(1)

OBDOBNĚ JAKO PRO INTEGROVATELNÉ FUNKCE

PROVEDEME OPRAVU DEFINICE PROMĚŘITELNÉ FUNKCE

A DOKÁŽEME JEJICH ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

PROSTOR M^+ – zůstává beze změny

L^+ – –||–

L – definovali jsme nově jako $f \in L$ $\exists f_1, f_2 \in L^+$ $f = f_1 - f_2$

!! → M – zadefinujeme nově jako $f \in M \Leftrightarrow \exists \{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ – schodovitá

tak, že pro s.v. x platí $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} h_n(x)$.

Pozn.: na rozdíl od "L" nepotřebujeme nutně rozklad na

znaménkové posloupnosti a také je prostor M zcela obecný!

Budeme se věnovat základním vlastnostem měřitelných funkcí!

Zejména chceme dokázat Větu 3.11. (s novou definicí výše).

Veškerou teorii vybudujeme pomocí teorie pro L – která je již ukázána.

Začneme stvrzením, které je "obdobné" jako Lebesgueova věta

VĚTA M1: Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost $f_n \in L$. Nechť $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

je taková, že $f_n \to f$ s.v. a nechť $\exists g \in L$, tak, že

$|f| \leq g$ s.v.. Potom $f \in L$.

Poznámka: Věta neříká nic o tom, že $\lim\limits_{n} \int f_n = \int f$!

Říká pouze, že $f \in L$.

Dk. věty M1:

Definujme posloupnost $g_n := \max\{\min\{f_n, g\}, -g\}$.

(Posloupnost g_n je vlastně posloupnost f_n modifikovaná pouze tam, kde je příliš "veliká")

· Platí s.v. $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \max\{\min\{f(x), g(x)\}, -g(x)\}$
$= f(x)$

a také platí $|g_n| \leq g$ s.v.

MŮŽEME TEDY POUŽÍT Lebesgueovu větu a máme

$\lim \int g_n = \int f$ a $f \in L$.

NYNÍ UKÁŽEME DŮLEŽITOU VLASTNOST PROSTORU M.

Věta M2: Buď $f \in M$ a $\exists g \in L$ tak, že $|f| \leq g$ s.v.
Potom $f \in L$

Důsledek: $(f \in M \text{ a } |f| \in L) \Rightarrow f \in L$
pokud $f \in M$ a f - omezená pak $f \in L(I)$ pro každý omezený I

Dk M2: Pokud $f \in M$ $\exists h_n$ - schodovité $h_n \to f$ s.v.
určitě platí $h_n \in L$. Jsou tedy splněny předpoklady věty M1.
a dostaneme $f \in L$

3

NYNÍ DOKÁŽEME ~~ZA~~ TVRZENÍ OBECNĚJŠÍ OBECNĚJŠÍ NEŽ VĚTA 3.11.

Věta M3: BUĎ $F \in C(\mathbb{R}^2)$. Buď $f \in M$ a $g \in M$.

POTOM $F(f, g) \in M$

Důsledek: $\alpha f + \beta g \in M$ ~~f, ...~~ $, f \cdot g, \frac{f}{g}$ atd.

TOTO SLOŽENÍM "SPOJITÉ A MĚŘITELNÉ" FUNKCE VZNIKNE FUNKCE MĚŘITELNÁ !!

Dk věty M3: Buď f_n a g_n ~~...~~ schodovité $f_n \to f$ a $g_n \to g$ s.v. POTOM

$F^n := F(f_n, g_n)$ je schodovitá (F - je spojitá)

a platí $F^n \to F(f, g)$ s.v. Tedy $F(f, g) \in M$.

POSLEDNÍ VĚTA (DŮLEŽITÁ !!!) UKAZUJE, ŽE M NELZE ZVĚTŠIT POMOCÍ JAKÉHOKOLIV LIMITNÍHO PROCESU.

Věta M4: Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$. a $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ taková že $f_n \to f$ s.v. POTOM $\underline{f \in M}$

Důkaz věty M4: Buď $\boxed{g>0}$ a $g \in L$ libovolná

$$\left(\text{např.: } g(x) = \frac{1}{(1+|x|)^{d+1}} \quad \text{(spojitá fce jeum. měřitelná)}\right)$$

definujme novou posloupnost

$$F^n := \frac{f^n}{1+|f^n|}\, g$$

Protože $f^n \in M$, $g \in M$ použijeme věty M3 a máme

$F^n \in M$. Navíc $|F^n| \le \frac{|f^n|}{1+|f^n|}\, g \le g \in L$

Potom dle věty M2 platí $\forall n \;\; F^n \in L$

navíc $F^n \to \frac{f}{1+|f|}\, g$ s.v.

máme majorantu a tedy dle Lebesgueovy věty

platí, že $F^n \to F \in L$ a $F = \frac{f}{1+|f|}\, g$ a navíc $|F| < g$ s.v.

Tedy $F \in M$, $g \in M$, upravou získáme

$$F = \frac{f}{1+|f|}\, g \implies f = \frac{F}{g-|F|} \quad \text{a } g > |F| \text{ s.v.}$$

$F \in M$, $(g-|F|) \in M$ $\Rightarrow$ věta M3

$g-|F|>0$ $\implies f \in M$