC, AE, BD, CD, DE	BC, BE, CE
AE	AB, AC, AD, BE, CE, DE	BC, BD, CD
BC	AB, BD, BE, AC, CD, CE	AD, AE, DE
BD	AB, BC, BE, AD, CD, DE	AC, AE, CE
BE	AB, BC, BD, AE, CE, DE	AC, AD, CD
CD	AC, BC, CE, AD, BD, DE	AB, AE, BE
CE	AC, BC, CD, AE, BE, DE	AB, AD, BD
DE	AD, BD, CD, AE, BE, CE	AB, AC, BC

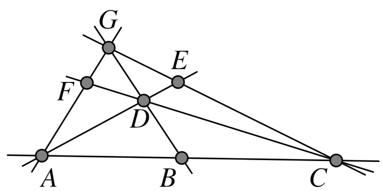
13.3 Na základě axiomů I a U definujte *vnitřní bod poloroviny.*

Návod: Využijte definici poloroviny (k níž jsou zapotřebí primitivní pojmy, primitivní relace a axiomy I a U) ze str. 221 a za vnitřní bod poloroviny považujte takový její bod, který neleží na hraniční přímce této poloroviny.

Výsledek: Vnitřním bodem poloroviny pA rozumíme každý bod poloroviny pA, který nenáleží přímce p.[7]

13.4 Na základě axiomů I a U dokažte, že ze tří různých bodů přímky právě jeden leží mezi ostatními dvěma.

Návod: S ohledem na axiom U-2 (str. 215) stačí dokázat, že ze tří různých bodů přímky leží aspoň jeden mezi ostatními dvěma. Uvažujte navzájem různé kolineární body A, B, C takové, že bod A neleží mezi body B, C ani bod C neleží mezi body A, B a ukažte, že bod B potom musí ležet mezi body A, C. Využijte nový bod D, který není incidentní s přímkou AB, nový bod G takový, že $D \ \mu \ BG$ (viz axiom U-3, str. 215) a opakovaně aplikujte *Paschovu větu* (věta 13.5, str. 217).



Obrázek 13.1

Výsledek: Dle věty 13.5 aplikované na body B, C, G a přímku AD získáte bod $E \ \mu \ CG$ (obr. 13.1). Následně dle téže věty aplikované na body A, B, G a přímku CD získáte bod $F \ \mu \ AG$. Nyní aplikací věty 13.5 na body A, E, G a přímku CD ukážete, že $D \ \mu \ AE$. Nakonec, opět dle věty 13.5 tentokrát aplikované na body A, C, E a přímku DG, ukážete, že bod $B \ \mu \ AC$.

13.5 Na základě axiomů I a U dokažte, že každým bodem prochází nekonečně mnoho přímek.

[7] Množina vnitřních bodů poloroviny bývá nazývána *otevřenou polorovinou.*

Návod: Uvažujte tři nekolineární body A, B, C a pro přímku AB využijte větu 13.7 (str. 219). Ukažte, že potom bodem C prochází nekonečně mnoho přímek.

Výsledek: Dle věty 13.7 leží na přímce AB nekonečně mnoho bodů, označme je D_1, D_2, D_3, $\ldots$ Každý z nich spolu s bodem C určuje přímku, tedy bodem C prochází nekonečně mnoho přímek $CA, CB, CD_1, CD_2, CD_3, \ldots$ Analogicky můžeme postupovat pro libovolný jiný bod, neboť vždy existuje přímka, která s ním není incidentní (viz věta 13.3, str. 215).

13.6 Na základě axiomů I a U dokažte, že s každou úsečkou inciduje nekonečně mnoho bodů.

Návod: Opakovaně aplikujte větu 13.4 (str. 216).

