$\boxed{\S 7}$ OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Ve vědě a inženýrství jsou formulovány matematické modely k porozumění fyzikálních, chemických, biologických, ekonomických a jiných přírodních jevů. Tyto matematické modely často zahrnují rovnice, ve kterých se vyskytují derivace neznámé (hledané) funkce. Takovéto rovnice se nazývají DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE (DR).

▶ Je-li neznámá funkce y závislá jen na jedné (reálné) proměnné, řekněme $x \in (a,b)$, a v DR se tak vyskytují klasické (obyčejné) derivace fce y, tzn. $y', y'', \dots, y^{(k)}, \dots$ (nebo jen některé z nich), pak se daná DR nazývá obyčejná diferenciální rovnice (ODR) respektive systém ODR

Přesněji:

- je-li $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ mluvíme o skalární ODR
- je-li $y : (a,b) \to \mathbb{R}^N, \substack{N \in \mathbb{N} \\ n \geq 2}$, mluvíme o systému ODR

Nejvyšší řád derivace, který se v dané DR vyskytuje, určuje řád ODR či řád systému ODR

$\boxed{\text{Příklady}}$ ① DR $\boxed{y' + a(x)y = g(x)}$ (1)

kde $a : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ a $g : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ jsou dané funkce, je skalární ODR 1. řádu pro neznámou

$$y : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R} \qquad \big(y = y(x)\big).$$

Pozorování: Užijeme-li značení $y' = \frac{dy}{dx}$, lze (1) psát ve tvaru $\frac{dy}{dx} + a(x)y = g(x)$. Označíme-li $L := \frac{d}{dx} + a(x)$, pak L je příklad diferenciálního operátoru, který funkci $y : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ přiřadí funkci $Ly = \frac{dy}{dx} + a(x)y : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$. Navíc L je LINEÁRNÍ operátor a (1) lze psát ve tvaru $Ly = g(x)$.

$\boxed{\text{Př. ②}}$ DR $\boxed{y'' + by' + k y = \sin\alpha t}$ (2)

kde b, k a α jsou dané nezáporné parametry (konstanty) představuje skalární ODR 2. řádu pro neznámou

$$y: (0,T) \to \mathbb{R} \qquad (y = y(t)) \quad \text{z kontextu zadání DR.}$$

Označíme-li $x_1 := y$ a $x_2 := y'$ a $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$, pak lze rovnici (2) přepsat do tvaru

$$(3) \quad \boxed{\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -bx_2 - k x_1 + \sin\alpha t \end{aligned}} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \mathbb{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha t \end{pmatrix} \quad \text{kde } \mathbb{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{x}' &= \mathbb{A}\vec{x} + \vec{f}(t) \\ \vec{f}(t) &= (0, \sin\alpha t)^T \end{aligned}} \Longleftrightarrow$$

což je systém dvou ODR 1. řádu

Vidíme, že je úzká souvislost mezi skalární ODR vyššího řádu a systémem ODR 1. řádu.

Pozorování: Opět se značením $y' = \frac{dy}{dx}$ lze rovnici (2) psát ve tvaru

$$(2') \quad \boxed{Ly = g(t)}, \text{ kde } \boxed{L := \frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx} + k} \text{ a } g(t) := \sin\alpha t$$

Protože $L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$ a $L(\alpha y) = \alpha L y$, tak L je lineární diferenciální operátor 2. řádu.

$\boxed{\text{Př. ③}}$ DR $\boxed{y'' + \frac{g}{l}\sin y = 0}$ je opět skalární ODR 2. řádu (rovnice jednoduchého kyvadla). V tomto případě je však diferenciální operátor

$$Ly := \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{g}{l}\sin y \qquad \text{Nelineární!}$$

Připomeňme si na jednoduchém fyzikálním systému jak jsou různé diferenciální rce generovány.

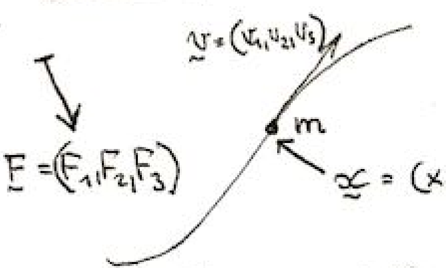
NEWTONOVA KLASICKÁ MECHANIKA

SYSTÉM: PRUŽINA ZÁVAŽÍ

- popisuje pohyb částic pomocí diferenciálních rovnic
- částice (tělesa) chápeme jako hmotné body
- tři základní postuláty

1. ZÁKON Pokud nepůsobí na částici ŽÁDNÉ SÍLY, částice se pohybuje přímočarým (nezrychleným) pohybem
ŽÁDNÉ ZRYCHLENÍ

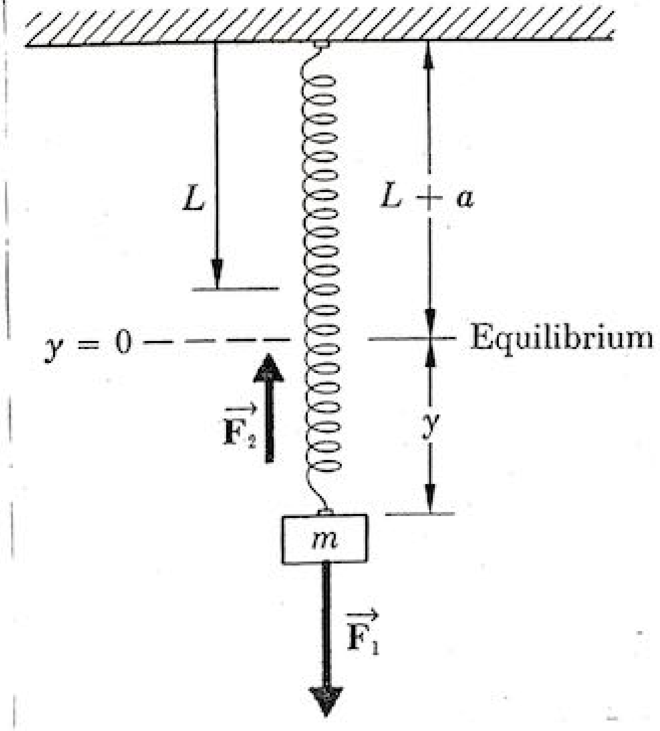
2. ZÁKON



$$\boxed{\underset{\sim}{F} = \frac{d}{dt}\left(m\underset{\sim}{v}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ m\ \text{konstant}}}{=} m\frac{d\underset{\sim}{v}}{dt} = m\underset{\sim}{a} = m\frac{d^2\underset{\sim}{x}}{dt^2} = m\ddot{\underset{\sim}{x}}}$$

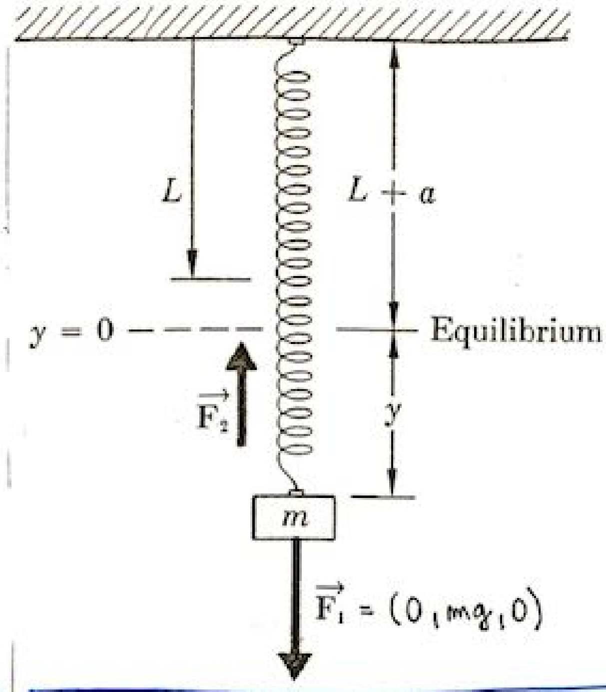
3. ZÁKON Síla $\underset{\sim}{F}$ vyvolá reakční sílu $-\underset{\sim}{F}$

SYSTÉM: PRUŽINA - ZÁVAŽÍ



ZÁKLADNÍ PŘEDPOKLADY

- Pohyby možné jen ve vertikálním směru
- závaží chápeme jako hmotný bod o hmotnosti m
- hmotnost pružiny zanedbáme



Předpoklady na materiály

(S) pružina splňuje Hookeův zákon: pružina vyvolává "rekonstrující" sílu F_2 na závaží směrem k poloze přirozené délky pružiny, a tato síla je úměrná $y+a$, tj.

$$\underset{\sim}{F}_2 = (0, -k(y+a), 0) \qquad (k>0)$$

(A) odpor vzduchu je zanedbatelný (vakuum)

$\boxed{\text{Z 2. ZÁKONA}} \Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} = \underset{\sim}{F}_1 + \underset{\sim}{F}_2 = (0, mg - k(y+a), 0)$

V rovnováze : $\underbrace{\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \text{ a } y = 0 \Rightarrow ka = mg}$

Rovnice pohybu: $\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0}$

! $\boxed{\text{Počáteční podmínky: } y(0) = y_0 \text{ , } \frac{dy}{dt}(0) = y_1}$

(A*) Odpor vzduchu je úměrný rychlosti

$$\underset{\sim}{F}_3 = \left(0, -b\frac{dy}{dt}, 0\right) \Rightarrow \underset{\uparrow}{m}\frac{d^2y}{dt^2} + \underset{\uparrow}{b}\frac{dy}{dt} + \underset{\uparrow}{k}y = 0$$

koeficienty: setrvačnosti tlumení tuhosti

(A**) Odpor vzduchu (prostředí) závisí na rychlosti nelineárně

$$\underset{\sim}{F}_3 = \left(0, h\left(\frac{dy}{dt}\right), 0\right) \Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} + h\left(\frac{dy}{dt}\right) + ky = 0$$

(S*) Pružina vyvolává sílu $\underset{\sim}{F}_2$, která závisí na $(y+a)$ nelineárně

$$\underset{\sim}{F}_2 = (0, g(y+a), 0) \Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} + g(y) + \left\{\begin{matrix} 0 \\ b\frac{dy}{dt} \\ h\left(\frac{dy}{dt}\right)\end{matrix}\right\} = 0 \quad \begin{matrix}(A)\\(A^*)\\(A^{**})\end{matrix}$$

(S*) + (A**) je speciální případ rovnice $\frac{d^2y}{dt^2} + f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) = 0$

Vnější (daná) síla $\underset{\sim}{F}_4 = (0, \xi(t), 0)$ například $\xi(t) = \sin\omega t$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) = \sin\omega t$$

ŽÁDNÁ PRUŽINA ⇒ PADAJÍCÍ TĚLESO

$\underset{\sim}{F}_2 = (0, 0, 0)$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left\{\begin{matrix} 0 \\ b\frac{dy}{dt} \\ h\left(\frac{dy}{dt}\right)\end{matrix}\right\} = G \quad \begin{matrix}(A)\\(A^*)\\(A^{**})\end{matrix} \quad \overset{z := \frac{dy}{dt}}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\frac{dz}{dt} + \left\{\begin{matrix} 0 \\ bz \\ h(z)\end{matrix}\right\} = G \quad \text{ROVNICE 1. ŘÁDU}}$$

JSOU VŠECHNY DR OBYČEJNÉ?

