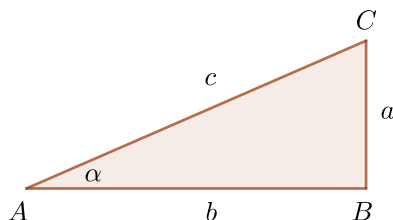


Goniometrie – odvození základních vztahů

1. Definujme sinus, kosinus a tangens v pravoúhlém trojúhelníku.

Řešení: Předně je třeba si uvědomit, že všechny pravoúhlé trojúhelníky s vnitřním úhlem α jsou navzájem podobné dle věty *uu* (pravý úhel a úhel α). Proto poměr délek dvou příslušných stran je pro dané α konstantní. Následující definice jsou tedy korektní.



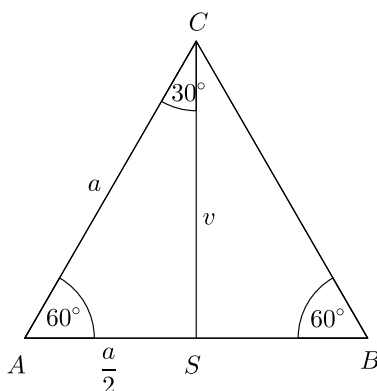
Pro dané α mezi 0° a 90° definujeme (viz označení z obrázku):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

2. Odvoďte základní hodnoty funkce sinus a kosinus.

Řešení:

- Pro sinus a kosinus 30° a 60° použijeme rovnostranný trojúhelník.



- Všimněme si (přímo v trojúhelníku, jedná se o poměr týchž stran):

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ \quad \text{a} \quad \sin 60^\circ = \cos 30^\circ.$$

- První dvě hodnoty vypočteme snadno:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

- Vypočteme výšku v dle Pýthagorovy věty:

$$v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2, \quad \text{tj.} \quad v^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}a^2.$$

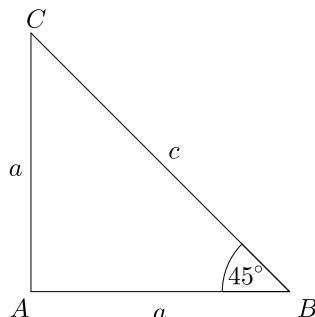
Odtud

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

- Nyní můžeme vypočítat i zbylé dvě hodnoty:

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{v}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- Pro sinus a kosinus 45° použijeme rovnoramenný trojúhelník.



Délku přepony opět vypočteme pomocí Pýthagorovy věty:

$$c^2 = a^2 + a^2 \quad \implies \quad c = \sqrt{2}a.$$

Nyní již snadno vypočteme

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- V předchozím výpočtu jsme zlomek na závěr usměrnili, tj. rozšířením $\sqrt{2}$ jsme odstranili odmocninu ve jmenovateli. Proč je to užitečné?

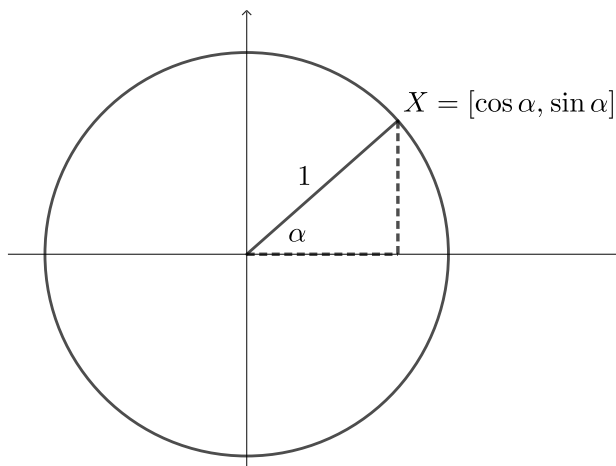
Porovnejme složitost výpočtu hodnoty usměrněného a neusměrněného zlomku, pokud víme, že $\sqrt{2} = 1,414\dots$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1,414\dots}{2} = 0,707\dots, \quad \text{avšak} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1,414} = ???.$$

Vidíme, že dělit mnohacíferným číslem je náročné, usměrněný zlomek lze však snadno vyčíslit z paměti.

3. Definujme sinus a kosinus v jednotkové kružnici.

Řešení: Pro dané α definujeme $\sin \alpha$ jako y -ovou souřadnici průsečíku X příslušného průvodiče s jednotkovou kružnicí. Podobně definujeme $\cos \alpha$ jako x -ovou souřadnici průsečíku X .