Výsledek: Mějte úsečku AB. Dle věty 13.4 existuje bod $C_1 \ \mu \ AB$, poté však existuje také bod $C_2 \ \mu AC_1$ atd., tedy na úsečce AB leží nekonečně (spočetně) mnoho bodů C_1, C_2, $\ldots$

13.7 Na základě axiomů I a U dokažte, že je-li bod B vnitřním bodem poloroviny pA, pak poloroviny pA, pB jsou totožné.

Návod: Ukažte, že libovolný bod X poloroviny pB je také bodem poloroviny pA (tj. že mezi body A, X nemůže ležet bod incidentní s hraniční přímkou p) a obráceně. Pro $B = A$ je tvrzení zřejmé. Pro $B \neq A$ je též z předpokladu, že B je vnitřní bod poloroviny pA, evidentní, že bod B leží v polorovině pA a obráceně, že bod A leží v polorovině pB. Body hraniční přímky p též leží v obou polorovinách. Je tedy třeba podrobněji prozkoumat, zda libovolný bod X poloroviny pB různý od bodů A, B a neležící na přímce p je také bodem poloroviny pA (a obráceně).

Výsledek: Nechť $X \in \overrightarrow{pB} \ \wedge X \neq A \ \wedge X \neq B \ \wedge \ X \notin p$. Potom buď jsou body A, B, X kolineární, nebo ne. Jsou-li kolineární, tak přímka AB buď neprotíná přímku p, a tedy mezi body A, X neleží žádný bod přímky p, nebo přímka AB protíná přímku p v bodě M. Jelikož bod B je vnitřním bodem $\overrightarrow{pA}$ a bod X je vnitřním bodem $\overrightarrow{pB}$, bod M nemůže být mezi body A, B ani mezi body X, B. Potom ale při žádném z možných uspořádání bodů A, B, X nemůže být bod M ani mezi body A, X. Pokud body A,

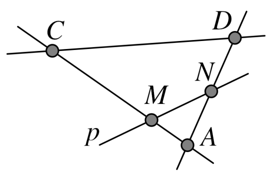
B, X nejsou kolineární, dokažte tvrzení sporem – předpokládejte, že mezi body A, X existuje bod M hraniční přímky p a aplikujte na body A, B, X a přímku p větu 13.5 (str. 217). Dle ní potom musí existovat bod přímky p mezi body A, B nebo B, X, což je spor.

Při důkazu, že každý bod poloroviny pA je zároveň bodem poloroviny pB postupujte analogicky.

13.8 Na základě axiomů I a U dokažte, že jestliže body C, D nejsou body poloroviny pA, pak bod D je bodem poloroviny pC.

Návod: Pro $C = D$ je tvrzení zřejmé. Je třeba prověřit platnost pro $C \neq D$. Body C, D nejsou body poloroviny pA, tedy mezi body A, C i mezi body A, D leží nějaký bod přímky p. Uvažujte zvlášť situaci, kdy body A, C, D jsou, resp. nejsou kolineární.

Výsledek: Jsou-li body A, C, D kolineární, pak body M, N, kde $M\ \mu\ AC$, $N\ \mu\ AD$ nutně splývají (přímka AC, která je různá od přímky p, neboť $A \notin p$, nemůže mít s přímkou p dva různé společné body). Tento bod $M = N$ nemůže být mezi body C, D (neboť potom by nemohl být zároveň mezi body A, C a zároveň mezi body A, D.) Pokud body A, C, D kolineární nejsou, z věty 13.5 (str. 217) plyne, že na přímce p již nemůže být bod ležící mezi body C, D (obr. 13.2).



Obrázek 13.2

13.9 Na základě axiomů I, U a S definujte *osu úsečky* a *rovnoramenný trojúhelník*. Definice porovnejte s definicemi těchto pojmů v kapitolách 1 (str. 20) a 2 (str. 31).

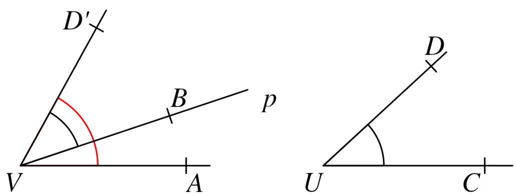
Návod: Namísto vzdálenosti pracujte se shodnými úsečkami (ve smyslu primitivní relace býti shodný a dle axiomů S, str. 222).