$\to t \in [0,T]$

Je-li neznámá funkce u závislá na více proměnných z nichž jedna může být čas t a ostatní jsou prostorové proměnné $x_1,\dots,x_d$, kde $x=(x_1,x_2,\dots,x_d)\in\Omega\subset\mathbb{R}^d$, a v DR se vyskytují parciální derivace fce u, např. $\frac{\partial u}{\partial t}$ nebo $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}$, atd., pak se daná DR nazývá parciální diferenciální rovnice (PDR) respektive systém PDR. Přesněji:

- je-li $u:\Omega\to\mathbb{R}$ resp. $u:(0,T)\times\Omega\to\mathbb{R}$ mluvíme o skalární stacionární resp. evoluční PDR
- je-li $\vec{u}:\Omega\to\mathbb{R}^N$, $N\geq 2$, resp. $\vec{u}:(0,T)\times\Omega\to\mathbb{R}^N$ mluvíme o systému stacionárních resp. evolučních PDR

Příklady ④ a) Poissonova rce

$$\boxed{-\Delta u = f \text{ v } \Omega \dashrightarrow -\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad \text{LINEÁRNÍ OPERÁTOR}}$$

b) Rovnice vedení tepla

$$\boxed{\begin{array}{l}\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u = f \quad \text{v } (0,T)\times\Omega \\ \text{kde } f:(0,T)\times\Omega\to\mathbb{R} \text{ je daná funkce.}\end{array}}$$

skalární evoluční PDR 2. řádu vzhledem k $x_1,x_2,\dots,x_d$
1. řádu vzhledem k t

c) Vlnová rovnice

$$\boxed{\begin{array}{l}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u = f \quad \text{v } (0,T)\times\Omega \\ \text{kde } f:(0,T)\times\Omega\to\mathbb{R} \text{ je daná fce}\end{array}}$$

skalární evoluční PDR 2. řádu vzhledem k $x_1,x_2,\dots,x_d$
2. řádu —"— k t

Oba evoluční diferenciální operátory

$L:=\frac{\partial}{\partial t}-\Delta$ jsou lineární Tepelný operátor

$L:=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta$ d'Alembertův vlnový operátor $\Box$.

⑤ Navier-Stokesovy rovnice:

Neznámé: rychlost $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a "tlak" p

$$v_i, p : (0,T) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$i = 1,2,3$$

$$(NS) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_1}{\partial x_k} - \Delta v_1 &= -\frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_2}{\partial x_k} - \Delta v_2 &= -\frac{\partial p}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_3}{\partial x_k} - \Delta v_3 &= -\frac{\partial p}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned}}$$

je systém (čtyř) nelineárních PDR, který je

stacionární pokud $\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$ pro $i = 1,2,3$

evoluční jinak.

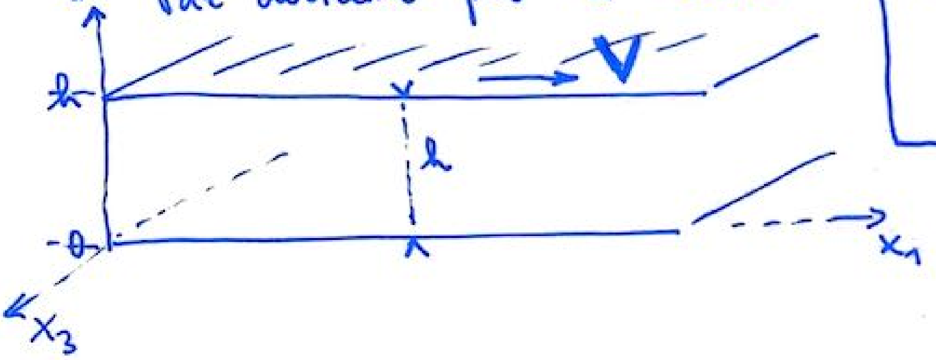
Navier-Stokesovy rce, popisující proudění nestlačitelných tekutin (jako je voda) při standardních podmínkách, se obvykle píšou v kompaktním tvaru

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} - \Delta \vec{v} &= -\nabla p \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \end{aligned}}$$

- Uvažujme ustálené (stacionární) proudění mezi dvěma deskami, kde se horní deska pohybuje konstantní rychlostí V (viz obrázek); dolní deska je (v klidu). Hledejme řešení úlohy ve tvaru $\vec{v} = (u(x_2), 0, 0)$, $p = \text{konst.}$

Pak dostame pro u úlohu:

$$\boxed{\begin{aligned} u'' &= 0 \quad v\ (0,h) \\ u(0) &= 0 \\ u(h) &= V \end{aligned}}$$



SHRNUTÍ Diferenciální rovnice (DR) jsme si rozdělili na:

OBYČEJNÉ systém pružina-závaží	vs.	**PARCIÁLNÍ** Poissonova, vlnová, tepelná rce Navier-Stokesovy rovnice (NSR)
LINEÁRNÍ · systém lineární pružina-závaží · Laplaceův, tepelný, vlnový operátor		**NELINEÁRNÍ** · rovnice jednoduchého kyvadla · NSR · systém nelineární pružina-závaží v nelineárním prostředí
SKALÁRNÍ		**VEKTOROVÉ** · systém DR
STACIONÁRNÍ		**EVOLUČNÍ** · jedna z proměnných je čas
1. ŘÁDU · $y' + a(t)y = g(t)$ · tepelná rovnice vzhledem k času · rovnice volného pádu pro rychlost		**2. ŘÁDU**

OBYČEJNÉ DR 2. a 1. ŘÁDU
(LINEÁRNÍ)

Pro ODR 2. řádu lze formulovat dvě (svým charakterem zcela) odlišné úlohy: počáteční úlohu a okrajovou úlohu.

Motivací pro <u>počáteční úlohu</u> je systém pružina-závaží s lineární (Hookeovou) pružinou a lineárním odporem vnějšího prostředí. Cílem je: nalézt funkci $y: (-T,T) \to \mathbb{R}$, která má $y''(t)$ pro každé $t \in (-T,T)$ a splňuje

$$(P) \quad \boxed{\begin{aligned} & y'' + \frac{b}{m} y' + \frac{k}{m} y = f(t) \qquad \forall t \in (-T,T) \\ & y(0) = y_0 \\ & y'(0) = y_1 \end{aligned}}$$

pro daná DATA úlohy:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{časový} \\ \text{interval}}}{T>0}, \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{materiálové} \\ \text{koeficienty}}}{b, k, m}, \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{počáteční} \\ \text{podmínky}}}{y_0, y_1 \in \mathbb{R}}, \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pravá} \\ \text{strana}}}{f: (-T,T) \to \mathbb{R}}$$

Motivací pro <u>okrajovou úlohu</u> je úloha nalézt speciální typ ustáleného proudění tekutiny proudící mezi dvěma rovnoběžnými deskami.

Cílem je: nalézt funkci $y:(a,b)\to\mathbb{R}$, která má $y''(x)$ pro všechna $x\in(a,b)$ a splňuje

(O)

$y''+\alpha y'+\beta y = g(x)$ v (a,b)

ve spojení s jedním typem z následujících okrajových podmínek:

Dirichletova → (D) $y(a)=A$ a $y(b)=B$

Neumann → (N) $y'(a)=A$ a $y'(b)=B$

Smíšená → (S) $y(a)=A$ a $y'(b)=B$ nebo $y'(a)=A$ a $y(b)=B$

pro daná DATA úlohy:

$I=(a,b)$	α,β	A,B	$g:(a,b)\to\mathbb{R}$
↑	↑	↑	↑
oblast, kde úlohu řeším	koeficienty	předepsané hodnoty hledané fce či její derivace v bodech <u>a</u> a <u>b</u>	pravá strana

---

Ukažme si důležité odlišné i společné rysy obou úloh na jednoduchém <u>příkladě</u>:

(*) $$y''=0$$

Z existence druhé derivace a Lagrangeovy věty o střední hodnotě plyne, že <u>obecný tvar řešení</u> rce (*) má tvar:

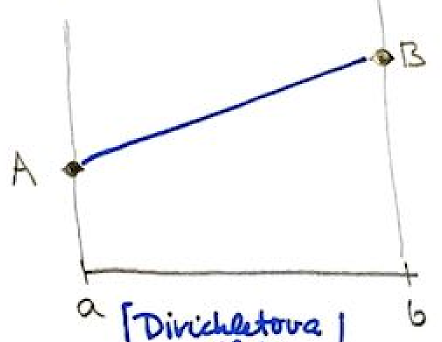
(P1) $y_{OO}(t)=C_1t+C_2$ $\quad t\in\mathbb{R}$, $C_1,C_2\in\mathbb{R}$ v kontextu počáteční úlohy

resp.

