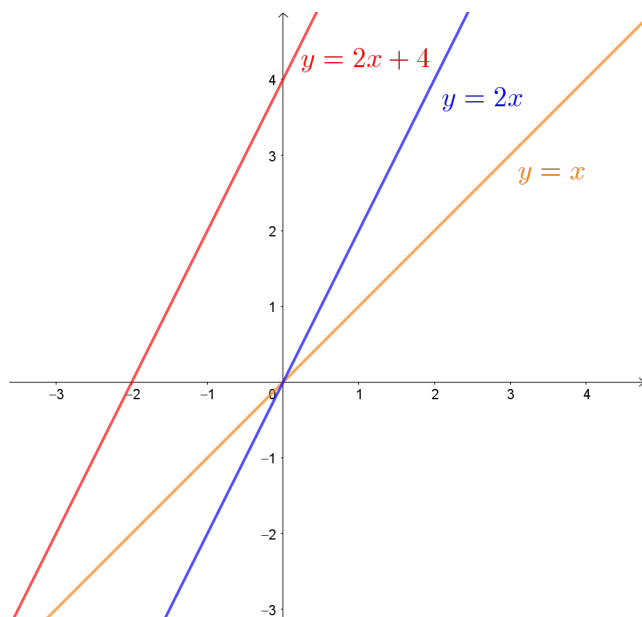


Lineární funkce

$$f: y = ax + b, D_f = \mathbb{R}$$

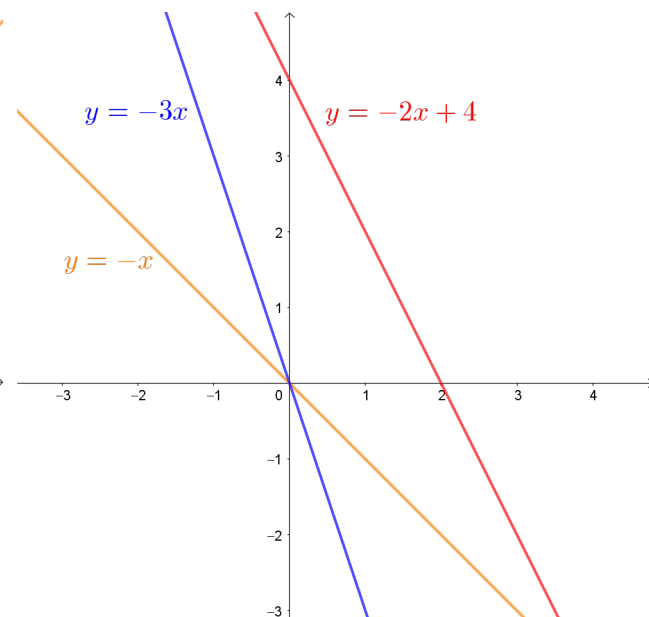
a) $a > 0, H_f = \mathbb{R}$

- rostoucí
- není ani shora, ani zdola omezená
- prostá
- nemá min, nemá max



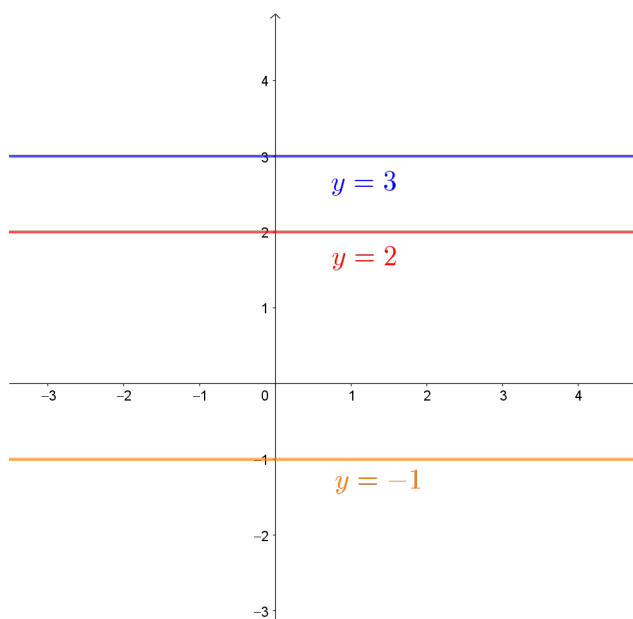
b) $a < 0, H_f = \mathbb{R}$

- klesající
- není ani shora, ani zdola omezená
- prostá
- nemá min, nemá max



c) $a = 0, H_f = b$

- konstantní funkce
- není ani rostoucí, ani klesající
- je sudá, v případě, že $b = 0$ je funkce i lichá
- je omezená (omezená shora i zdola)
- není prostá
- má min a max v každém bodě $x \in \mathbb{R}$

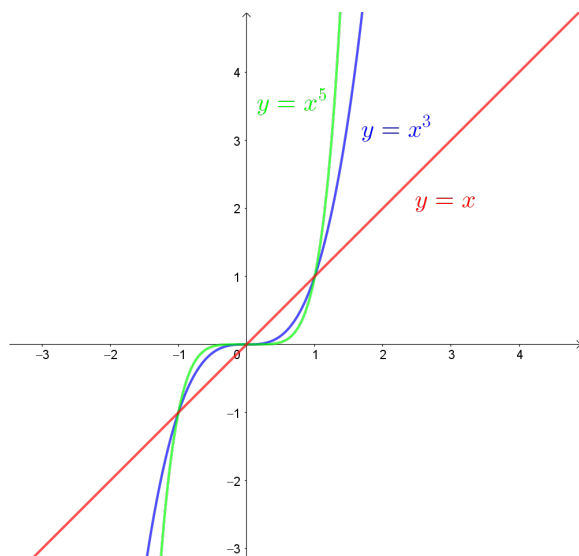


Mocninné funkce

$$f: y = x^n; n \in \mathbb{N}, D_f = \mathbb{R}$$

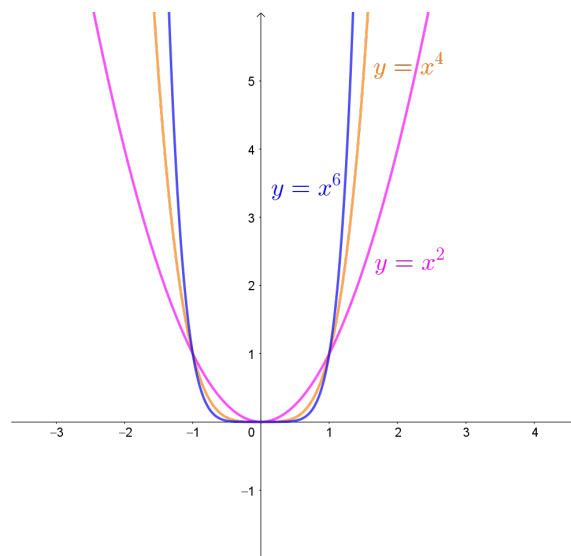
a) n je liché, $H_f = \mathbb{R}$

- rostoucí
- lichá
- není ani shora, ani zdola omezená
- prostá
- nemá min, nemá max



