

Goniometrie – řešení některých typů rovnic

Následující rovnice řešme v $\mathbb{R}$.

1. Typ $a \sin x + b \cos x = c$.

Řešme rovnici $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$ v $\mathbb{R}$.

Řešení: Levou stranu rovnice se pokusíme zapsat ve tvaru $\sin(x + \varphi)$, tj.

$$\sin(x + \varphi) = \sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi.$$

Koeficienty u $\sin x$ a $\cos x$ však mohou být větší než 1, proto celou rovnost ještě vynásobíme $q \neq 0$:

$$q \sin(x + \varphi) = \sin x(q \cos \varphi) + \cos x(q \sin \varphi).$$

Porovnáním s levou stranou zadané rovnice dostáváme:

$$q \cos \varphi = 1, \quad q \sin \varphi = \sqrt{3}.$$

Podíl je tedy

$$\frac{q \sin \varphi}{q \cos \varphi} = \frac{\sqrt{3}}{1}, \quad \text{tj. } \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}.$$

Řešením je např. $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Jelikož je $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, dostáváme z rovnice $q \cos \varphi = 1$ rovnici $q \cdot \frac{1}{2} = 1$, tj. $q = 2$.

Zadaná rovnice $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$ tedy přejde na tvar

$$2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

Tuto rovnici již snadno vyřešíme:

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \\ x_1 + \frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_2 + \frac{\pi}{3} = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Řešením tedy je:

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Řešme rovnici $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$.

Řešení: Levou stranu rozložíme:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x) \cdot (\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{1}{2}.$$

Jelikož je $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, přejde rovnice na tvar

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}.$$

Na levé straně rozpoznáváme vztah $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, dostáváme tedy:

$$-\cos 2x = \frac{1}{2}, \quad \text{neboli} \quad \cos 2x = -\frac{1}{2},$$

$$2x_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad 2x_2 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Řešením je tedy

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad x_2 = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3. Řešme rovnici $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos^2 2x$.

Řešení: Z řešení předchozí úlohy víme, že levá strana je rovna $-\cos 2x$. Rovnice tak přechází na tvar

$$-\cos 2x = \cos^2 2x.$$

Rovnici převedeme na součinnový tvar

$$0 = \cos^2 2x + \cos 2x,$$

$$0 = \cos 2x \cdot (\cos 2x + 1).$$

Uvážíme-li, že součin je roven nule právě tehdy, když je alespoň jeden z činitelů roven nule, dostáváme:

$$\cos 2x = 0 \quad \text{nebo} \quad \cos 2x + 1 = 0.$$

První rovnice má řešení

$$2x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{neboli} \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}.$$

Druhá rovnice $\cos 2x = -1$ má řešení

$$2x_2 = \pi + 2k\pi, \quad \text{neboli} \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

4. Řešme rovnici $\cos x + \cos 2x = 0$.

Řešení: Ze součtových vzorců (a goniometrické jedničky) plyne, že

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1.$$

Rovnice tak přejde na tvar

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Zavedením substituce $z = \cos x$ dostaneme kvadratickou rovnici

$$2z^2 + z - 1 = 0.$$

Její kořeny jsou

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4},$$

tj. $z_1 = \frac{1}{2}$ a $z_2 = -1$. Řešením rovnic

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad \cos x = -1$$

je

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{a} \quad x_3 = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Literatura

Odvárko, O. Goniometrie. Matematika pro gymnázia. 4. vyd. Prometheus, Praha.

Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. 10. vyd. Prometheus, Praha.

Polák, J. Středoškolská matematika v úlohách I. 2. vyd. Prometheus, Praha.