Výsledek: Osou úsečky AB rozumíme množinu bodů X takových, že $\overline{AX} \simeq \overline{BX}$. Trojúhelník ABC se nazývá rovnoramenný se základnou AB a rameny BC, AC, právě když $\overline{BC} \simeq \overline{AC}$.

13.10 Na základě axiomů I, U a S definujte *součet úhlů* a *přímý úhel*.

Návod: Postupujte analogicky jako při sčítání úseček (str. 223). Využijte axiom S-4 (str. 222). Přímý úhel je vlastně jiné pojmenování pro množinu bodů, kterou jsme již definovali (napovíme, že na str. 221).

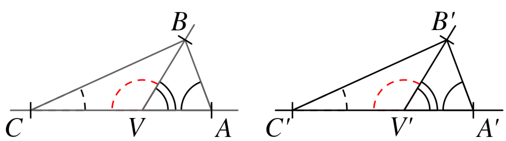
Výsledek: Mějme úhly AVB a CUD a označme p přímku VB. Z axiomu S-4 plyne, že existuje jediná polopřímka VD' taková, že $\sphericalangle BVD' \simeq \sphericalangle CUD$ a zároveň D' není bodem poloroviny pA. Úhel AVD' potom nazveme součtem úhlů AVB a CUD (obr. 13.3). Přímý úhel je vlastně totéž jako polorovina. Lze jej však definovat také jako úhel vzniklý součtem úhlů vedlejších.



Obrázek 13.3

13.11 Na základě axiomů I, U a S dokažte, že vedlejší úhly dvou shodných úhlů jsou shodné.

Návod: Uvažujte shodné úhly AVB a $A'V'B'$ a k nim vedlejší úhly BVC a $B'V'C'$. Díky axiomu S-1 můžete búno předpokládat, že $AV \simeq A'V'$, $BV \simeq B'V'$ a $CV \simeq C'V'$ (obr. 13.4). Aplikujte větu 13.8 (str. 224) postupně na dvojice trojúhelníků ABV, $A'B'V'$; ABC, $A'B'C'$; CVB, $C'V'B'$.



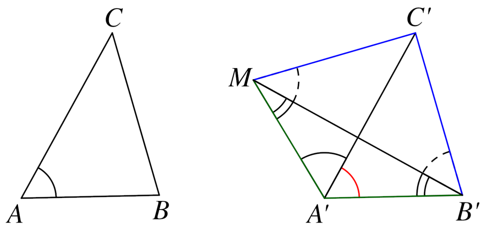
Obrázek 13.4

Výsledek: Ze shodnosti trojúhelníků ABV, $A'B'V'$ dle věty 13.8 plyne, že $\overline{AB} \simeq \overline{A'B'}$ a $\sphericalangle VAB \simeq \sphericalangle V'A'B'$. Jelikož jsou úhly AVB, CVB vedlejší, je $V\ \mu\ AC$, a tedy $\sphericalangle CAB \simeq \sphericalangle VAB$ a analogicky také $\sphericalangle C'A'B' \simeq \sphericalangle V'A'B'$. Trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ jsou proto také shodné dle věty 13.8, z čehož plyne, že $\overline{BC} \simeq \overline{B'C'}$ a $\sphericalangle ACB \simeq \sphericalangle A'C'B'$. Potom jsou ale shodné dle věty 13.8 i trojúhelníky ABV, $A'B'V'$, a tedy $\sphericalangle BVC \simeq \sphericalangle B'V'C'$.

13.12 Na základě axiomů I, U a S dokažte věty *sss* a *Ssu* o shodnostech trojúhelníků.

Návod:

sss: Ukažte, že mají-li trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ shodné strany, mají také shodný jeden vnitřní úhel. S využitím axiomů S-1 a S-4 (str. 222) sestrojte trojúhelník $A'MC'$ shodný s trojúhelníkem ABC dle věty 13.8 (str. 224) a pracujte s rovnoramennými trojúhelníky $B'MA'$, $B'MC'$ (obr. 13.5).