b) n je sudé, $H_f = \langle 0; +\infty \rangle$

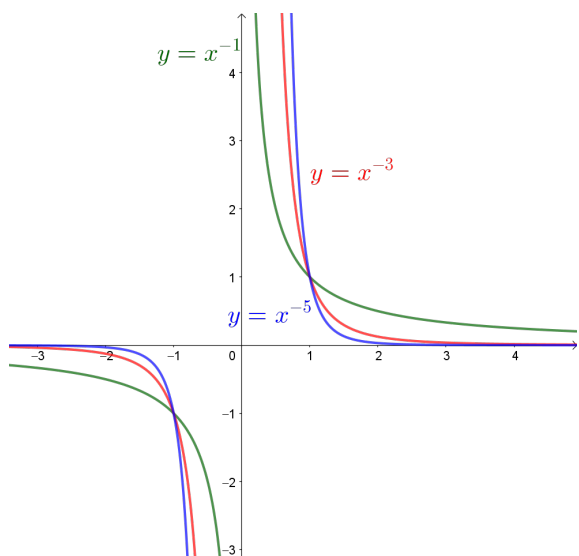
- klesající v $(-\infty; 0)$, rostoucí v $\langle 0; +\infty \rangle$
- sudá
- je zdola omezená, není shora omezená
- není prostá
- má min v bodě 0, nemá max



$$f: y = x^n; n \in \mathbb{Z}^-, D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

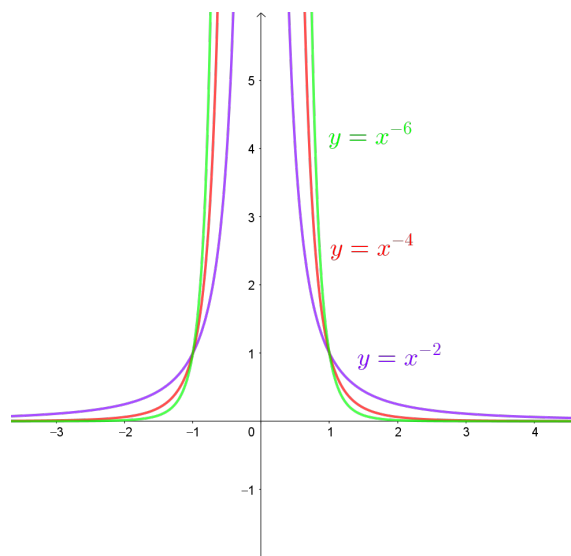
c) n je liché, $H_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- klesající v $(-\infty; 0)$ a v $(0; +\infty)$
- lichá
- není ani shora, ani zdola omezená
- prostá
- nemá min, nemá max



d) n je sudé, $H_f = \mathbb{R}^+$

- rostoucí v $(-\infty; 0)$, klesající v $(0; +\infty)$
- sudá
- je zdola omezená, není shora omezená
- není prostá
- nemá min, nemá max

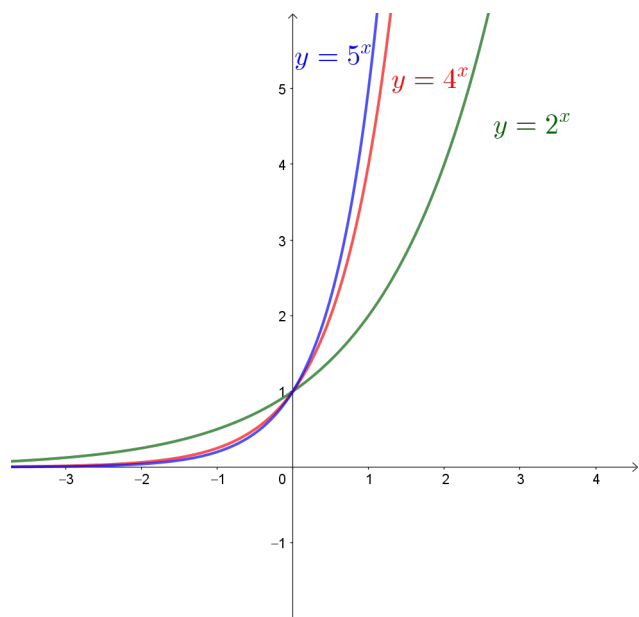


Exponenciální funkce

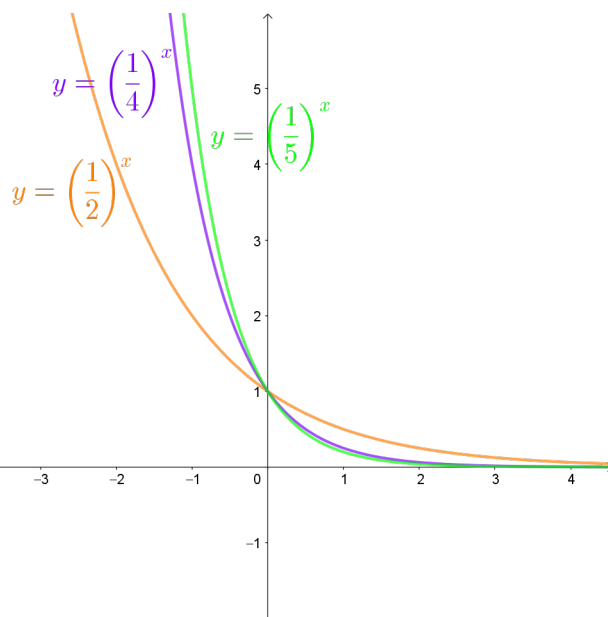
$$f: y = a^x; a > 0, a \neq 1, D_f = \mathbb{R}, H_f = \mathbb{R}^+$$

a) $a > 1$

- rostoucí
- ani sudá, ani lichá
- je zdola omezená, není shora omezená
- prostá
- nemá min, nemá max

b) $0 < a < 1$

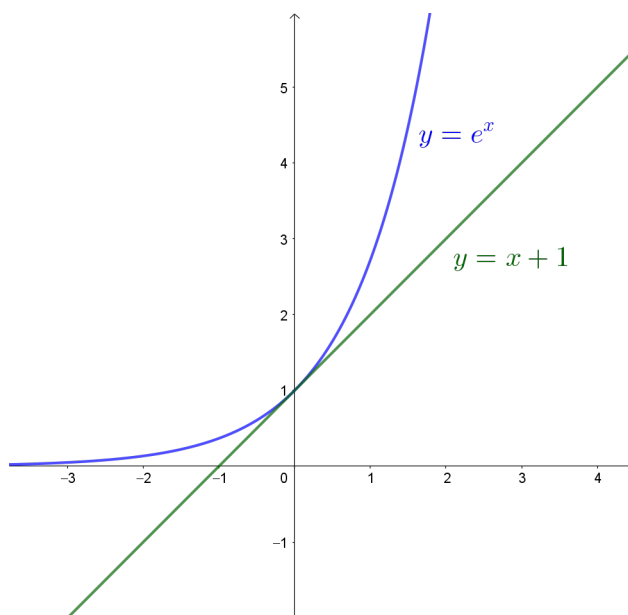
- klesající
- ani sudá, ani lichá
- je zdola omezená, není shora omezená
- prostá
- nemá min, nemá max