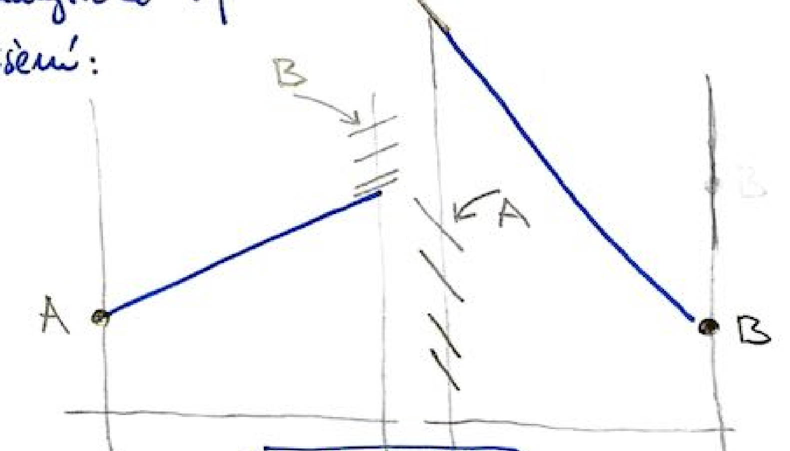
(O1) $y_{OO}(x)=C_1x+C_2$ $\quad x\in(a,b)$, $C_1,C_2\in\mathbb{R}$ v kontextu okrajové úlohy

Z (P1) snadno dostáváme, že řešení <u>počáteční úlohy</u> (P) pro rovnici (*) má tvar $\boxed{y_P(t)=y_1t+y_0}$. Všimněme si, že (P1) je formulace 1. postulátu klasické mechaniky.

Pro <u>okrajové úlohy</u> (Dirichlet, Neumann, smíšená) hledáme mezi všemi afinními funkcemi (O1) ty, které splňují předepsané okrajové podmínky. Zatímco u Dirichletovy či smíšené úlohy se nám to vždy podaří a toto řešení je jediné, u Neumannovy úlohy řešení existuje jen pokud A=B (tzn. data jsou kompatibilní). Navíc, pokud A=B pak máme nekonečně mnoho řešení (typu $y(x) = Ax + C_2$ kde C_2 je libovolné) a k určení jediného z nich musíme přidat k úloze další selektivní podmínku (např. $\int_a^b y(x)\,dx = 0$). Analytické vyřešení všech úloh (D),(N),(S) najdete sami. Zde je grafické řešení:

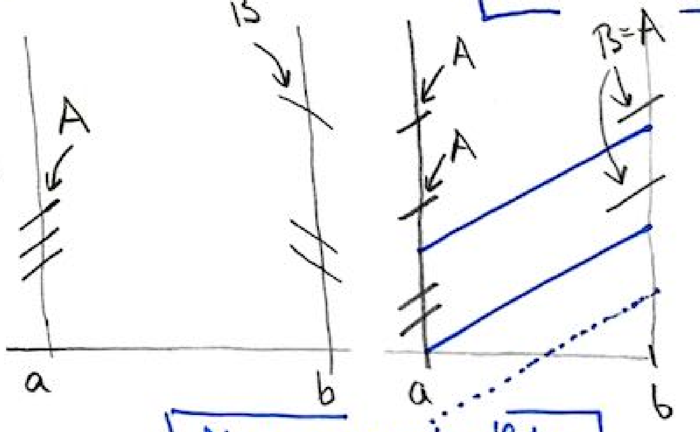


Dirichletova úloha



Smíšené úlohy

1. 2.



Neumannova úloha

1. Neexistence řešení

2. Nekonečně řešení. Tečkovaně znázorněno řešení s nulovým průměrem.

<u>Závěr</u> Obecné řešení rovnice $y''=0$ má tvar $y(x)=(C_1,C_2)\cdot\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}$, tj. lineární kombinace prvků báze $\{1,x\}$. Dimenze prostoru všech řešení rce $y''=0$ je tedy 2. Má-li řešení druhé derivace ve všech bodech, pak jsou první a nultá derivace spojité, tzn. $y \in C^1((-T,T))$ resp. $C^1((a,b))$. Je tedy smysluplné zadávat hodnoty pro y resp. y' v počátku nebo krajních bodech intervalu.

Počáteční úloha má vždy řešení. Okrajová úloha Neumannova typu má řešení jen pokud data splňují podmínku kompatibility (A=B); jediné řešení je pak vybráno z ∞-mnoha řešení další selektivní podmínkou. ▨

Dříve než začneme zkoumat vlastnosti rovnic z pohledu matematické analýzy, zdůrazněme, že je vždy cenné znát fyzikální (chemický, biologický) kontext studované rovnice resp. úlohy. Například, v kontextu systému pružina-závaží (úloha (P)) zkoum rovnice a počátečních podmínek víme, že

(i) $m > 0\,,\ b \geq 0$ a $k \geq 0$ (omezení na přípustné parametry)

a že platí, pro $f \equiv 0$, následující energetická identita:

$$\text{(ii)}\qquad \frac{1}{2}[y'(t)]^2 + \frac{k}{2m}[y(t)]^2 + \frac{b}{m}\int_0^t [y'(\tau)]^2\, d\tau = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{k}{2m}y_0^2$$

neboli celková energie systému

$$E(t) := \frac{1}{2}[y'(t)]^2 + \frac{k}{2m}[y(t)]^2,$$

splňující

$$E(t) + \frac{b}{m}\int_0^t [y'(\tau)]^2\, d\tau = E_0 \quad \text{kde } E_0 := \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{k}{2m}y_0^2 = E(0)$$

neroste a v případě, kdy $b = 0$, se zachovává:

$$E(t) = E_0 \quad \text{pro všechna } t \in [0,T].$$

Odvození (ii) si proveďte sami; násobte ODR v (P) y', užijte identitu $\left(\frac{|z|^2}{2}\right)' = z z'$ výsledek integrujte od 0 do t, $t \in (0,T]$ a užijte počátečních podmínek.

Uvažujme nyní jinou rovnici

$$(3) \quad Ly := y'' + py' + qy = f(x) \qquad p,q\in\mathbb{R} \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

a hledejme všechna řešení této rovnice. Za předpokladu $y''(x)$ existuje pro všechna $x\in\mathbb{R}$. V tuto chvíli tedy zapomínáme na počáteční a okrajovou úlohu a snažíme se najít tvar obecného řešení rovnice (3); toto řešení budeme značit $y_{OB} = y_{OB}(x)$.

Terminologie: Rce (3) s $f\equiv 0$ se nazývá **homogenní** ODR 2. řádu s konstantními koeficienty

Rce (3) s $f\not\equiv 0$ se nazývá **nehomogenní** ODR 2. řádu

Úkol: NALÉZT y_{OB} tj. NALÉZT VŠECHNA ŘEŠENÍ (3)

Případ 1 HOMOGENNÍ RCE; $f\equiv 0$

K řešení využijeme skutečnosti, že

- $(e^x)' = e^x$ a e^x tak řeší rci $y' = y$
- $(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$ a $e^{\lambda x}$ řeší rci $y' = \lambda y$

a otázku řešitelnosti (3) převedeme na algebraickou otázku.

Hledáme-li řešení (3) ve tvaru $y = e^{\lambda x}$, po dosazení dostáváme:

$$(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda^2 + p\lambda + q = 0} \qquad D := p^2 - 4q$$

(4) CHARAKTERISTICKÁ RCE

Mohou nastat tři situace:

(i) $D>0 \Rightarrow \exists\, \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\ \lambda_1\neq\lambda_2$, řešící (4)

$\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ tvoří bázi prostoru $\{z\in C^2(\mathbb{R});\ Lz=0\}$ (prostor všech řešení homogenní rce)

neboli

$$\boxed{y_{OB}(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}} \qquad C_1,C_2\in\mathbb{R}$$

(ii) $D=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2$ je dvojnásobný kořen, což je situace, která nastane (mimojiné) u rovnice $y''=0$, jejíž charakteristická rce má tvar $\lambda^2=0$, 0 je kořen násobnosti 2 a víme, že $\{1,x\} = \{e^{0x}, xe^{0x}\}$ tvoří bázi.

Tedy: je-li $\lambda_1\in\mathbb{R}$ kořen násobnosti 2, pak $\{e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}\}$ tvoří bázi $\{z\in C^2(\mathbb{R});\ Lz=0\}$

a

$$\boxed{y_{OB}(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2xe^{\lambda_1 x}}$$

(iii) $D<0 \Rightarrow \underset{\mu_1+i\mu_2}{\lambda}, \overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ jsou dva různé kořeny (4). Pak

$$\xrightarrow{} y_{OB}(x) = C_1 w_1 + C_2 w_2, \; C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

$$(\bullet) \quad \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} := \begin{Bmatrix} e^{\mu_1 x}(\cos\mu_2 x + i\sin\mu_2 x) \\ e^{\mu_1 x}(\cos\mu_2 x - i\sin\mu_2 x) \end{Bmatrix}$$ tvoří bázi prostoru $\{z \in C^2(\mathbb{R});\ Lz = 0\}$.

Nevýhodou této báze je skutečnost, že prvky (funkce) báze jsou funkce komplexní, ačkoliv v zadání rovnice nic komplexního nebylo.

Lineární kombinací báze $(\bullet)$ však mohu dostat bázi tvořenou reálnými funkcemi.

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(w_1 + w_2) \\ \frac{1}{2i}(w_1 - w_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e^{\mu_1 x}\cos\mu_2 x \\ e^{\mu_1 x}\sin\mu_2 x \end{Bmatrix}$$

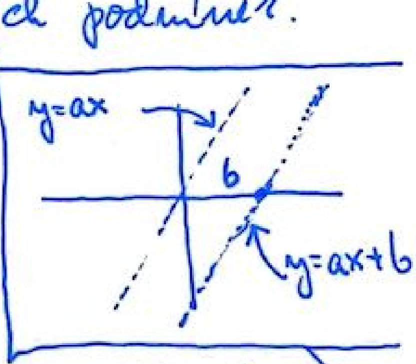
Pak
$$\boxed{y_{OB}(x) = C_1 e^{\mu_1 x}\cos\mu_2 x + C_2 e^{\mu_1 x}\sin\mu_2 x \quad , C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

Příklad ① $\boxed{\ddot{x} + x = 0}$ Najděte obecné řešení.

Řešení: Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$ má kořeny $\lambda_{12} = \pm i$. Báze tvořená reálnými funkcemi: $\{\cos t, \sin t\}$ a obecné řešení:

$$x_{OB}(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Pokud řeším počáteční úlohu (P) nebo okrajovou úlohu (O) pro homogenní rovnici, pak najdu obecné řešení a konstanty C_1, C_2 určím z počátečních nebo okrajových podmínek.



Případ 2 NEHOMOGENNÍ RCE; $\underline{f \neq 0}$

Pak platí, že obecné řešení $y_{OB,f}$ je ve tvaru

(5) $$\boxed{y_{OB,f}(x) = y_{OB}(x) + y_f(x)},$$

kde y_{OB} je obecné řešení homogenní rce (tj. rce (3) s $f = 0$)

a y_f je jedno (partikulární) řešení rce (3) s f.