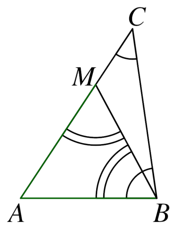
Obrázek 13.5

Ssu: Předpokládejte, že v trojúhelnících ABC, $A'B'C'$ platí: $\overline{AB} \simeq \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \simeq \overline{A'C'}$, $\overline{AC} > \overline{AB}$, $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle A'B'C'$. Dále rozvažte, že z předpokladu $\overline{AC} > \overline{AB}$ plyne, že $\sphericalangle ABC > \sphericalangle BCA$ a také $\sphericalangle A'B'C' > \sphericalangle B'C'A'$. Tvrzení dokažte sporem, tj. předpokládejte, že strany BC, $B'C'$ nejsou shodné, na polopřímce $B'C'$ sestrojte bod D tak, aby $\overline{B'D} \simeq \overline{BC}$ a pracujte s rovnoramenným trojúhelníkem $C'DA'$. K objevení sporu využijte větu 13.12 (str. 225).

Výsledek:

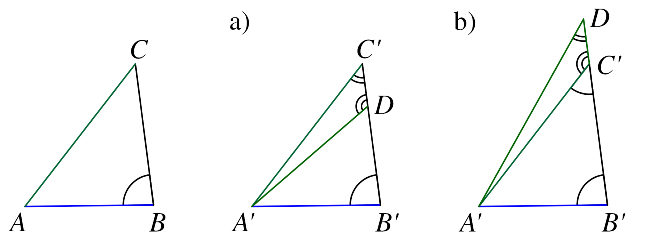
sss: Bod M sestrojte tak, aby neležel v téže polorovině s hraniční přímkou $A'C'$ jako bod B'. Z věty 13.9 (str. 224) plyne, že $\sphericalangle A'B'M \simeq \sphericalangle A'MB'$ a stejně tak $\sphericalangle C'B'M \simeq \sphericalangle C'MB'$. Díky tomu jsou shodné trojúhelníky

$A'B'C'$, $A'MC'$ dle věty *sus* (věta 13.8, str. 224) a platí, že $\sphericalangle B'A'C' \simeq \simeq \sphericalangle MA'C' \simeq \sphericalangle BAC$. Trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ jsou tedy shodné dle věty *sus*.



Obrázek 13.6

Ssu: $\sphericalangle ABC > \sphericalangle BCA$, neboť z uspořádání úseček a úhlů (str. 223–224) plyne, že mezi body AC existuje bod M takový, že trojúhelník ABM je rovnoramenný (obr. 13.6), a tedy $\sphericalangle ABM \simeq \sphericalangle AMB$. Jelikož bod M leží mezi body A, C, je $\sphericalangle ABC > \sphericalangle ABM$. Podle věty 13.12 (str. 225) je však $\sphericalangle AMB > \sphericalangle BCA$. V trojúhelníku $A'B'C'$ je situace analogická. Trojúhelník $C'DA'$ musí být rovnoramenný, neboť dle předpokladu je $AC \simeq A'C'$ a bod D byl sestrojen tak, že trojúhelníky ABC, $A'B'D$ jsou shodné, a tedy $AC \simeq A'D$. Dle věty 13.9 (str. 224) jsou tedy úhly $A'DC'$, $A'C'D$ shodné. Z věty 13.12 potom, bez ohledu na to, zda $D \ \mu \ B'C'$ (obr. 13.7a), nebo $C' \ \mu \ B'D$ (obr. 13.7b), plyne, že $\sphericalangle A'C'B' > \sphericalangle A'B'C'$, což je spor. (V případě, kdy $C' \ \mu \ B'D$, je třeba větu 13.12 aplikovat dvakrát – nejprve na vnější úhel $A'C'B'$ trojúhelníku $A'C'D$ a poté na vnější úhel $A'C'D$ trojúhelníku $A'B'C'$.) Proto musí být $\overline{B'C'} \simeq \overline{BC}$ a trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ jsou tedy shodné dle věty *sus* (věta 13.8, str. 224).