Přirozená exponenciální funkce

$$f: y = e^x; D_f = \mathbb{R}, H_f = \mathbb{R}^+$$

Eulerovo číslo $e \doteq 2,718281828459$

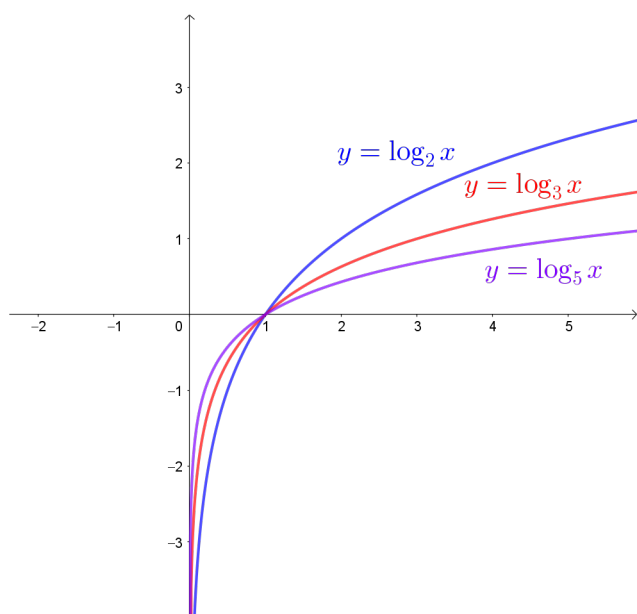


Logaritmická funkce

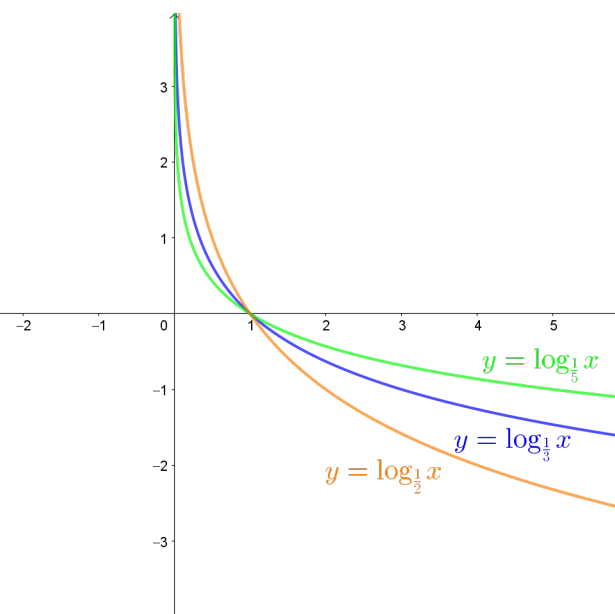
$$f: y = \log_a x; a > 0, a \neq 1, D_f = \mathbb{R}^+, H_f = \mathbb{R}$$

a) $a > 1$

- rostoucí
- ani sudá, ani lichá
- není ani shora, ani zdola omezená
- prostá
- nemá min, nemá max

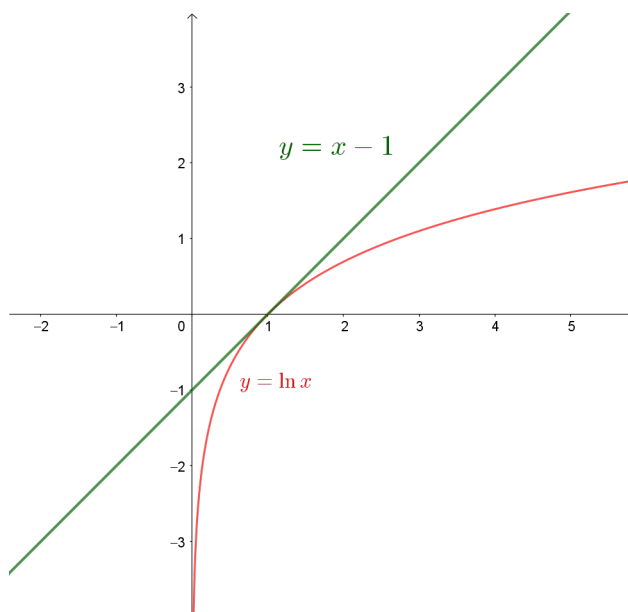
b) $0 < a < 1$

- klesající
- ani sudá, ani lichá
- není ani shora, ani zdola omezená
- prostá
- nemá min, nemá max



Přirozený logaritmus

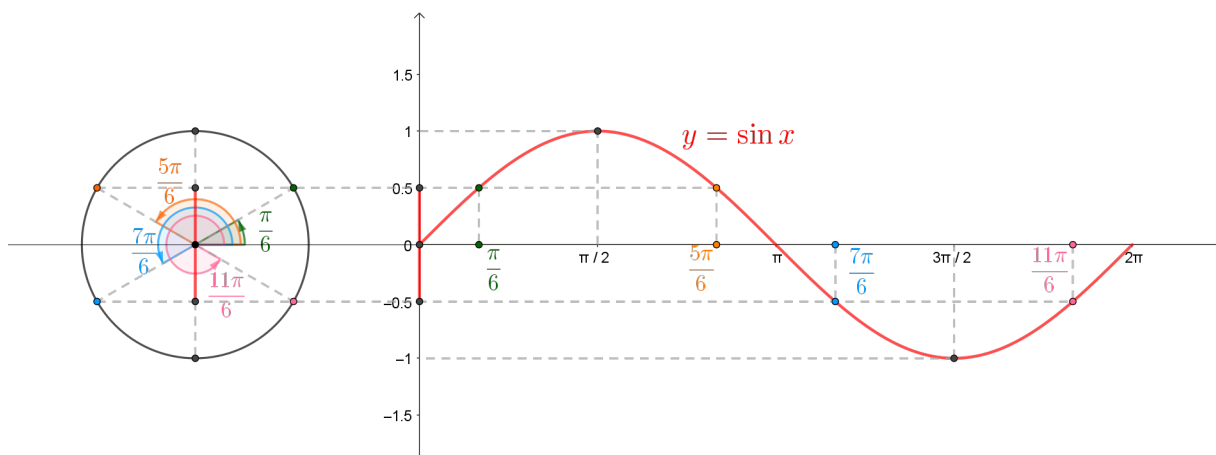
$$f: y = \log_e x = \ln x; D_f = \mathbb{R}^+, H_f = \mathbb{R}$$



Goniometrické funkce

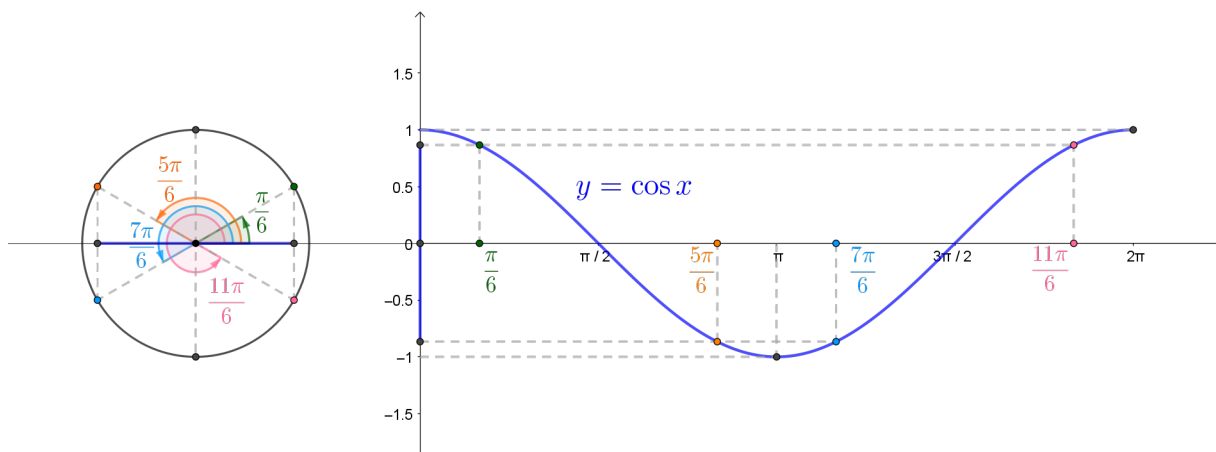
a) $f: y = \sin x; D_f = \mathbb{R}, H_f = \langle -1; 1 \rangle$