4. Definujme funkce tangens a kotangens.

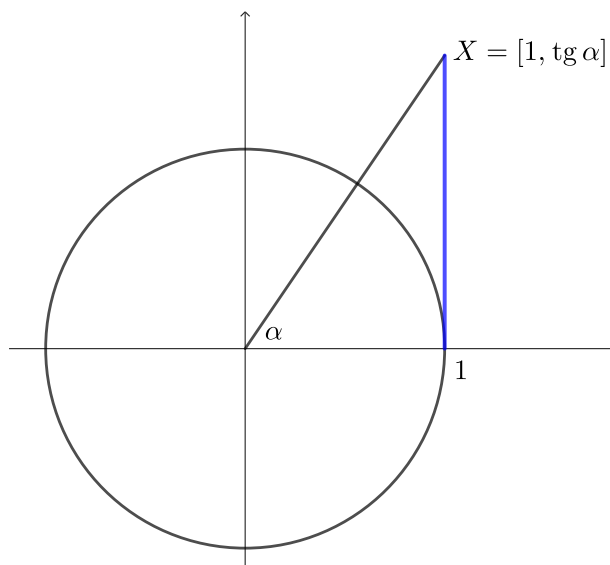
Řešení: Definujeme:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

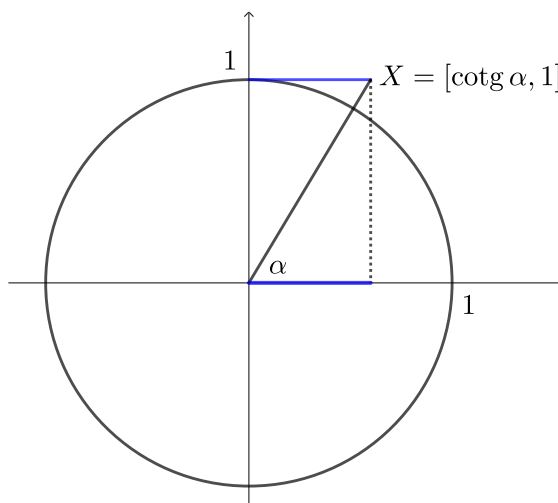
$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

5. Znázorníme tangens a kotangens v jednotkové kružnici.

Řešení: Pro dané α lze $\operatorname{tg} \alpha$ znázornit jako y -ovou souřadnici průsečíku X příslušného průvodiče s tečnou jednotkové kružnice v bodě $[1, 0]$.



Pro dané α lze $\operatorname{cotg} \alpha$ znázornit jako x -ovou souřadnici průsečíku X příslušného průvodiče s tečnou jednotkové kružnice v bodě $[0, 1]$.



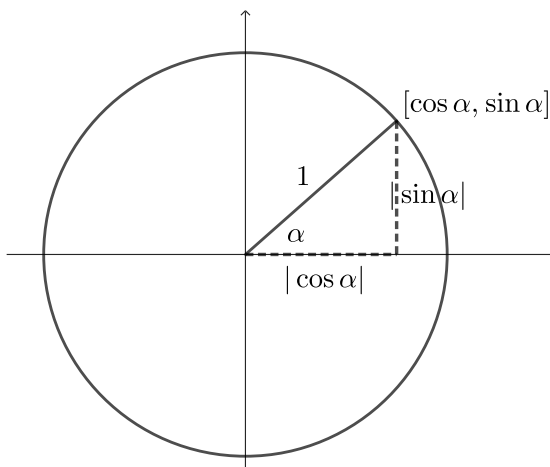
6. Odvoďte vztah mezi funkcemi tangens a kotangens (pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$).