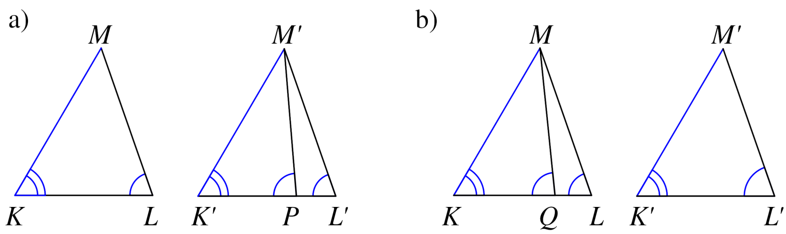


Obrázek 13.7

13.13 Na základě axiomů I, U a S definujte *střed úsečky* a dokažte, že každá úsečka má právě jeden střed.

Návod: Středem úsečky AB rozumíme takový bod S přímky AB, pro který platí, že $\overline{AS} \simeq \overline{BS}$. Je třeba postupně ukázat, že tento bod leží mezi body A, B, že takový bod existuje a že je nejvýše jeden. První dvě podmínky vyplývají z uspořádání úseček (str. 223). Pro důkaz existence bodu S zvolte libovolný bod C neležící na přímce AB a sestrojte bod D, který neleží v polorovině určené hraniční přímkou AB a bodem C tak, aby $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle ABD \;\wedge\; \overline{AC} \simeq \overline{BD}$ (obr. 13.9). Ukažte, že střed $\overline{AB}$ je potom průsečíkem přímek AB a CD.

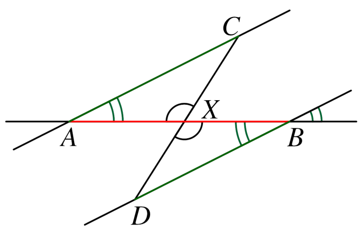
Při důkazu využijte následující *lemma*: Dva trojúhelníky jsou shodné, jestliže se shodují ve dvou vnitřních úhlech a jedné straně ležící proti jednomu z daných úhlů.[8] Lemma lze dokázat sporem – v trojúhelnících KLM, $K'L'M'$, kde $\sphericalangle LKM \simeq \sphericalangle L'K'M'$, $\sphericalangle KLM \simeq \sphericalangle K'L'M'$ a $\overline{KM} \simeq \overline{K'M'}$, předpokládejte, že $\overline{KL} < \overline{K'L'}$, nebo $\overline{KL} > \overline{K'L'}$. Potom existuje buď bod $P \;\mu\; K'L'$ (obr. 13.8a) tak, že $\overline{K'P} \simeq \overline{KL}$, trojúhelníky KLM, $K'PM'$ jsou dle věty 13.8 (str. 224) shodné a z věty 13.12 (str. 225) plyne, že $\sphericalangle K'PM' > \sphericalangle K'L'M'$. To je však ve sporu s předpokladem, neboť ze shodnosti trojúhelníků KLM, $K'PM'$ a z předpokladů plyne, že $\sphericalangle K'L'M' \simeq \simeq \sphericalangle KLM \simeq \sphericalangle K'PM'$. Nebo analogicky existuje bod $Q \;\mu\; KL$ (obr. 13.8b) tak, že $\overline{KQ} \simeq \overline{K'L'}$, trojúhelníky $K'L'M'$, KQM jsou shodné a z věty 13.12 plyne, že $\sphericalangle KQM > \sphericalangle KLM$, což je opět ve sporu s předpokladem. Strany KL, $K'L'$ jsou tedy shodné a trojúhelníky KLM, $K'L'M'$ jsou shodné dle věty *usu* (věta 13.8, str. 224).



Obrázek 13.8

[8]Toto lemma lze označit jako větu o shodnosti trojúhelníků *suu*. V eukleidovské geometrii je platnost této věty zřejmá, neboť součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°. Větu o součtu velikostí úhlů v trojúhelníku však na základě axiomů I, U a S dokázat nelze.