- rostoucí v $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, klesající v $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle$
- lichá
- je omezená (omezená shora i zdola)
- nejmenší perioda 2π
- není prostá
- má min v každém bodě $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, má max v každém bodě $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$



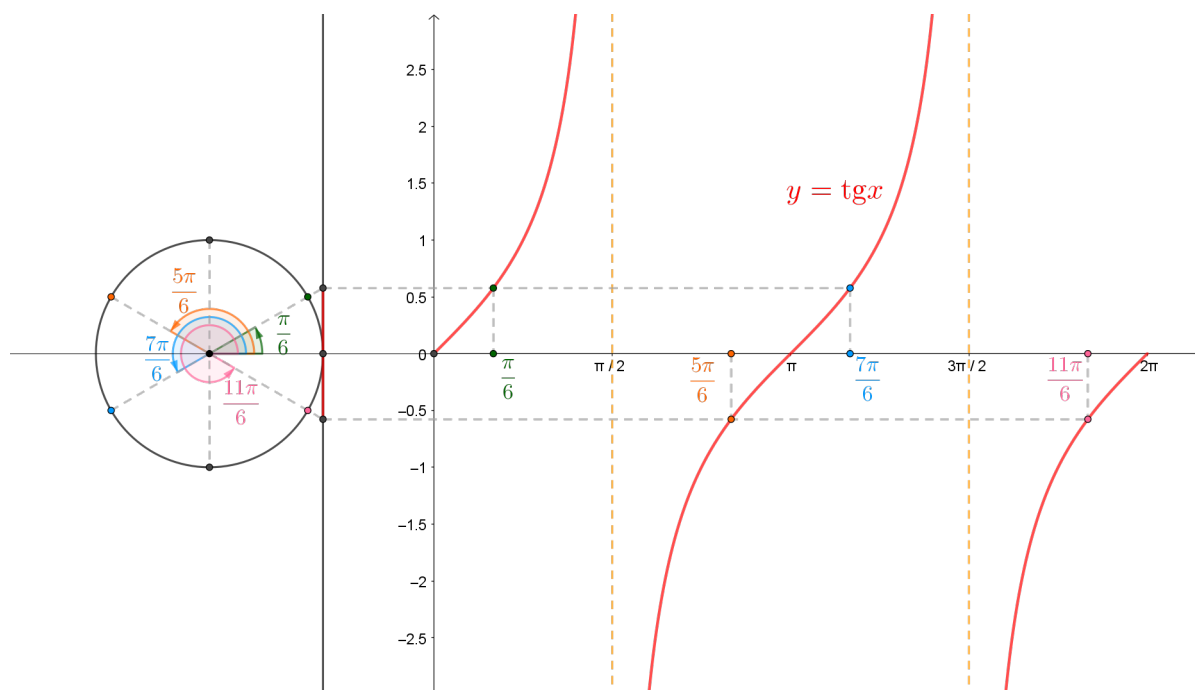
b) $f: y = \cos x; D_f = \mathbb{R}, H_f = \langle -1; 1 \rangle$

- rostoucí v $\langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \rangle$, klesající v $\langle 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle$
- sudá
- je omezená (omezená shora i zdola)
- nejmenší perioda 2π
- není prostá
- má min v každém bodě $\pi + 2k\pi$, má max v každém bodě $2k\pi$



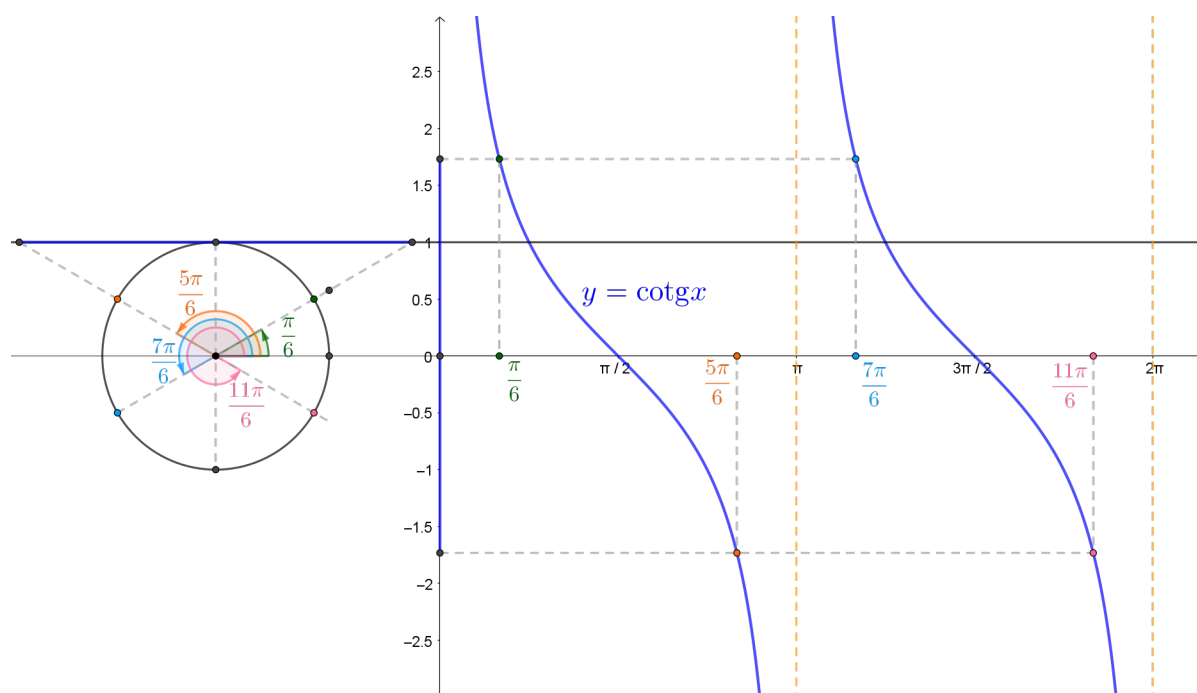
c) $f: y = \operatorname{tg} x; D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right), H_f = \mathbb{R}$

- rostoucí v $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$
- lichá
- není ani shora, ani zdola omezená
- nejmenší perioda π
- není prostá
- nemá min, nemá max



d) $f: y = \cotg x; D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi; \pi + k\pi), H_f = \mathbb{R}$

- klesající v $(k\pi; \pi + k\pi)$
- lichá
- není ani shora, ani zdola omezená
- nejmenší perioda π
- není prostá
- nemá min, nemá max