Otázka nalezení $y_{OB,f}$ se redukuje na otázku jak nalézt y_f jedno řešení (3).

Tři různé metody (jak najít y_f) na různé situace:

(i) **uhodnutím** – tvar pravé strany je jednoduchý (např. konstanta)

(ii) pravá strana je ve tvaru:

$$f(x) = \underset{Ⓐ}{\boxed{P(x)e^{\lambda x}}} \text{ nebo } \boxed{\begin{array}{l} P(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \text{nebo } P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x \end{array}} Ⓑ$$

kde $P(x)$ je nějaký konkrétní polynom stupně m

např. $P(x) = x^2+1$ je polynom stupně 2.

Pak

(6) $$y_f(x) \text{ hledáme ve tvaru } y_f(x) = \begin{cases} Q(x)x^L e^{\lambda x} & \text{pro Ⓐ} \\ \tilde{Q}(x)x^L e^{\alpha x}\sin\beta x + \tilde{\tilde{Q}}(x)x^L e^{\alpha x}\cos\beta x & \text{pro Ⓑ} \end{cases}$$

kde

$$L = \begin{cases} 0 & \text{není-li } \lambda \text{ kořen (4) pro Ⓐ} \\ & \text{není-li } \alpha+i\beta \text{ kořen (4) pro Ⓑ} \\ k & \text{je-li } \lambda\ k\text{-násobný kořen (4) pro Ⓐ} \\ & \text{je-li } \alpha+i\beta \text{ násobný kořen 4 pro Ⓑ *)} \end{cases}$$

a

$Q, \tilde{Q}$ a $\tilde{Q}$ jsou obecné polynomy stupně m.

např. je-li $P(x) = x^2+1$, pak $Q(x) = Ax^2+Bx+C$,
kde A, B, C určíme po dosazení (6)
do rovnice (3).

(iii) obecná metoda nazývaná variace konstant.

Je-li obecné řešení homogenní rovnice ve tvaru

$$y_{OB}(x) = C_1w_1(x) + C_2w_2(x) \quad \text{kde } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

← báze

pak

$y_f(x)$ hledám ve tvaru

(7) $$\boxed{y_f(x) = C_1(x)w_1(x) + C_2(x)w_2(x)}$$

---

*) pro rovnici 2. řádu $\alpha+i\beta$ může být nejvýše 1-násobným kořenem charakteristické rovnice (4).

Derivováním (7) dostávám

$$y_f'(x) = C_1'(x)w_1(x) + C_2'(x)w_2(x) + C_1(x)w_1'(x) + C_2(x)w_2'(x).$$

Na koeficienty (funkce) C_1, C_2 nyní položíme podmínku:

$$\boxed{(8_1) \qquad C_1'(x)w_1(x) + C_2'(x)w_2(x) = 0}$$

Pak $\quad y_f'(x) = C_1(x)w_1'(x) + C_2(x)w_2'(x)$

a $\quad y_f''(x) = C_1'(x)w_1'(x) + C_2'(x)w_2'(x) + C_1(x)w_1''(x) + C_2(x)w_2''(x).$

Po dosazení posledních dvou vztahů a (7) do rovnice (3) dostaneme

$$C_1(x)\overbrace{\{w_1''(x) + p\,w_1'(x) + q\,w_1(x)\}}^{Lw_1=0} + C_2(x)\overbrace{\{w_2''(x) + p\,w_2'(x) + q\,w_2(x)\}}^{Lw_2=0}$$

$$+\ C_1'(x)w_1'(x) + C_2'(x)w_2'(x) = f(x).$$

Protože w_1, w_2 řeší homogenní rovnici $Lw_1=0$, $Lw_2=0$, tak z posledního vztahu plyne

$$\boxed{(8_2) \qquad C_1'(x)w_1'(x) + C_2'(x)w_2'(x) = f(x)}$$

Rovnice (8_1) a (8_2) představují systém dvou rovnic pro neznámé funkce $C_1'(x)$ a $C_2'(x)$. Dá se ukázat, že systém (8_1) a (8_2) má vždy řešení. Integrací určím $C_1(x)$ a $C_2(x)$ a po dosazení do (7) dostanu partikulární řešení y_f rovnice (3). ▨

Příklad ② Najděte obecné řešení rovnice $\ddot{x} + x = \sin 2t$

Řešení (1) Dle příkladu ① víme $x_{OB,hom}(t) = C_2\sin t + C_1\cos t$.

Funkce $f(t) = \sin 2t$ je pravá strana speciálního tvaru s $\alpha=0, \beta=2$.
Tak $x_f(t)$ hledáme ve tvaru $\boxed{x_f(t) = A\cos 2t + B\sin 2t}$. Koeficienty A, B určíme dosazením $x_f(t)$ do rovnice $\ddot{x} + x = \sin 2t$.
Dostáváme:

$$-4A\cos 2t - 4B\sin 2t + A\cos 2t + B\sin 2t = \sin 2t,$$

což implikuje vztahy: $\boxed{-3A=0}$ $\boxed{-3B=1}$.

Tedy hledané obecné řešení

$$[\,x_{OB,nehom}(t) = C_1\cos t + C_2\sin t - \tfrac{1}{3}\sin 2t\,]$$ ▨

$\boxed{\text{Řešení (ii)}}$ x_f zkusíme najít metodou variace konstant:

$$x_f(t) = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t$$

Pro funkce $C_1(t), C_2(t)$ dostáváme:

$$(\bullet\bullet)\qquad \left[\begin{array}{l} C_1'(t)\cos t + C_2'(t)\sin t = 0 \\ -C_1'(t)\sin t + C_2'(t)\cos t = \sin 2t \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \sin t \\ \cos t \end{array}\right.$$

Odtud $C_2'(t) = 2\sin t\cos^2 t$ a $C_1'(t) = -2\sin^2 t\cos t$.

Tedy $C_2(t) = -\frac{2}{3}\cos^3 t$ a $C_1(t) = -\frac{2}{3}\sin^3 t$

Tudíž $x_f(t) = -\frac{2}{3}\sin^3 t\cos t - \frac{2}{3}\cos^3 t\sin t = -\frac{1}{3}\sin 2t$,

což je stejný výsledek jako ten získaný metodou $\underbrace{\text{ansatzu}}_{\text{udsady}}$ v (i).

$\vdash$

Příklad ③ Najděte obecné řešení rovnic

$$\boxed{(g_1)\quad \ddot{x} + x = \sin t} \quad \text{a} \quad \boxed{\ddot{x} + x = \sin(1+\varepsilon)t \quad (g_2)}$$

Řešení

Pozorování 1 Partikulární řešení (g_1) nelze najít ve tvaru $x_f(t) = A\sin t + B\cos t$. Skutečně, po dosazení dostáváme $0 = \sin t$. Sami zkuste vyřešit (g_1) variací konstant.

Pozorování 2 Frekvence uvnitř pravé strany se shoduje resp. je blízká $\underbrace{\text{frekvenci}}_{\text{kmitů}})$ systému "pružina-závaží" řízeným homogenní rovnicí.

Pozorování 3 Metodou ansatzu použitou na rci (g_2) dostáváme pro

$x_f(t) = A\sin(1+\varepsilon)t + B\cos(1+\varepsilon)t$. Po dosazení:

$$A(1-(1+\varepsilon)^2)\sin(1+\varepsilon)t + B(1-(1+\varepsilon)^2)\cos(1+\varepsilon)t = \sin(1+\varepsilon)t,$$

což implikuje $B = 0$ a $A = \frac{-1}{(2+\varepsilon)\varepsilon}$ a tak $x_f(t) = \frac{-1}{\varepsilon(2+\varepsilon)}\sin(1+\varepsilon)t$

Hledejme řešení počáteční úlohy $x(0) = x_0$ a $x'(0) = 0$.

Z obecného řešení ve tvaru

$$x_{OB,nehom}(t) = C_1\cos t + C_2\sin t - \frac{1}{\varepsilon(2+\varepsilon)}\sin(1+\varepsilon)t$$

dostáváme $C_1 = x_0$ a $C_2 - \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon(2+\varepsilon)} = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon(2+\varepsilon)}$

$$x_P^{\varepsilon}(t) = x_0\cos t + \frac{1}{\varepsilon(2+\varepsilon)}\left[(1+\varepsilon)\sin t - \sin(1+\varepsilon)t\right]$$

$$x_p^0(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} x_P^{\varepsilon}(t) = x_0\cos t + \frac{1}{2}\sin t - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin(1+\varepsilon)t - \sin t}{\varepsilon(2+\varepsilon)}$$

$$= x_0 \cos t + \frac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t$$

a oscilace mají rostoucí amplitudu pro $t \to \infty$. Jev, kdy frekvence vnějších sil odpovídá vnitřním frekvencím systému, které se začnou zvětšovat, se nazývá <u>resonance</u>.
viz obrázek

- zároveň jsme odvodili/zdůvodnili proč v případě (9_1) musíme hledat partikulární řešení ve tvaru

$$x_p(t) = At\sin t + Bt\cos t.$$

Ověřte sami, že s touto násadou dostanete

$$x_p(t) = \frac{-1}{2}t\cos t.$$

Závěr: Pro skalární lineární ODR <u>2. řádu</u> s konstantními koeficienty umíme:

1) nalézt (obecné) řešení homogenní rovnice (charakteristická rce)
2) nalézt obecné řešení nehomogenní rce
   $$y_{obec,nehom}(x) = y_{obec,hom} + y_p$$
3) vyřešit počáteční úlohu
4) vyřešit okrajovou úlohu

- metoda násady
  ansatz
- metoda variace konstant

Tyto metody platí (jak si ukážeme později) i pro rovnice <u>vyššího</u> řádu.