Řešení: Jelikož $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ a $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, vidíme, že jeden zlomek je převrácenou hodnotou druhého. Proto

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \quad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$$

7. Odvoďme tzv. *goniometrickou jedničku*.

Řešení: Na pravoúhlý trojúhelník aplikujeme Pýthagorovu větu.



$$|\cos \alpha|^2 + |\sin \alpha|^2 = 1^2,$$

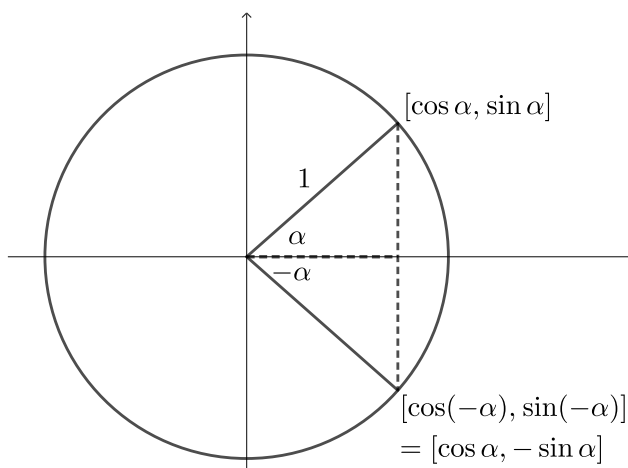
dostáváme tak *goniometrickou jedničku*, tj. pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

8. Ukažte, že sinus je funkce lichá a kosinus je funkce sudá.

Řešení: Vyjdeme z definice sudé a liché funkce. Prošetřování parity libovolné funkce $y = f(x)$ s definičním oborem souměrným podle počátku (tj. pokud $x \in D_f$, pak také $-x \in D_f$) vždy začíná dosazením $-x$ za x .

- Je-li pro každé $x \in D_f$: $f(-x) = f(x)$, říkáme, že funkce f je sudá.
- Je-li pro každé $x \in D_f$: $f(-x) = -f(x)$, říkáme, že funkce f je lichá.



Na obrázku pozorujeme, že x -ová souřadnice průsečíku průvodiče s jednotkovou kružnicí příslušného $-\alpha$ zůstává stejná, y -ová souřadnice změní znaménko díky souměrnosti podle osy x :

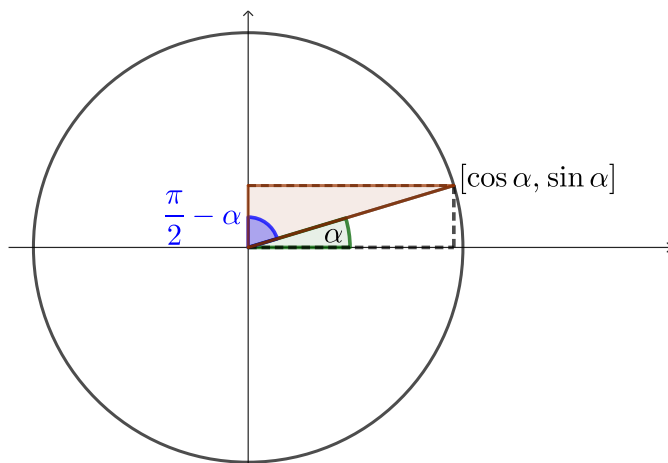
- $\cos(-x) = \cos x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, funkce kosinus je tedy sudá.
- $\sin(-x) = -\sin x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, funkce sinus je tedy lichá.

9. Odvoďte následující vztahy mezi funkcemi sinus a kosinus: pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

$$\cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right),$$

$$\sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

Řešení: Na obrázku pozorujeme dva pravoúhlé trojúhelníky.