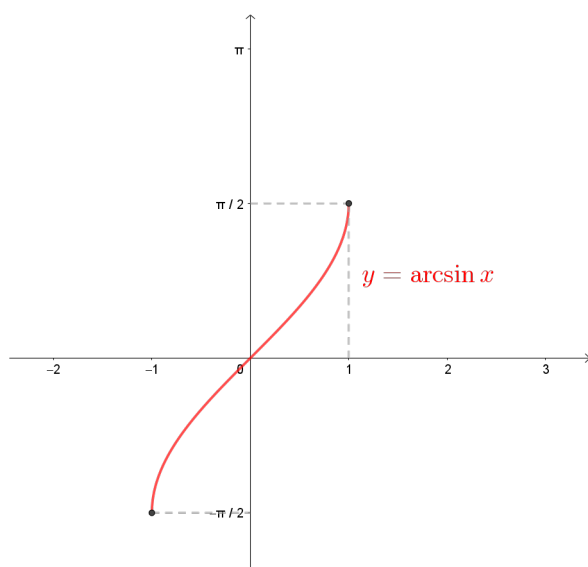


Cyklometrické funkce

inverzní funkce ke goniometrickým funkcím zúženým na daný interval, kde je funkce prostá

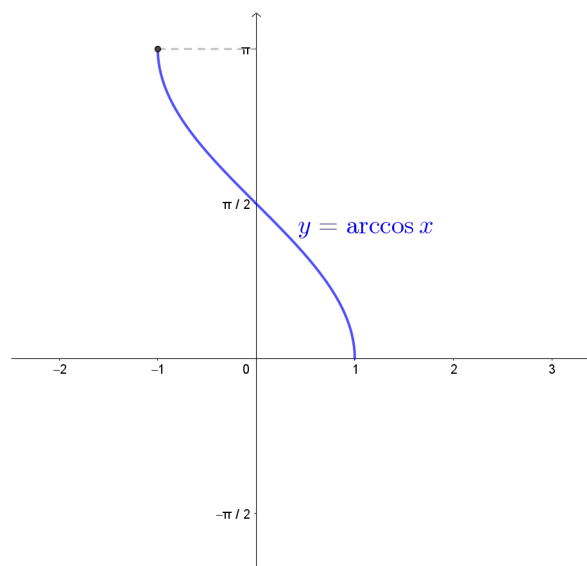
a) $y = \arcsin x; D_f = \langle -1; 1 \rangle, H_f = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

- rostoucí
- lichá
- je omezená (omezená shora i zdola)
- prostá
- má min v bodě -1 , má max v bodě 1



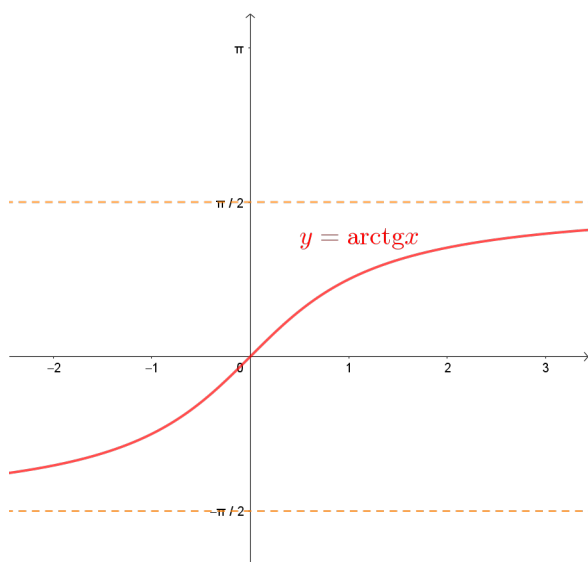
b) $y = \arccos x; D_f = \langle -1; 1 \rangle, H_f = \langle 0; \pi \rangle$

- klesající
- ani sudá, ani lichá
- je omezená (omezená shora i zdola)
- prostá
- má min v bodě 1 , má max v bodě -1



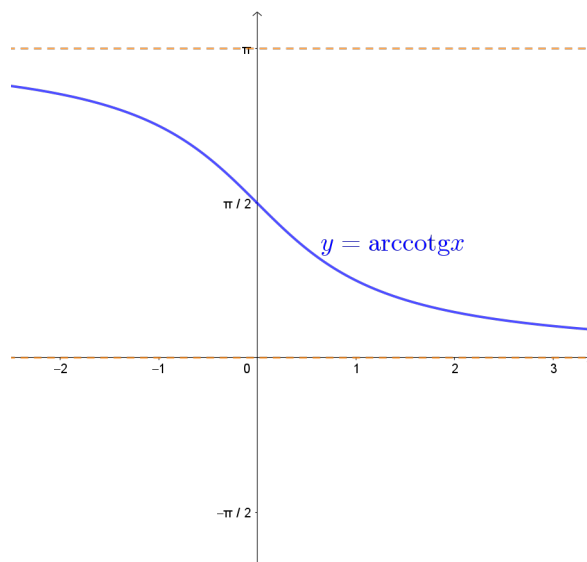
c) $y = \operatorname{arctg} x; D_f = \mathbb{R}, H_f = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$

- rostoucí
- lichá
- je omezená (omezená shora i zdola)
- prostá
- nemá min, nemá max



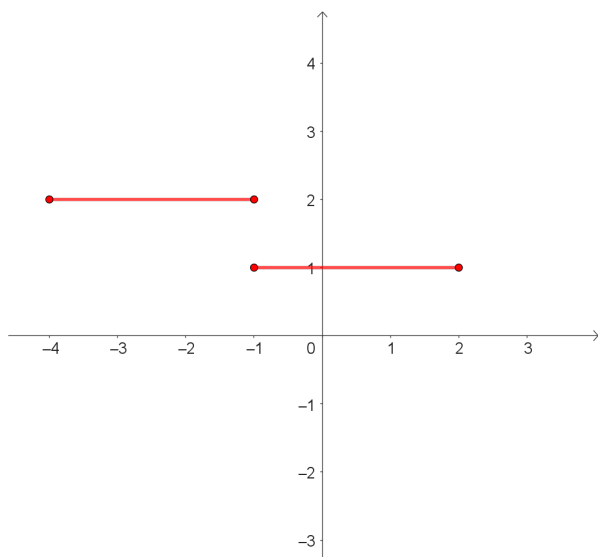
d) $y = \operatorname{arccotg} x; D_f = \mathbb{R}, H_f = (0; \pi)$

- klesající
- ani sudá, ani lichá
- je omezená (omezená shora i zdola)
- prostá
- nemá min, nemá max

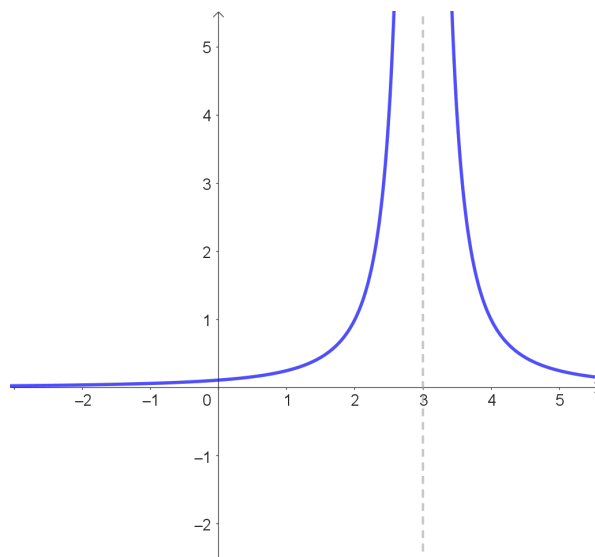


- 1) Rozhodněte, které z nakreslených množin bodů jsou grafem funkce. Pokud se jedná o graf funkce, určete definiční obor a obor hodnot a další vlastnosti funkcí.