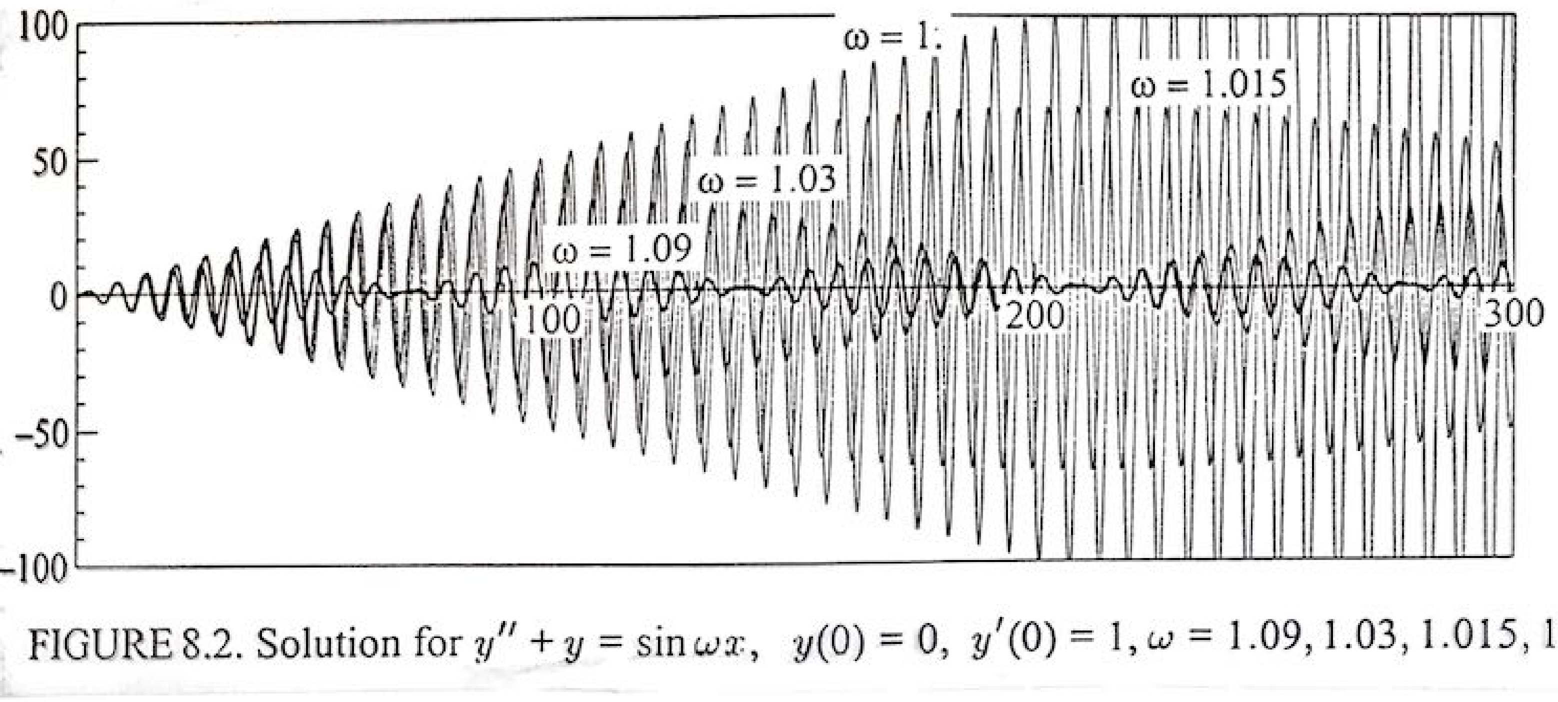


FIGURE 8.2. Solution for $y'' + y = \sin\omega x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $\omega = 1.09, 1.03, 1.015, 1.$

Souhrn poznatků o rovnici $y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$ a počáteční úloze (P) s $f=0$.

Položme $m=1$ pro jednoduchost; Předpokládejme: $k>0$ a $b\geq 0$.

① Charakteristická rovnice $\boxed{\lambda^2+b\lambda+k=0}$. Diskriminant $D=\sqrt{b^2-4k}$ a

$$\lambda_{12}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4k}}{2}$$

- Je-li $D>0$, pak $\lambda_1<\lambda_2<0$
  $$y_{OB}(t) = C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}\xrightarrow[t\to\infty]{}0$$
- Je-li $D=0$, pak $\lambda_1=-\frac{b}{2}<0$
  $$y_{OB}(t) = C_1e^{\lambda_1 t}+C_2te^{\lambda_1 t}\xrightarrow[t\to\infty]{}0$$

tyto režimy mohou nastat jen pro $b>0$, přesněji pro $b\geq 2\sqrt{k}$.

ŽÁDNÉ OSCILACE

- Je-li $D<0$, pak $\lambda, \bar{\lambda}$ kde $\lambda=-\frac{b}{2}+i\frac{\sqrt{4k-b^2}}{2}$
  $$y_{OB}(t) = C_1e^{-\frac{b}{2}t}\cos\frac{\sqrt{4k-b^2}}{2}t + C_2e^{-\frac{b}{2}t}\sin\frac{\sqrt{4k-b^2}}{2}t$$

TLUMENÉ KMITY PRO $b>0$

$\boxed{b=0}$ $\quad y_{OB}(t) = C_1\cos\sqrt{k}t + C_2\sin\sqrt{k}t$

---

② Uvažovanou rci 2. řádu lze psát jako systém dvou rovnic 1. řádu:

$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ výchylka, rychlost $\Rightarrow$ $\vec{x}'=\mathbb{A}\vec{x}$ kde $\mathbb{A}=\begin{pmatrix}0&1\\-k&-b\end{pmatrix}$

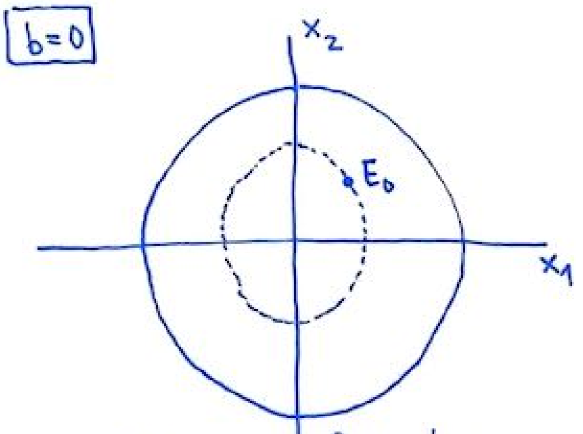
- ▶ důležitý obecný obrat: od $\boxed{\text{jedné rce k-tého řádu}}$ k $\boxed{\text{systému k rovnic 1. řádu}}$
- via lineární algebra ▶ $\det(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})=0$ je popis charakteristické rovnice $\lambda^2+b\lambda+k=0$.
- ▶ Specifikuji tzv. fázový prostor generovaný $\vec{x}=(x_1,x_2)$. V našem případě fázová rovina. $\vec{x}=(0,0)$ je stacionární řešení

---

③ Energetickou bilanci lze v "nových" proměnných x_1,x_2 psát ve tvaru

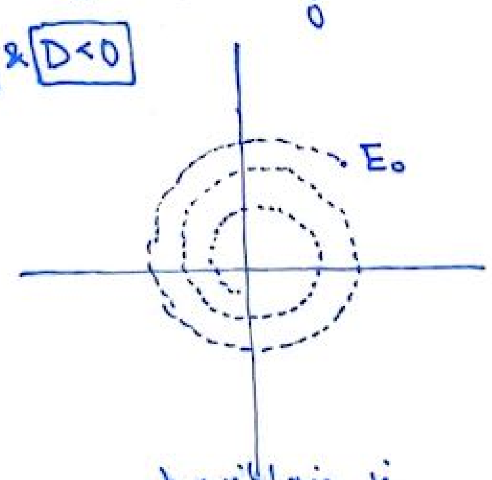
$\frac{1}{2}x_2^2+\frac{k}{2}x_1^2=E_0$ je-li $b=0$ resp. $\frac{1}{2}x_2^2+\frac{k}{2}x_1^2+\underset{\overset{\vee}{0}}{\mathcal{D}_b} = E_0$ je-li $b>0$

$\boxed{b=0}$



trajektorie ve fázovém prostoru jsou elipsy s poloosami určenými počáteční energií

$\boxed{b>0}$ & $\boxed{D<0}$



trajektorie je spirála kolem počátku (směřující do počátku)

7.2 ODR 1. řádu

V předchozí části jsme ukázali, že ODR 2. řádu lze převést na systém ODR 1. řádu. Obecněji, ODR k-tého řádu lze převést na systém k ODR typu

(10) $$\vec{y}' = \vec{f}(t,\vec{y}) \qquad \text{pro} \quad \vec{y} = (y_1,\dots,y_N).$$

Speciálními typy systému (10) jsou systémy lineárních ODR 1. řádu:

(11) $$\vec{y}' = \mathbb{A}\vec{y} + \vec{g}.$$

Vyšetřování vlastností systémů (11) je předmětem kursu lineární algebry.

V této sekci se budeme zabývat **skalárními** rovnicemi 1. řádu, a to ne nutně lineárními. Budeme řešit rovnici

(12) $$y' = f(t,y)$$

kde $f: \underbrace{(a,b)}_{t} \times \underbrace{(c,d)}_{y}$ je daná funkce. Budeme hledat/zkoumat obecná řešení (12) nebo budeme řešit počáteční úlohu, kdy k rovnici (12) přidáme podmínku

(13) $$y(t_0) = y_0 \qquad t_0 \in (a,b), \; y_0 \in \mathbb{R}.$$

Definice ▸ Řekneme, že $y:(a,b)\to\mathbb{R}$ je řešením (12) pokud

- $y'(t)$ existuje pro $\forall t \in (a,b)$,
- $y'(t) = f(t,y(t))$ platí pro $\forall t \in (a,b)$.

▸ Nechť y_1 je řešením (12) na (a_1,b_1) a y_2 je řešením (12) na (a_2,b_2). Pokud $(a_1,b_1)\subset(a_2,b_2)$ a $y_1=y_2$ na (a_1,b_1), pak y_2 nazveme prodloužením y_1. Řešení (12) je maximální, pokud nemá prodloužení definované na ostře větším intervalu.