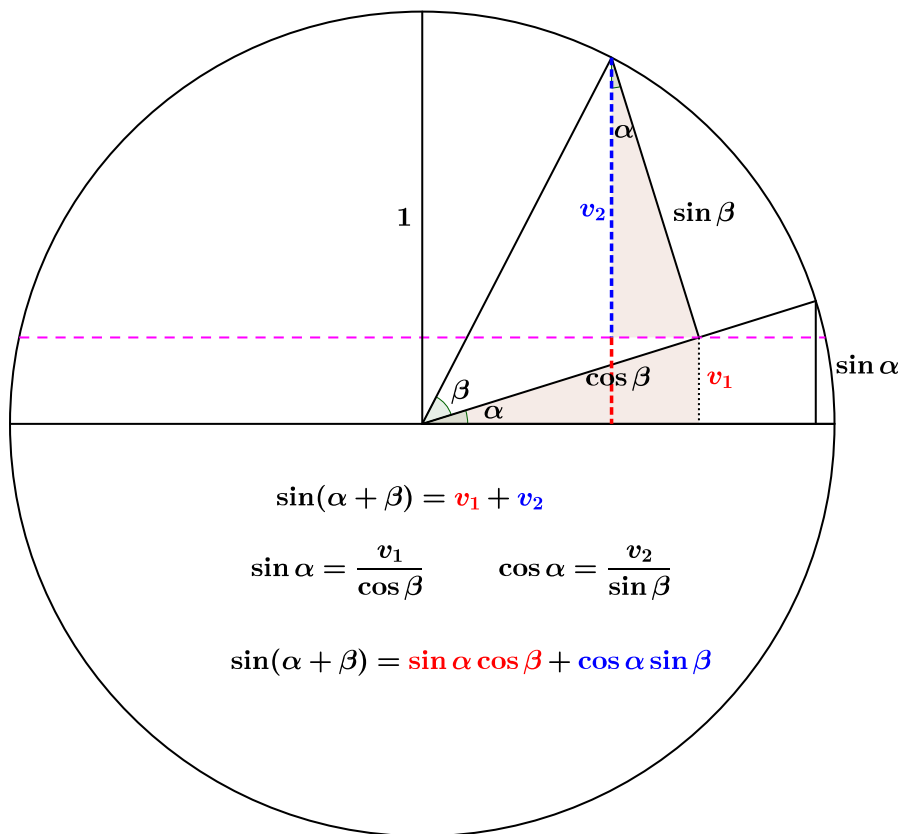
- x -ovou souřadnici průsečíku průvodiče s jednotkovou kružnicí (tj. $\cos \alpha$) vyjádříme i z horního vybarveného trojúhelníku, dostaneme: $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$;
 - y -ovou souřadnici průsečíku průvodiče s jednotkovou kružnicí (tj. $\sin \alpha$) vyjádříme i z horního vybarveného trojúhelníku, dostaneme: $\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$.
10. Všimněme si: díky právě odvozeným vztahům stačí znát základní hodnoty funkce sinus, odpovídající hodnoty funkce kosinus se z nich snadno odvodí. Vše je shrnuto v následující tabulce.

$\sin 0^\circ$	$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$	$\cos 90^\circ$
$\sin 30^\circ$	$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2}$	$\cos 60^\circ$
$\sin 45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45^\circ$
$\sin 60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 30^\circ$
$\sin 90^\circ$	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$	$\cos 0^\circ$

11. Odvoďte součtový vzorec pro funkci sinus, tj. pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Řešení: Pro jednoduchost se budeme pohybovat pouze v prvním kvadrantu. Opět vyjdeme z obrázku.



Toto odvození vychází přímo z definice funkce sinus a kosinus. Zajímavé na něm je, že poskytuje přímou geometrickou interpretaci oběma sčítancům – jsou to příslušné části celé výšky:

- **červená:** $v_1 = \sin \alpha \cos \beta$,
- **modrá** $v_2 = \cos \alpha \sin \beta$.

12. Odvoďte součtový vzorec pro funkci kosinus, tj. pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí:

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.}$$

Využijte znalosti součtového vzorce pro funkci sinus a vztahu mezi funkcemi sinus a kosinus.

Řešení: Toto odvození je příjemné v tom, že se jednoduše provede pomocí prostého výpočtu.

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + (-\beta)\right).$$

Nyní stačí aplikovat již odvozený součtový vzorec pro sinus, dále využijeme sudost a lichost:

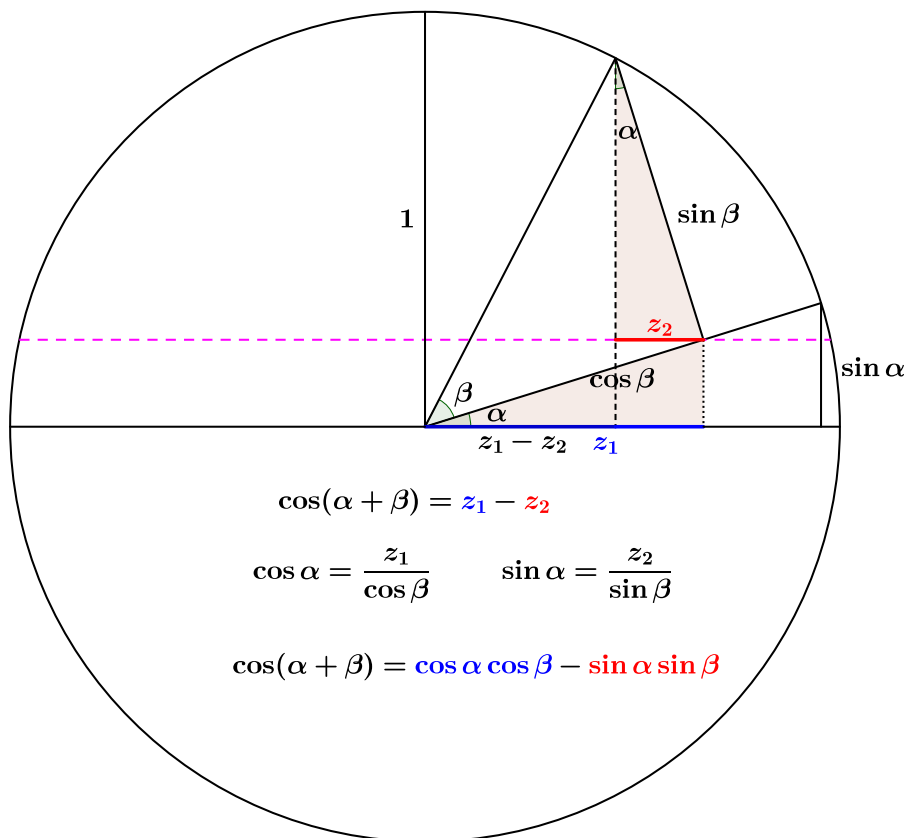
$$\begin{aligned} \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + (-\beta)\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos(-\beta) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin(-\beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha (-\sin \beta). \end{aligned}$$

Celkově dostáváme výsledný součtový vzorec:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

13. Odvoďte součtový vzorec pro funkci kosinus pomocí jednotkové kružnice.

Řešení: Opět můžeme vyjít z obrázku. Vidíme však, že geometrická interpretace už není tak pěkná jako v případě součtového vzorce pro funkci sinus, objevuje se rozdíl dvou úseček $z_1 - z_2$ (opět vyznačeny modře a červeně).



14. Pomocí součtových vzorců lze vypočítat některé další hodnoty. Například vypočítejte $\sin 75^\circ$.

Řešení:

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\sqrt{3} + 1)$$

15. Odvoďte součtový vzorec pro funkci tangens. Využijte součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus.

Řešení: Funkci tangens rozepíšeme podle definice.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}.$$

Nyní vydělíme čítec i jmenovatel výrazem $\cos \alpha \cos \beta$, čímž získáme všude funkci tangens:

$$\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Celkově tak dostáváme součtový vzorec pro funkci tangens ($\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$):

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

16. Pomocí součtových vzorců odvoďte následující vztahy (platné pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$).

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

- $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$

Použijeme goniometrickou jedničku:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha.$$

- $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

Použijeme goniometrickou jedničku:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1.$$

17. Odvoďte vztah pro $\cos \frac{\alpha}{2}$.

Řešení: Vyjdeme ze vzorce pro $\cos 2\alpha$:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

a vyjádříme $\cos \alpha$:

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha$$

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \cos^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}.$$

Označíme-li $\alpha = \frac{x}{2}$, dostaneme

$$\boxed{\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}}.$$

18. Odvoďte vztah pro $\sin \frac{\alpha}{2}$.

Řešení: Vyjdeme ze vzorce pro $\cos 2\alpha$:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

a vyjádříme $\sin \alpha$:

$$2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}.$$

Označíme-li $\alpha = \frac{x}{2}$, dostaneme

$$\boxed{\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}}.$$

19. Vypočítejte $\sin 15^\circ$ a $\cos 15^\circ$.

Řešení: Využijeme právě odvozených vzorců a známých hodnot $\sin 30^\circ$ a $\cos 30^\circ$:

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2},$$

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

20. Odvoďte vyjádření $\sin x + \sin y$ pomocí součinu goniometrických funkcí.

Řešení: Napišme součtové vzorce pro sinus:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

Jejich sečtením dostaneme:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta.$$

Nyní stačí označit $\alpha + \beta = x$ a $\alpha - \beta = y$. Vyjádření α a β pomocí x a y je vlastně řešením soustavy lineárních rovnic:

$$\alpha + \beta = x$$

$$\alpha - \beta = y$$

Sečtením a odečtením obou rovnic dostaneme:

$$2\alpha = x + y, \quad \text{tj. } \alpha = \frac{x + y}{2},$$

$$2\beta = x - y, \quad \text{tj. } \beta = \frac{x - y}{2}.$$

Dosazením za α a β do rovnosti

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

dostaneme

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}.$$

21. Podobným způsobem bychom mohli odvodit vztah pro $\cos \alpha + \cos \beta$.

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}.$$

Návod: sečteme součtové vzorce pro kosinus: $\cos(\alpha + \beta)$ a $\cos(\alpha - \beta)$.