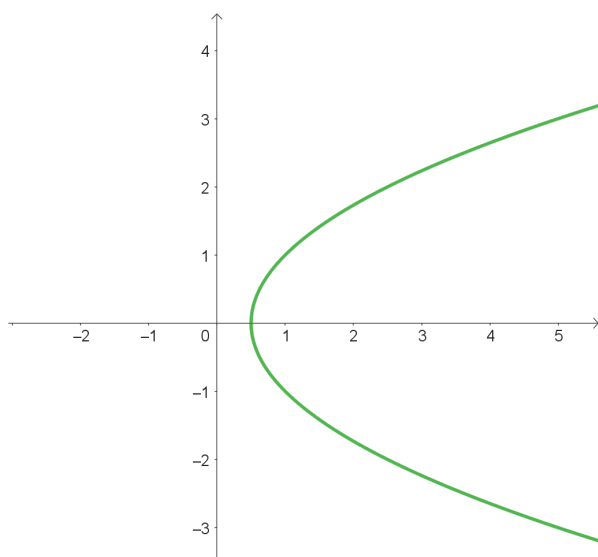
a)



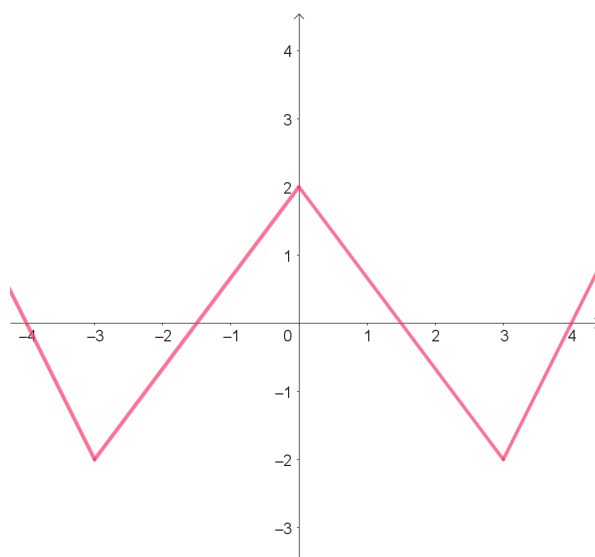
b)



c)



d)



Řešení:

- a) Není funkce, protože číslu $x = -1$ jsou přiřazeny dvě hodnoty 1 a 2.
- b) Je funkce. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $H_f = \mathbb{R}^+$, rostoucí v $(-\infty; 3)$, klesající v $(3; +\infty)$, není sudá, není lichá, je zdola omezená, není shora omezená, není prostá, nemá min, nemá max.
- c) Není funkce, protože číslům $x \in (0, 5; +\infty)$ jsou přiřazeny dvě hodnoty.
- d) Je funkce. $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \langle -2; +\infty \rangle$, klesající v $(-\infty; -3)$ a v $\langle 0; 3 \rangle$, rostoucí v $\langle -3; 0 \rangle$ a v $\langle 3; +\infty \rangle$, je sudá, není lichá, je zdola omezená, není prostá, má min v bodech -3 a 3 , nemá max (ve smyslu globálního minima a maxima).
- 2) Dokažte, že funkce $f: y = 3x - 2$ je rostoucí v $\mathbb{R}$.

Řešení: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \text{je-li } x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$ tj. $3x_1 - 2 < 3x_2 - 2$.

3) Určete, které z funkcí jsou sudé (liché) v definičním oboru.

a) $f_1: y = \frac{4x}{x^2 - 4}$

b) $f_2: y = (x - 1)^3 + 2$

Řešení:

a) Funkce je lichá, neboť $f_1(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2 - 4} = -\frac{4x}{x^2 - 4} = -f_1(x)$.

b) Funkce není ani sudá, ani lichá, neboť $f_2(-x) = (-x - 1)^3 + 2 \neq f_2(x)$, ani $f_2(-x) = (-x - 1)^3 + 2 \neq -f_2(x)$.

4) Určete definiční obor funkce

a) $f_1: y = \sqrt{5 - x^2}$

e) $f_5: y = \frac{1}{e^{2x} - e^x - 2}$

b) $f_2: y = \frac{4x}{x^2 + 1}$

f) $f_6: y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

c) $f_3: \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 9x}}$

g) $f_7: y = \frac{1 + \ln x}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$

d) $f_4: \sqrt{\frac{x}{x + 1}}$

h) $f_8: y = (x - 1)^3 + 2$

Řešení:

a) Z odmocniny plyne podmínka: $5 - x^2 \geq 0$, tj.

$$\begin{aligned} x^2 &\leq 5 \\ |x| &= \sqrt{5} \\ D_{f_1} &= \langle -\sqrt{5}; \sqrt{5} \rangle \end{aligned}$$

b) Ze zlomku plyne podmínka: $x^2 + 1 \neq 0$. Výraz $x^2 + 1$ je vždy kladný, tj. $D_{f_2} = \mathbb{R}$.

c) Z odmocniny plyne podmínka: $x^2 - 9x \geq 0$. Odmocnina je ale ve jmenovateli, výraz pod odmocninou se tedy nesmí rovnat nule, podmínka bude $x^2 - 9x > 0$, tj.

$$\begin{aligned} x(x - 9) &> 0 \\ \iff (x > 0 \wedge x - 9 > 0) \vee (x < 0 \wedge x - 9 < 0) \\ D_{f_3} &= (-\infty; 0) \cup (9; +\infty) \end{aligned}$$

d) Z odmocniny plyne podmínka: $\frac{x}{x + 1} \geq 0$. Jmenovatel nesmí být roven nule, což zohledníme ve výpočtu nerovnice, tj.

$$\begin{aligned} \frac{x}{x + 1} &\geq 0 \\ \iff (x \geq 0 \wedge x + 1 > 0) \vee (x \leq 0 \wedge x + 1 < 0) \\ D_{f_4} &= (-\infty; -1) \cup \langle 0; +\infty \rangle \end{aligned}$$

e) Ze zlomku plyne podmínka: $e^{2x} - e^x - 2 \neq 0$. Řešíme pomocí substituce, tj.

$$\begin{aligned} y &= e^x \wedge y^2 - y - 2 \neq 0 \\ D &= 9, y_{1,2} = -2, 1 \\ e^x &= -2 \Rightarrow \text{nemá řešení,} \\ e^x &= 1 \Rightarrow x = 0, \text{ tedy tento výsledek} \\ &\text{musíme vyloučit z definičního oboru, tj.} \\ D_{f_5} &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

f) Z odmocniny plyne podmínka: $x \geq 0$. Odmocnina je ale ve jmenovateli, výraz pod odmocninou se tedy nesmí rovnat nule, podmínka bude $x > 0$. Z přirozeného logaritmu plyne rovněž $x > 0$, tj. $D_{f_6} = (0; +\infty)$.