Nyní se budeme soustředit na dva typy ODR (12):

(i) LINEÁRNÍ ODR (ne nutně s konstantními koeficienty)

(ii) ODR SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI, tj $f(t,y) = h(t)g(y)$

$\boxed{\text{Ad (i)}}$ Rovnice typu

$$(14) \quad \boxed{y' + a(t)y = b(t) \qquad a, b : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R} \text{ dány}}$$

$L(y) := y' + a(t)y$ specifikuje LINEÁRNÍ operátor

Cíl: nalézt $y : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ maximální řešení (14)

Postup je založen opět na vlastnostech exponenciály. Buď $A(t)$ primitivní funkce k $a(t)$. Pak

$$\left[y(t)\exp A(t)\right]' = \exp A(t)\left\{y'(t) + a(t)y(t)\right\} \overset{(14)}{=} b(t)\exp A(t)$$

$$y(t)e^{A(t)} = e^{A(t)}\left\{y'(t) + a(t)y(t)\right\} \overset{(14)}{=} b(t)e^{A(t)}$$

Tedy:
- je-li $B = B(t)$ primitivní funkce k $b(t)e^{A(t)}$, kde $A = A(t)$ je prim. fce k $a(t)$,

pak rce (14) po vynásobení funkcí $e^{A(t)}$ přejde do tvaru

$$\left(y(t)e^{A(t)}\right)' = B'(t)$$

což implikuje

$$(15) \quad \boxed{y(t) = \left(B(t) + C\right)e^{-A(t)} \qquad \text{kde } C \in \mathbb{R}}$$

Funkce $e^{A(t)}$ se často nazývá integrační faktor, a dle této funkce i celé schéma: metoda integračního faktoru.

Příklad ④ Najděte maximální obecné řešení rovnice $\boxed{y' - 2ty = t}$.

Řešení Funkce $a(t) = -2t$ a $b(t) = t$ jsou definovány na $\mathbb{R}$. $A(t) := -t^2$ je prim. fce k $a(t)$. Násobme ji e^{-t^2}. Pak

$$\left(ye^{-t^2}\right)' = \left(y' - 2ty\right)e^{-t^2} = te^{-t^2} = \left(-\tfrac{1}{2}e^{-t^2}\right)'.$$

Tedy

$$y(t)e^{-t^2} = -\tfrac{1}{2}e^{-t^2} + C \qquad \boxed{C \in \mathbb{R}}$$

a tak $\boxed{y(t) = Ce^{t^2} - \frac{1}{2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ je maximální obecné řešení studované rce.

Konstantu C bychom určili z poč. podmínky.

Ad (vi) Rovnice typu

$$\boxed{(16) \qquad y' = h(t)\,g(y) \qquad h:(a,b)\to\mathbb{R},\ g:(c,d)\to\mathbb{R} \text{ dány}}$$

Významnými řešeními rce (16) jsou tzv. rovnovážné (stacionární, kritické) body neboli ekvilibria, to jsou takové y_* splňující

$$g(y^*) = 0.$$

Odpovídajícími řešeními jsou $\boxed{y(t) = y_* \quad \forall t \in \mathbb{R}}$

P O S T U P

Je-li $g \neq 0$ na nějakém intervalu $(\tilde{c},\tilde{d}) \subset (c,d)$, tzn. g nemění na $(\tilde{c},\tilde{d})$ znaménko, pak řešení najdeme takto: ① prolože

(16) $\Rightarrow$ $\dfrac{y'}{g(y)} = h(t)$, tak máme $\boxed{G(y) = H(t) + C \quad (\bullet\bullet)}$,

kde G je prim. fce k $\frac{1}{g(y)}$ na $(\tilde{c},\tilde{d})$ a H je primitivní fce k h na (a,b).

② Protože $G'(y) = \dfrac{1}{g(y)} > 0$ nebo < 0 na $(\tilde{c},\tilde{d})$

tak G je ryze monotónní a spojitá a existuje G^{-1}

③ Z $(\bullet\bullet)$ dostáváme $\boxed{y(t) = G^{-1}(H(t)+C)}$

Poznámka Již řešení v "implicitním" tvaru $(\bullet\bullet)$ může být užitečné! ----> tj. ve tvaru $\mathcal{G}(t,y(t)) = 0$.

Výše uvedený postup a argumenty zformulujeme do následujícího tvrzení.

Věta 7.1 Nechť $h \in C((a,b))$ a $g \in C((c,d))$ a $\boxed{g(y) \neq 0 \text{ na } (c,d)}$. Pak každým bodem $(t_0,y_0) \in \mathcal{O} := (a,b)\times(c,d)$ prochází právě jedno maximální (vzhledem k $\mathcal{O}$) řešení rovnice (16). Toto řešení má tvar

$$y(t) = G^{-1}(H(t)+C), \tag{17}$$

kde H je prim. fce k f na (a,b) a G je primitivní funkce k $\frac{1}{g}$ na (c,d).

(Dk) • Víme, že $G'(y)$ existuje v (c,d) a $G'(y) \neq 0$ (neb $G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$).
Tedy G^{-1} existuje a má derivaci. Derivováním (17) dostáváme

$$y'(t) = \left[G^{-1}(z)\right]'_{z=H(t)+C} H'(t) = \frac{1}{G'\left(G^{-1}(H(t)+C)\right)} h(t)$$

$$= g\Big(\underbrace{G^{-1}(H(t)+C)}_{y(t)}\Big) h(t)$$

$$= g(y(t))\, h(t).$$

- Zavedeme-li $\boxed{H(t) := \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds \quad a \quad G(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(z)}\,dz}$, (18)

pak $y(t_0) = G^{-1}(H(t_0)) = G^{-1}(0) = y_0$; tedy y s takto definovanými G a H splňuje počáteční podmínku neboli prochází bodem $(t_0, y_0) \in \mho$.

- Ukážeme, že y je definováno na maximálním intervalu $(t_0-\delta, t_0+\gamma) \subset (a,b)$ takový, že platí: je-li $t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$ pak $H(t) \in G[(c,d)]$
obraz intervalu

Je-li $\boxed{\begin{array}{l} t_0-\delta = a \\ t_0+\gamma = b \end{array}}$, pak nelze rozšířit y (v $\mho$).

Je-li $t_0 - \delta > a$, pak $H(t_0-\delta) \notin G[(c,d)]$. Kdyby totiž $H(t_0-\delta) \in G[(c,d)]$, pak $H(t) \in G[(c,d)]$ i pro $t \in (x_0-\delta-\delta_1, x_0)$, $\delta_1 > 0$, což však dává spor s definicí maximálního intervalu.

Je-li $t_0+\gamma < b$, argumentujeme podobně.

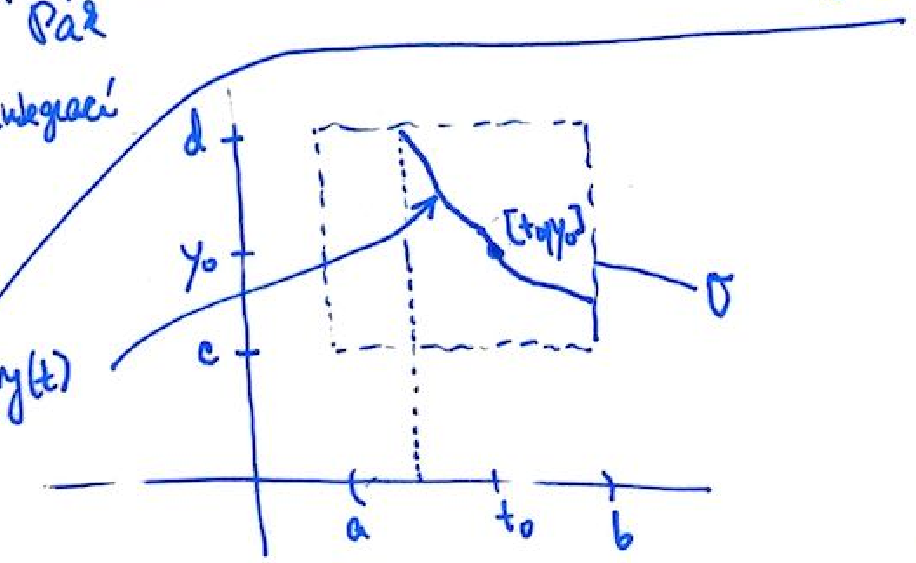
- <u>Jednoznačnost</u> Buď $\eta = \eta(t)$, $t \in I \subset (a,b)$ řešení splňující $\eta(t_0) = y_0$, $t_0 \in I$ a $\eta'(t) = g(\eta(t))h(t)$. Pak

$\frac{\eta'(t)}{g(\eta(t))} = h(t)$ $t \in I$. Integrací od t_0 do t dostáváme

$G(\eta(t)) = H(t)$. Tedy

$\eta(t) = y(t)$ na I

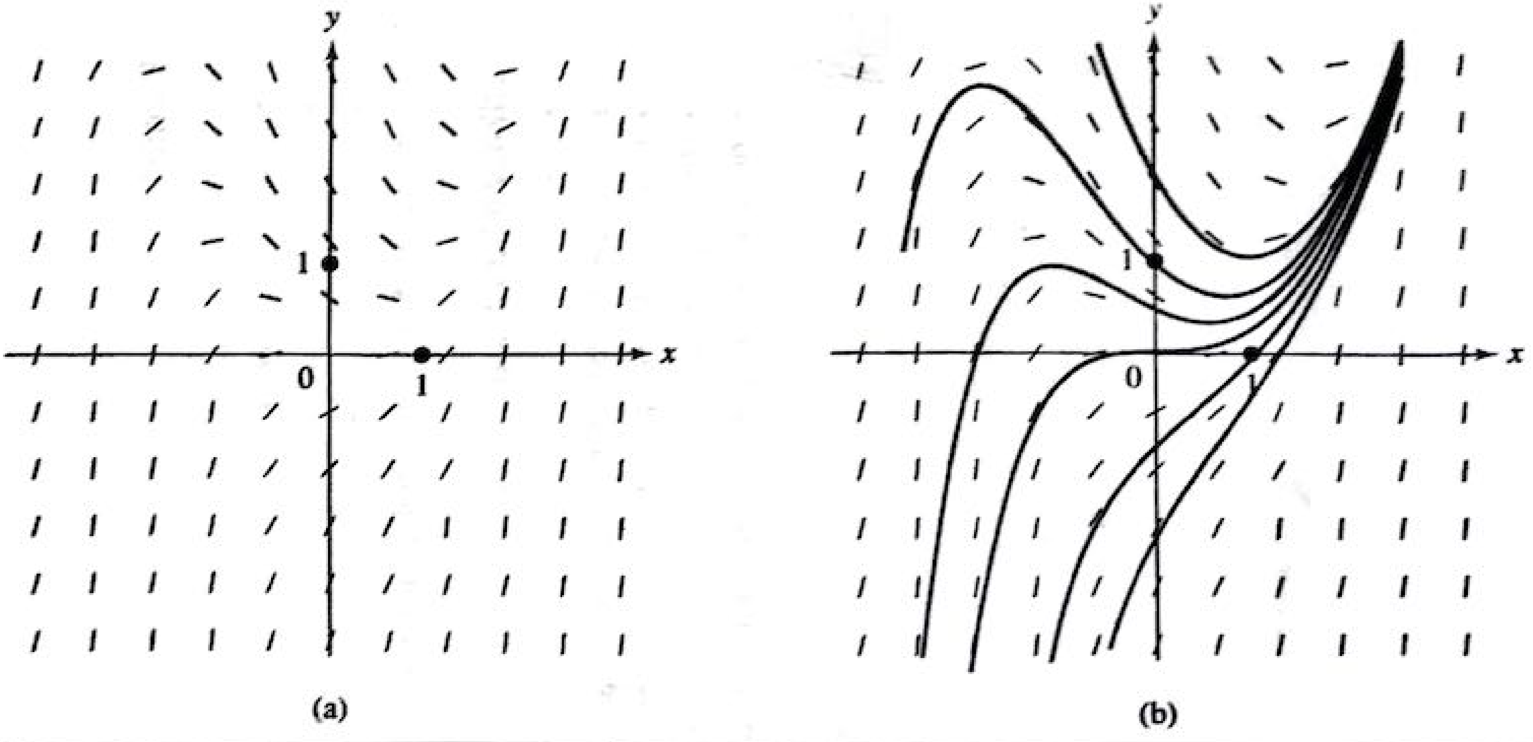
a protože y je maximální, tak y je rozšířením η. ☒



