

MATEMATICKÁ ANALÝZA 2 - LETNÍ SEMESTR 2024–2025
TÝDEN 2 CVIČENÍ

1. VYŠETŘOVÁNÍ ABSOLUTNÍ A NEABSOLUTNÍ KONVERGENCE ČÍSELNÝCH ŘAD S OBECNÝMI ČLENY

Příklad 1.1. Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[3]{3} - 1 \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^{58} n}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi}{4};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/3)}{\sqrt{n+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2) \left(\sqrt{n^6 + n} - n^3 \right).$$

Příklad 1.2. Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\log n]}}{n};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctg n}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}.$$

Příklad 1.3. Vyšetřete charakter konvergence řad v závislosti na parametru:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n^x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^q}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{\log a}}{n}, \quad x \geq 0, \quad q \in \mathbb{R}, \quad a > 1.$$

Příklad 1.4. Vyšetřete konvergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right), \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^2 n} \cos \left(\pi \frac{n^2}{n+1} \right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^\alpha + \sin \frac{n\pi}{4}}, \quad \alpha > 0, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{n} \right)}{\log(\log n)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n^2)|}{n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na) \sin(n^2 a)}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na) \cos(n^2 a)}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na) \cos(n^2 a)}{n}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Příklad 1.5. Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{R}$ konverguje absolutně řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n}.$$

Příklad 1.6. Dokažte, že pro všechna $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin(ak)}{k} \right| < 2\sqrt{\pi}.$$

Příklad 1.7. Dokažte následující *Kroneckerovo lemma*: Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada a necht' $\{b_n\}$ je rostoucí posloupnost splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$. Potom

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} = o\left(\frac{1}{b_n}\right) \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^n a_k b_k = o(b_n).$$

Příklad 1.8. Dokažte následující *Kummerovo kritérium konvergence řad*. Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada reálných čísel s nezápornými členy. Necht' D_n je posloupnost kladných reálných čísel. Označme

$$p_n = D_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - D_{n+1}.$$

Potom

- (i) jestliže $\liminf p_n > 0$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;
- (ii) jestliže $\limsup p_n \leq 0$ a navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{D_n}$ diverguje, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad 1.9. Dokažte pomocí Kummerova kritéria následující *Raabeovo kritérium konvergence řad*. Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada reálných čísel s nezápornými členy. Potom

- (i) jestliže $\liminf n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;
- (ii) jestliže $\limsup n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad 1.10. Dokažte pomocí Kummerova kritéria následující *Gaussovo kritérium konvergence řad*. Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada reálných čísel s nezápornými členy. Necht' existuje omezená posloupnost reálných čísel b_n a konstanta $k \in \mathbb{R}$ tak, že platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{k}{n} + \frac{b_n}{n^2}.$$

Potom

- (i) jestliže $k > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;
- (ii) jestliže $k \leq 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad 1.11. Vyčtřete konvergenci následujících řad $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$