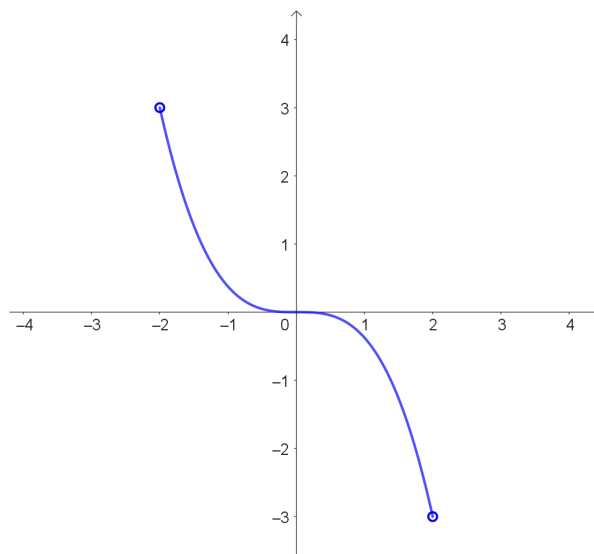
g) Ze zlomku plyne podmínka: $x\sqrt{1 - \ln^2 x} \neq 0$, tj. $x \neq 0$ a $\sqrt{1 - \ln^2 x} \neq 0$. Zároveň z odmocniny plyne podmínka: $1 - \ln^2 x \geq 0$ a z přirozeného logaritmu $x > 0$. Řešíme tedy nerovnice: $x > 0$ a $1 - \ln^2 x > 0$, tj.

$$\begin{aligned} (1 - \ln x)(1 + \ln x) &> 0 \\ \iff (1 - \ln x > 0 \wedge 1 + \ln x > 0) \vee \\ &(1 - \ln x < 0 \wedge 1 + \ln x < 0) \\ D_{f_7} &= \left(\frac{1}{e}; e\right) \end{aligned}$$

h) Žádná podmínka neplyne, tj. $D_{f_8} = \mathbb{R}$.

- 5) Načrtněte graf funkce, pro kterou platí: $D_f = (-2; 2)$, je lichá, je klesající.

Řešení:



- 6) Rozhodněte, zda k funkcím existuje funkce inverzní. Jestliže ano, zakreslete funkci a inverzní funkci do téže soustavy souřadnic. Určete předpis, definiční obor a obor hodnot inverzní funkce.

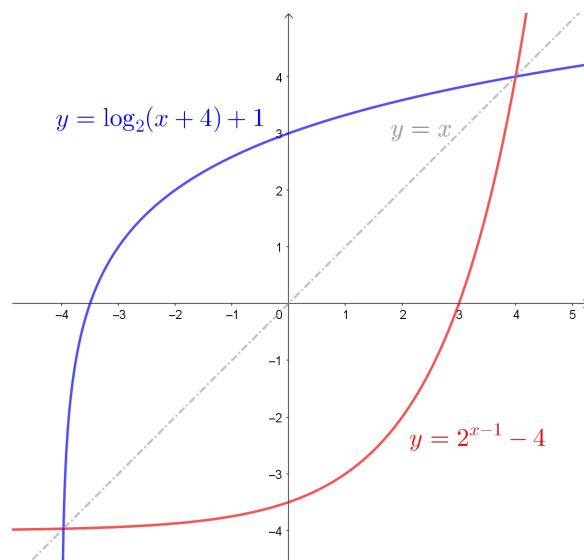
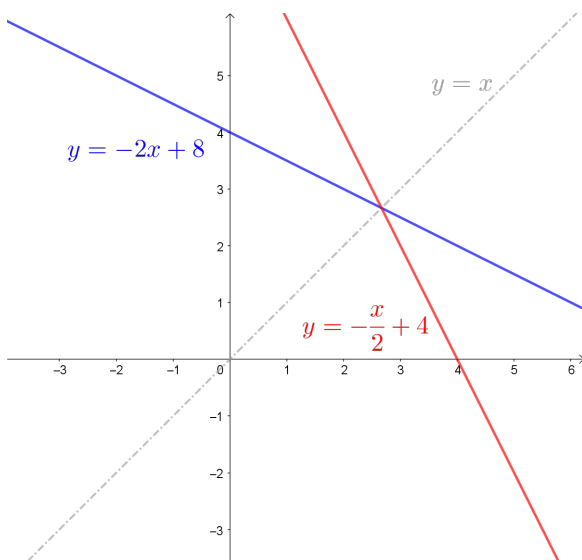
a) $f_1: y = -\frac{x}{2} + 4$

b) $f_2: y = 2^{x-1} - 4$

Řešení:

a) $f_1^{-1}: y = -2x + 8$
 $D_{f_1^{-1}} = \mathbb{R} = H_{f_1}$
 $H_{f_1^{-1}} = \mathbb{R} = D_{f_1}$

b) $f_2^{-1}: y = \log_2(x + 4) + 1$
 $D_{f_2^{-1}} = (-4; +\infty) = H_{f_2}$
 $H_{f_2^{-1}} = \mathbb{R} = D_{f_2}$



- 7) Načrtněte grafy funkcí. Určete definiční obor, obor hodnot, průsečíky grafu funkce se souřadnicovými osami.

a) $f_1: y = -2x^2 + x + 1$

b) $f_2: y = |x^2 + 2|x| - 3|$

c) $f_3: y = \frac{1}{(x+2)^4} - 1$

d) $f_4: y = \frac{3x+4}{x+1}$

Řešení:

a) $f_1: y = -2x^2 + x + 1 = -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$

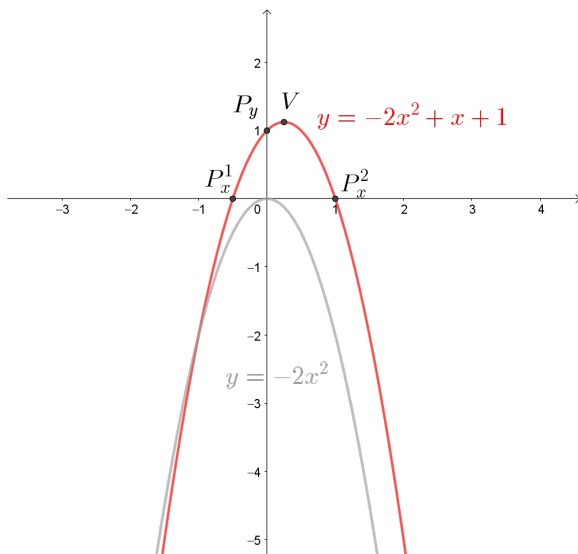
$$V = \left[\frac{1}{4}; \frac{9}{8}\right]$$