Ještě než uvedeme několik příkladů, které lze řešit metodou separovaných proměnných, poznamenejme, že nalezení analytického řešení pro ODR 1. řádu není až tak jednoduchá záležitost, jak
(vzorečku) se sami přesvědčíte. Navíc se může stát, že samotný vzoreček je natolik komplikovaný, že porozumění jak se) řešení vlastně chová vyžaduje další úsilí. Pro skalární rovnice
(nalezené) 1. řádu (typu $y' = f(t,y)$) existuje <u>grafická metoda</u>, která dává cenný náhled jak se řešení může chovat. Postup je založen na myšlence:

[Řešení y rce $y' = f(t,y)$ procházející bodem (t_0,y_0) má v tomto bodě tečnu se směrnicí $f(t_0,y_0)$]

Mohu si tedy nakreslit v různých bodech (síť) krátké úsečky s odpovídající směrnicí a získat tak velmi dobrý přehled o tom jak se řešení vycházejícího z nějakého bodu vyvíjí, viz obrázek.



směrové pole pro rci $y' = x^2 - y$
Vpravo (b) s naznačenými řešeními.

(Př. 5) Najděte nejdříve obecné řešení rce $\boxed{y' = a(t)y}$ a poté řešení splňující $\boxed{y(0) = y_0}$. Pro případ $a(t) = a_* > 0$ načrtněte směrové pole.

Řešení Interpretace rce: změna veličiny y je úměrná dané veličině
(kontext) a parametr úměrnosti se mění s časem.

- $\boxed{y \equiv 0}$ je stacionární řeš. (ekvilibrium).
- $\boxed{y \neq 0} \Rightarrow$ $\frac{y'}{y} = a(t) \iff (\ln|y|)' = a(t)$

$y \in (0, +\infty)$
nebo $y \in (-\infty, 0)$

$$\iff \ln|y(t)| = \int a(t)\,dt + C := A(t) + C$$

$$\iff |y(t)| = e^{A(t)+C} = e^{C} e^{A(t)} = K e^{A(t)}$$

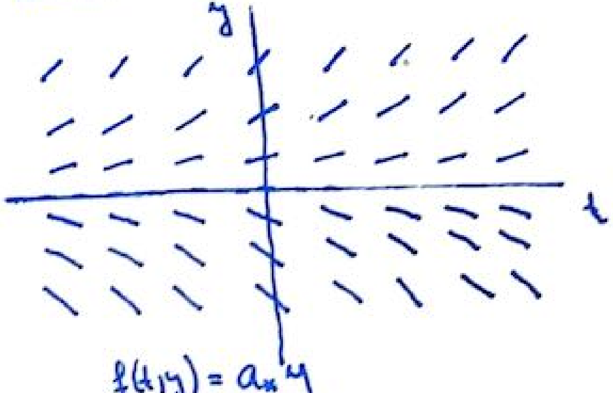
$$K > 0$$

$$\iff \boxed{y(t) = K e^{A(t)} \quad K \in \mathbb{R}}$$ OBECNÉ ŘEŠENÍ

$$y(0) = y_0 \Rightarrow \underline{K = y_0 e^{-A(0)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = y_0 e^{A(t) - A(0)}}$$ ŘEŠENÍ POČÁTEČNÍ ÚLOHY

- $A(t) = a_*$



$f(t,y) = a_* y$

(Př. 6) Úloha $\boxed{y' = a_* y^2 \quad \text{s} \quad y(0) = y_0 > 0}$ mohu řešit i maličko jinak:

- $y \equiv 0$ mě nezajímá neboť $y_0 > 0$.
- $y \neq 0 \Rightarrow$ $\frac{y'}{y^2} = a_* \iff \left(-\frac{1}{y}\right)' = a_* \Rightarrow$ integrací od 0 do t

$$-\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y_0} = a_* t \iff \boxed{y(t) = \frac{y_0}{1 - a_* y_0 t}}$$

Řešení existuje na intervalu $[0, \frac{1}{a_* y_0})$ resp. $(-\infty, \frac{1}{a_* y_0})$ a v čase $t = \frac{1}{a_* y_0}$ vykazuje singulární chování (BLOW-UP).

(Př. 7) Úloha $y' = a_* y^{3/2}$ má nejen triviální řešení $y \equiv 0$ pro nulové počáteční podmínky, ale existují ∞-mnoho řešení nenulových, kde $y(0) = 0$. VIZ CVIČENÍ.

SPECIÁLNÍ TYPY ROVNIC, KTERÉ LZE PŘEVÉST NA ODR ŘEŠITELNÉ PŘEDCHOZÍMI METODAMI.

$\boxed{\text{Bernoulliova rovnice}}$ (A) $\underbrace{y' + a(t)y = b(t)y^{\alpha}}$ kde $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$

Substitucí $\boxed{z := y^{1-\alpha}}$ dostáváme

$$\underset{\sim}{z'} = (1-\alpha)\frac{y'}{y^{\alpha}} \overset{(A)}{=} (1-\alpha)\,b(t) - (1-\alpha)\,a(t)\,y^{1-\alpha}$$
$$= \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{(1-\alpha)\,b(t) - (1-\alpha)\,a(t)\,z}$$

a tak z řeší

$$\boxed{z' + (1-\alpha)a(t)z = (1-\alpha)b(t)}$$

kterou mohu řešit metodou integračního faktoru.

$\boxed{\text{Homogenní rovnice}}$ Máme rci $\left[y' = f(t,y)\right]$, kde f je invariantní na škálování (změnu měřítka) tzn.

$f(\lambda t, \lambda x) = f(t,x) \quad \forall \lambda > 0$ (f je homogenní stupně 0)

Pak se $f(t,x)$ dá psát ve tvaru $\tilde{f}\left(\frac{y}{t}\right)$ a klademe substituci $\boxed{z := \frac{y}{t}}$

Pak $y' = z + z't$ a tedy $tz' + z = \tilde{f}(z)$ neboli $\left[z' = \frac{\tilde{f}(z) - z}{t}\right]$ což mohu řešit metodou separovaných proměnných

(Př. 8) $\boxed{y' = \frac{t}{y} + \frac{y}{t}}$ S výše uvedenou substitucí

$$tz' + z = \frac{1}{z} + z \iff \boxed{z' = \frac{1}{tz}}$$

Pozorujte, že $f(t,y) := \frac{t}{y} + \frac{y}{t}$ splňuje $f(\lambda t, \lambda y) = f(t,y) \quad \forall \lambda > 0$

a $\tilde{f}(z) := \frac{1}{z} + z$.

$\boxed{\text{RICCATIOVA rovnice}}$ $y' + a(t)y + b(t)y^2 = c(t)$

nelze obecně vyřešit. Pokud však znám jedno partikulární řešení y_1 (uhodnutím), pak lze obecné řešení nalézt substitucí $y = z + y_1$, která vede na Bernoulliho rovnici pro z. PROVEĎTE.

$\boxed{\text{Chemické a biologické modely popsané ODR 1. řádu}}$

Reakční rychlost udává změnu produkce chemické látky způsobenou chemickou reakcí v izotermálním prostředí za jednotku času. Reakční rychlost je úměrná frekvenci/četnosti molekulárních srážek. Experimentální data ukazují, že tato frekvence/četnost srážek je úměrná součinu molárních koncentrací chemických látek, které do reakce vstupují. Zákon (pravidlo) působících hmot je tvrzení (fyzikální chemie), které říká, že:

(*) $\boxed{\text{Reakční rychlost se rovná (modulo násobení konstantou) součinu molárních koncentrací chemických látek.}}$

Příklady ① V případě chemické reakce „A produkuje P", kterou zapisujeme $\boxed{A \xrightarrow[k]{} P}$, kde A, P jsou chemické látky a k je konstanta vstupující do (*) a udávající rychlost produkce P z látky A, dostáváme rovnici

$$(1) \qquad \frac{dp}{dt} = ka,$$

kde malá písmena a, p, x, … značí molární koncentraci látek A, P, X, …, tj. počty molů látek A, P, X na jednotku objemu.

Z pohledu veličiny A (koncentrace a), reakce $A \xrightarrow[k]{} P$ má tvar

$$(1') \qquad \frac{da}{dt} = -ka,$$

což ve spojení s (1) dává

$$(1'') \qquad \frac{d}{dt}(p+a) = 0 \implies \text{součet koncentrací se nemění v čase}$$

② Pokud dvě molekuly A produkují P, tj. $2A \xrightarrow{k} P$, pak dostáváme

$$(2) \qquad \frac{dp}{dt} = ka^2 \quad a \quad \frac{da}{dt} = -2ka^2$$

③ Pokud látky A, B vstupují do chemické reakce, která vytváří P, tzn.

$$(3) \qquad A + B \xrightarrow[k]{} P$$

$\boxed{O_2 + O \rightarrow O_3}$

pak rovnice popisující změnu koncentrací a, b a p mají tvar

$$(3') \qquad \frac{dp}{dt} = kab, \quad \frac{da}{dt} = -kab \quad a \quad \frac{db}{dt} = -kab,$$

což implikuje

$$(3'') \qquad \frac{d}{dt}(2p+a+b)=0.$$

④ V některých procesech (katalýza), chemická látka vstupuje do chemické reakce, ale zároveň se v ní i produkuje. Máme-li mají reakci

$$(4) \qquad A+X \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} 2X$$

pak, protože X je na obou stranách rovnice dostáváme

$$(4') \qquad \frac{dx}{dt}=k_1ax-k_{-1}x^2.$$

Je-li $a>0$ ve velké koncentraci, lze ji považovat za konstantu a dostáváme

$$(4'') \qquad \frac{dx}{dt}=Cx(1-\lambda x).$$

Je výhodné převést rovnice do bezrozměrného tvaru. Pro typické konstantní hodnoty t_* a x_* časové škály a veličiny x definujeme nové proměnné $\tilde{t}:=\frac{t}{t^*}$ a $\tilde{x}:=\frac{x}{x^*}$. Odvodíme z (4'') rovnici pro $\tilde{x}(\tilde{t})$.