22. Pozorování (v čitateli použijeme goniometrickou jedničku):

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$$

Dostali jsme tak vztah (platný pro každé $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$):

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

23. Odvoďte vyjádření sinu a kosinu pomocí funkce tangens.

Řešení: Využijeme předchozího vztahu:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

tj.

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

takže na intervalech, kde je kosinus kladný, tj. $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, platí:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

Použijeme-li goniometrickou jedničku ve vztahu

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

dostaneme

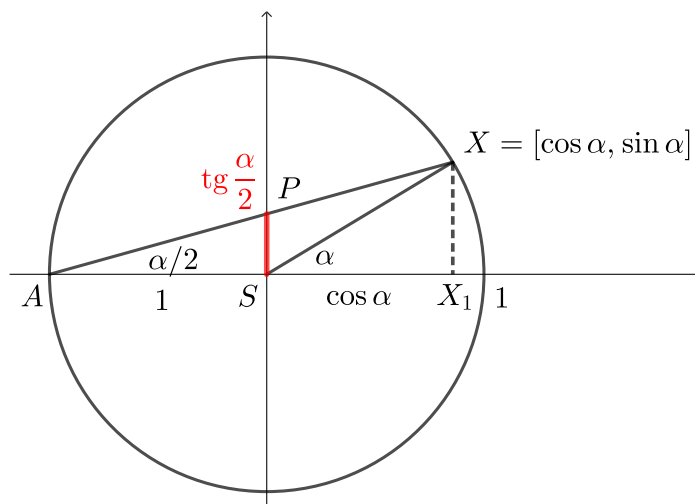
$$1 - \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \text{tj. } \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha - 1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

takže na intervalech $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, platí:

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

24. *Univerzální substituce.* Odvoďte vyjádření $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ a $\operatorname{tg} \alpha$ pomocí $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Řešení: Pro jednoduchost budeme uvažovat $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Vztah mezi úhly $\angle XSX_1$ a $\angle XAX_1$ vyplývá z věty o obvodových a středových úhlech: je-li $|\angle XSX_1| = \alpha$ (středový úhel), pak $|\angle XAX_1| = \frac{\alpha}{2}$ (příslušný úhel obvodový).



V pravoúhlém trojúhelníku $\triangle ASP$ vidíme, že červeně vyznačená úsečka má délku $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, kterou označíme t :

$$t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

S tímto trojúhelníkem je podobný trojúhelník $\triangle AX_1X$. Z této podobnosti dostáváme:

$$\frac{|X_1X|}{|AX_1|} = \frac{|SP|}{|AS|},$$

tj.

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{t}{1}.$$

Umocněním na druhou dostaneme:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2} = t^2.$$

Levou stranu upravíme (goniometrická jednička, $a^2 - b^2$):

$$\frac{\sin^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha},$$

takže

$$\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = t^2,$$

odkud již snadno vyjádříme $\cos \alpha$:

$$1 - \cos \alpha = t^2 (1 + \cos \alpha),$$

$$1 - t^2 = t^2 \cos \alpha + \cos \alpha,$$

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Jelikož

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = t,$$

dostáváme vyjádření $\sin \alpha$:

$$\sin \alpha = t (1 + \cos \alpha) = t \left(1 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right) = t \cdot \frac{1 + t^2 + 1 - t^2}{1 + t^2} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

tedy

$$\boxed{\sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Vyjádření $\operatorname{tg} \alpha$ odvodíme přímo z definice funkce tangens:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2},$$

tedy

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

Je pro úplnost: vyjádření $\operatorname{cotg} \alpha$ odvodíme z vyjádření $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\frac{2t}{1-t^2}} = \frac{1-t^2}{2t},$$

tedy

$$\boxed{\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1 - t^2}{2t}.$$

Uvedená vyjádření sinu, kosinu, tangens a kotangens se nazývají univerzální substituce, neboť umožňují vyjádřit všechny goniometrické funkce pouze pomocí $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Univerzální substituce nachází uplatnění zejména při integraci, neboť vyjadřují goniometrické funkce pomocí racionálních funkcí, které lze vždy integrovat.