$$D_{f_1} = \mathbb{R}, H_{f_1} = \left(-\infty; \frac{9}{8}\right)$$

$$P_x: y = 0 \implies -2x^2 + x + 1 = 0 \implies$$

$$P_x^1 = \left[-\frac{1}{2}; 0\right], P_x^2 = [1; 0]$$

$$P_y: x = 0 \implies P_y = [0; 1]$$



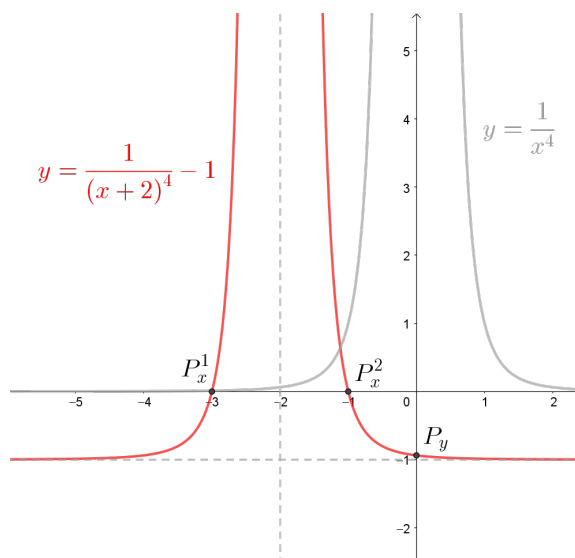
c) $f_3: y = \frac{1}{(x+2)^4} - 1$

$$D_{f_3} = \mathbb{R}, H_{f_3} = (-1; +\infty)$$

$$P_x: y = 0 \implies \frac{1}{(x+2)^4} - 1 = 0 \implies$$

$$P_x^1 = [-3; 0], P_x^2 = [-1; 0]$$

$$P_y: x = 0 \implies P_y = [0; -1]$$



b) $f_2: y = |x^2 + 2|x| - 3|$

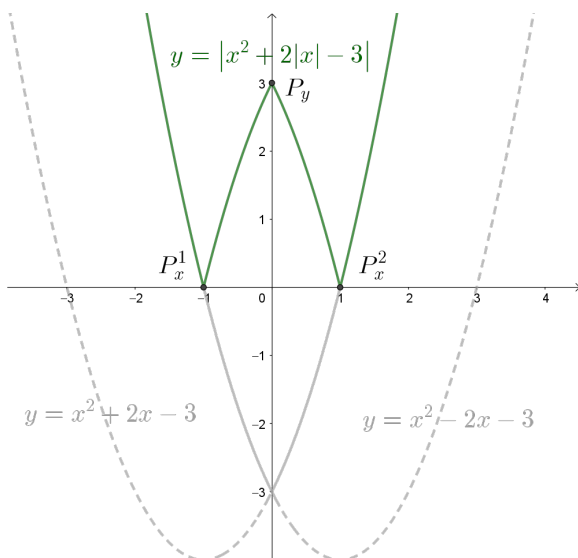
$$D_{f_2} = \mathbb{R}, H_{f_2} = \langle 0; +\infty \rangle$$

$$P_x: y = 0 \implies |x^2 + 2|x| - 3| = 0 \implies$$

$$\text{pro } x < 0: x^2 - 2x - 3 = 0 \implies P_x^1 = [-1; 0]$$

$$\text{pro } x \geq 0: x^2 + 2x - 3 = 0 \implies P_x^2 = [1; 0]$$

$$P_y: x = 0 \implies P_y = [0; 3]$$



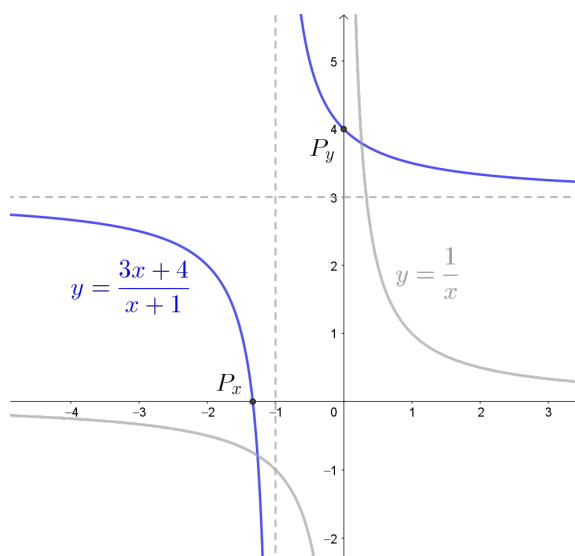
d) $f_4: y = \frac{3x+4}{x+1} = \frac{1}{x+1} + 3$

$$D_{f_4} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, H_{f_4} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$P_x: y = 0 \implies \frac{3x+4}{x+1} = 0 \implies$$

$$P_x = \left[-\frac{4}{3}; 0\right]$$

$$P_y: x = 0 \implies P_y = [0; 4]$$



- 8) Nakreslete graf funkce $f: y = \frac{2x+a}{x-1}$ pro $a \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$. Jak hodnota parametru a ovlivňuje graf funkce?

Řešení:

$$a = -4: y = \frac{2x-4}{x-1} = -\frac{2}{x-1} + 2$$

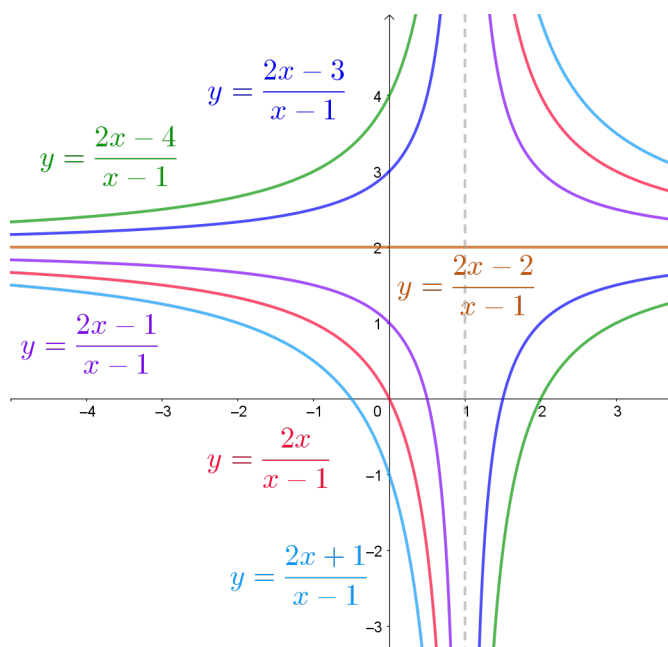
$$a = -3: y = \frac{2x-3}{x-1} = -\frac{1}{x-1} + 2$$

$$a = -2: y = \frac{2x-2}{x-1} = 2$$

$$a = -1: y = \frac{2x-1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 2$$

$$a = 0: y = \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 2$$

$$a = 1: y = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 2$$



- 9) Určete předpis kvadratické funkce f , víte-li, že graf funkce f prochází body $A = [-1; 2]$, $B = [0; -1]$, $C = [1; 0]$.

Řešení:

Do předpisu funkce $f: y = ax^2 + bx + c$ dosadíme souřadnice bodů A, B, C a dostaneme tak soustavu tří rovnic pro tři neznámé a, b, c :

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & a \cdot 1 + b \cdot (-1) + c \\ -1 & = & a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \\ 0 & = & a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \\ \hline 2 & = & a - b + c \\ -1 & = & c \\ \hline 0 & = & a + b + c \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & a - b - 1 \\ 0 & = & a + b - 1 \\ \hline 3 & = & a - b \\ 1 & = & a + b \\ \hline 4 & = & 2a \\ 2 & = & a \\ \hline 3 & = & 2 - b \\ -1 & = & b \end{array}$$

Předpis funkce je $f: y = 2x^2 - x - 1$.

Literatura

Bušek, I. (1999). *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. Prometheus, Praha.

Odvárko, O. (2018). *Matematika pro SŠ - Funkce*. Prometheus, Praha.

Petáková, J. (2021). *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Prometheus, Praha.