Výsledek: Bod S musí ležet mezi body A, B, neboť při jiném uspořádání bodů by bylo $\overline{AS} > \overline{BS}$, resp. $\overline{AS} > \overline{BS}$. Pokud by existovaly dva různé body S, T ležící mezi body A, B takové, že $\overline{AS} \simeq \overline{BS} \wedge \overline{AT} \simeq \overline{BT}$, potom by jeden z nich musel ležet mezi bodem A a druhým z těchto bodů. Nechť například $S\ \mu\ AT$. Potom je $\overline{AS} < \overline{AT} \simeq \overline{BT} < \overline{BS}$, tedy $\overline{AS} < \overline{BS}$, což je spor. Zbývá ukázat, že bod S existuje. Body C, D neleží v téže polorovině s hraniční přímkou AB, proto mezi nimi existuje bod X náležící přímce AB (obr. 13.9). Dle vět 13.10 (str. 224) a 13.13 (str. 227) přímky AC, BD nemají společný bod. Z toho vyplývá, že bod D leží v téže polorovině s hraniční přímkou AC jako bod B a obdobně bod C leží v téže polorovině s hraniční přímkou BD jako bod A. Díky tomu bod X musí ležet mezi body A, B. Úhly AXC, BXD jsou dle věty 13.10 shodné, a tedy dle lemmatu uvedeném výše v návodu jsou shodné trojúhelníky AXC, BXD. Z toho plyne, že $\overline{AX} \simeq \overline{BX}$, neboli bod X je středem úsečky AB.



Obrázek 13.9

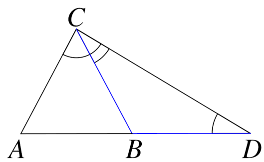
13.14 Na základě axiomů I, U a S dokažte, že v trojúhelníku leží proti větší straně větší vnitřní úhel.

Návod: V trojúhelníku ABC předpokládejte, že $\overline{AC} > \overline{AB}$. Využijte uspořádání úseček a úhlů (str. 223–224), bod $M\ \mu\ AC$ takový, že $\overline{AM} \simeq \overline{AB}$, a větu 13.12 (str. 225).

Výsledek: Trojúhelník ABM je rovnoramenný (obr. 13.6). Dle věty 13.9 (str. 224) je tedy $\sphericalangle ABM \simeq \sphericalangle AMB$. Jelikož bod M leží mezi body A, C, je $\sphericalangle ABC > \sphericalangle ABM$. Podle věty 13.12 (str. 225) je však $\sphericalangle AMB > \sphericalangle BCA$, neboť úhel AMB je vnějším úhlem trojúhelníku BCM a zároveň není vedlejším úhlem k úhlu BCM, který je shodný s úhlem BCA. Z uvedeného vyplývá, že $\sphericalangle ABC > \sphericalangle BCA$.

13.15 Na základě axiomů I, U a S dokažte *trojúhelníkovou nerovnost.*

Návod: Má se dokázat, že součet každých dvou stran trojúhelníku je větší než strana třetí. V trojúhelníku ABC stačí ukázat, že například součet $\overline{AB}$ a $\overline{BC}$ je větší než $\overline{AC}$ a aplikovat cyklickou záměnu (str. 28). K důkazu využijte rovnoramenný trojúhelník DCB, kde $B\ \mu\ AD$ a $\overline{DB} \simeq \overline{CB}$ (obr. 13.10), a uspořádání úseček a úhlů (str. 223–224).

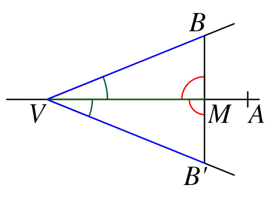


Obrázek 13.10

Výsledek: Existenci bodu D zajišťuje axiom S-1. Dle věty 13.9 (str. 224) je $\sphericalangle BCD \simeq \sphericalangle BDC$. Jelikož je $B\ \mu\ AD$, je $\sphericalangle ACD \simeq \sphericalangle BCD$ a $\sphericalangle BDC \simeq$ $\simeq \sphericalangle ADC$, a tedy v trojúhelníku ADC je $\sphericalangle ACD > \sphericalangle ADC$. Z tvrzení dokázaného v úloze 13.14 výše potom plyne, že $\overline{AD} > \overline{AC}$, přičemž úsečka AD je součtem úseček AB a BC.

13.16 Na základě axiomů I, U a S dokažte, že existuje pravý úhel.

Návod: Uvažujte libovolný úhel AVB a bod B' různý od B takový, že $\sphericalangle AVB' \simeq \sphericalangle AVB \ \wedge\ \overline{VB'} \simeq \overline{VB}$, tj. body B, B' neleží v téže polorovině s hraniční přímkou AV. Bod přímky AV, který leží mezi body B, B' označte M a využijte shodné trojúhelníky BVM, $B'VM$ (obr. 13.11).



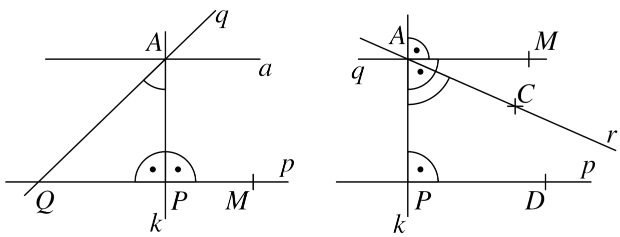
Obrázek 13.11

Výsledek: Existenci bodu B' zajišťují axiomy S-1 a S-4. Trojúhelníky BVM, $B'VM$ jsou shodné dle věty 13.8 (str. 224). Z této shodnosti plyne, že $\sphericalangle VMB \simeq \sphericalangle VMB'$. Úhly VMB, VMB' jsou však úhly vedlejší, a tedy dle definice na str. 227 jsou oba pravé.

13.17 Dokažte, že v eukleidovské geometrii je axiom R-1 (str. 230) ekvivalentní s pátým Eukleidovým postulátem (věta 13.17, str. 231).

Návod: V eukleidovské geometrii platí axiomy I, U, S i AC. K důkazu ekvivalence axiomu R-1 a věty 13.17 (V) tedy můžete využít všechny tyto axiomy a z nich odvozené věty (tj. věty 13.1 až 13.15). Dokažte zvlášť jednotlivé implikace. Mimo jiné vám pomohou věty 13.12 (str. 225), 13.13 (str. 227) a 13.15 (str. 228).

Výsledek: R-1 $\Rightarrow$ V: Předpokládáte platnost axiomu R-1, a tedy i platnost věty 13.16 (str. 231), která je jeho důsledkem. Mějte přímku p a bod A, který s ní není incidentní. Bodem A lze dle věty 13.16 vést právě jednu přímku a, která neprotíná přímku p, a dle věty 13.15 (str. 228) právě jednu přímku k, která je kolmá k přímce p. Patu přímky k označte P (obr. 13.12a). Z předpokladu vyplývá, že každá přímka q různá od přímky a a procházející bodem A již musí protnout přímku p. Označte tento průsečík Q. Potom existuje bod M tak, že $P \; \mu \; QM$ a dle věty 13.12 (str. 225) je úhel APM větší než úhel PAQ. Neboli, součet úhlů QPA a PAQ je menší než součet dvou pravých.



Obrázek 13.12

V $\Rightarrow$ R-1: Mějte přímku p a bod A, který s ní není incidentní. Bodem A lze dle věty 13.15 (str. 228) vést právě jednu přímku k, která je kolmá k přímce p. Patu přímky k označte P (obr. 13.12b). Dále veďte kolmici q bodem A k přímce k. Z věty 13.13 (str. 227) vyplývá, že se přímky p, q neprotínají. Nyní je třeba ukázat, že každá jiná přímka r procházející bodem A protne přímku p. Zvolte v téže polorovině s hraniční přímkou AP libovolný bod D ležící na přímce p, libovolný bod M ležící na přímce q a libovolný bod C tak, aby $\sphericalangle PAC < \sphericalangle PAM$, a uvažujte přímku AC. Bod C vzhledem k tomu, jak je volen, nemůže ležet na přímce q a součet úhlů DPA, PAC je menší než součet dvou pravých úhlů. Jelikož platí věta V, polopřímky AC, PD se protnou, neboli libovolná přímka r různá od přímky q a procházející bodem A protíná přímku p, a tedy platí axiom R-1.