Protože

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}=\frac{1}{x^*}\frac{dx}{d\tilde{t}}=\frac{1}{x^*}\frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tilde{t}}=\frac{t^*}{x^*}\frac{dx}{dt}\overset{(4'')}{=}\frac{t^*}{x^*}Cx(1-\lambda x)$$

$$=t^*C\,\tilde{x}(1-\lambda x^*\tilde{x})=\tilde{x}(1-\tilde{x}),$$

kde jsme položili $t^*C=1$ a $\lambda x^*=1$, tzn. $t^*=\frac{1}{C}$ a $x^*=\frac{1}{\lambda}$.

Rovnice v bezrozměrném tvaru

LOGISTICKÁ ROVNICE $\qquad (4''') \quad \frac{dy}{dt}=y(1-y)$ neobsahuje žádné parametry modelu.

⑤ V chemických rovnicích může vystupovat další katalyzátor Y:

$$(5) \qquad A+X \xrightarrow[k_1]{} 2X, \quad X+Y \xrightarrow[k_2]{} 2Y, \quad Y \xrightarrow[k_3]{} A$$

Pak <u>zákon působících hmot</u> dává

$$(5') \qquad \frac{dx}{dt}=k_1ax-k_2xy, \quad \frac{dy}{dt}=k_2xy-k_3y, \quad \frac{da}{dt}=k_3y-k_1ax$$

Tedy po sečtení

$$(5'') \qquad \frac{d}{dt}(x+y+a)=0$$

Je-li $a>0$ ve výrazně větším množství, pak (5') se redukuje na rce

$$(5''') \qquad \boxed{\frac{dx}{dt}=Cx(1-\beta y) \quad \text{a} \quad \frac{dy}{dt}=k_2y\left(x-\frac{k_3}{k_2}\right)}, \quad C,\beta,k_2,k_3>0$$

což je systém dvou rovnic 1. řádu. Systém (5'') je blízký LOTKA–VOLTERROVĚ RCI.

Některé procesy, jako radioaktivní rozpad nebo růst populace, nezahrnují chemické reakce, přesto je struktura rovnic, které tyto procesy popisují, podobná.

⑥ Rovnice

(6) $\frac{dx}{dt} = ax$ kde a je rychlost změny x

je rovnice produkce/růstu pokud $\boxed{a>0}$, a
rovnice rozpadu/anihilace pokud $\boxed{a<0}$.

Je-li produkce x dána přítomností jiného materiálu y, pak

(6') $\frac{dx}{dt} = ay$

Jestli $b \in \mathbb{R}^+$ (konstanta), pak $\frac{dx}{dt} = b$ je rovnice pro růst/spotřeba s konstantní rychlostí.

Některé biologické procesy jsou popisovány schématicky/symbolicky s obecnými elementami, např. i komplikovaný proces je třeba popsán:

(6'') $$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \\ \dot{y} &= g(x,y) \end{aligned}}$$

POROVNEJ s (6).

V případě, kdy $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} < 0 \quad a \quad \frac{\partial g}{\partial x} > 0}$ systém (6'') popisuje aktivační/inhibiční procesy,

neboť y inhibuje (způsobuje zánik/rozpad) x a x aktivuje růst y.

V případě, kdy $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} < 0 \quad a \quad \frac{\partial g}{\partial x} < 0}$ systém (6'') popisuje soutěživý systém, kdy se oba druhy vzájemně potlačují.

⑦ Vývoj populace

(7i) Matematický model infekce bude sledovat tři disjunktní skupiny obyvatelstva: I označuje infikované, S označuje neinfikované, ale schopné infekci šířit a U označuje počet uzdravených. Model je založen na dvou pseudorovnicích

(7) $S + I \xrightarrow{\beta} 2I$ a $I \xrightarrow{\gamma} U$, β... rychlost infekce

které vedou na následující systém 3 rovnic pro evoluci S, I a U:

$$(7') \quad \boxed{\frac{dS}{dt} = -\beta S I, \quad \frac{dI}{dt} = \beta S I - \gamma I \quad \text{a} \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I}$$

Virová nákaza může být charakterizována počtem nenapadených X, počtem napadených Y a počtem virů V. Protože X je napaden virusem V, a V roste snižováním X, dostáváme

$$X + V \xrightarrow{\beta} Y.$$

Viry V se nezvyšují samy o sobě, ale rostou proporcionálně s Y. Růst X je konstantní a rychlost šíření nemoci je úměrná X. Podobně Y zaniká s počtem Y. Tedy:

$$(7'') \quad \left[\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \lambda - \mu X - \beta X V \\ \frac{dY}{dt} &= \beta X V - \alpha Y \\ \frac{dV}{dt} &= kY - uV - \beta X V \end{aligned}\right.$$

- Malthusův zákon = základní vztah pro populační dynamiku

$$(7''') \quad \frac{dN}{dt} = bN \qquad N \ldots \text{počet (obyvatel)}$$

Velmi dobrý model pro počáteční fázi. Chybí*) a pohled chování pro velké časové období. Víme, řešením (7''') s $\boxed{\begin{array}{r} N(0)=N_0 \\ \vee \\ 0 \end{array}}$ že

$$(7'''') \quad N(t) = N_0 e^{bt} \longrightarrow +\infty \quad \text{pro } t \to +\infty.$$

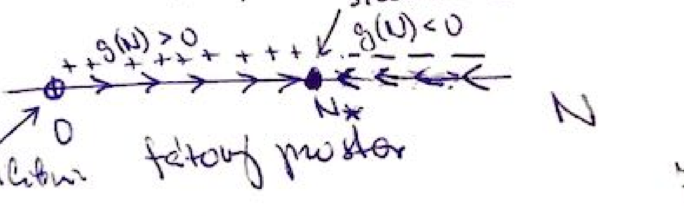
- Lepší model je tzv. logistická rovnice, kdy počet jedinců začne klesat jakmile N přesáhne kritickou hodnotu $N_* > 0$. Je-li $b>0$ primární rychlost růstu v počáteční fázi, zatímco $1 - \frac{N}{N_*}$ je inhibiční faktor, pak

$$\boxed{(7''''') \quad \frac{dN}{dt} = b\left(1 - \frac{N}{N_*}\right)N \quad \text{s} \quad 0 < N_0 < N_*.}$$

DÚ: NAKRESLETE SI SMĚROVÉ POLE.

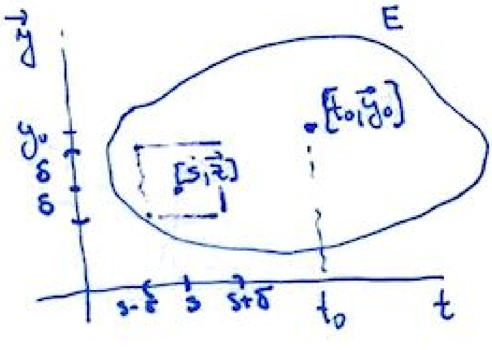
Metodou separovaných proměnných dostaneme

$$(7^6) \quad N(t) = \frac{N_* N_0}{N_0 + (N_* - N_0)e^{-bt}} \longrightarrow N_* \text{ pro } t \to +\infty$$



*) neodpovídající realitě.

$\boxed{7.3}$ ZÁKLADNÍ EXISTENČNÍ VĚTY



Uvažujme úlohu

$$(P)\qquad \boxed{\begin{aligned}\vec y\,' &= \vec f(t,\vec y)\\ \vec y(t_0) &= \vec y_0\end{aligned}}$$

kde $t_0\in\mathbb{R}$, $\vec y_0\in\mathbb{R}^N$ a $\vec f=(f_1,\dots,f_N):\underset{\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N}{E}\to\mathbb{R}^N$ jsou data úlohy (počáteční čas, počáteční hodnota, pravá strana), přičemž

$$(t_0,\vec y_0)\in E\subsetneq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$$

kde E je <u>otevřená</u> podmnožina v $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$, tzn. že pro každý bod $(s,\vec z)\in E$ existuje $\delta>0$ tak, že $(s-\delta,s+\delta)\times B_\delta(\vec z)\subset E$,

kde $B_\delta(\vec z):=\{\vec y\in\mathbb{R}; |\vec z-\vec y|_{\mathbb{R}^N}<\delta\}$

Definice Řekneme, že funkce $\vec y:(a,b)\to\mathbb{R}^N$ je řešením Cauchyho (počáteční) úlohy (P) pokud $\dot y(t)=\vec f(t,\vec y(t))$ pro všechna $t\in(a,b)$ a $y(t_0)=\vec y_0$, kde $t_0\in(a,b)$.

Motivace studovat systémy ODR 1. řádu pramení jednak z mnoha aplikací (viz některé výše uvedené) a také z možnosti zapsat skalární diferenciální rov k-tého řádu typu

(odr) $\qquad y^{(k)}=h(t,y,y',\dots,y^{(k-1)})$

jako systém ODR 1. řádu. Stačí totiž označit

$$y_1:=y,\ y_2:=y',\dots,y_k:=y^{(k-1)}$$

a pak

$$y_1'=y_2,\ y_2'=y_3,\dots,y_{k-1}'=y_k \text{ a } y_k'\overset{(odr)}{=}h(t,y_1,\dots,y_k),$$

což je totéž jako $\boxed{\vec y\,'=\vec f(t,\vec y)}$, kde $\vec y=(y_1,\dots,y_k)^T$ a

$$\vec f(t,\vec y)=(y_2,y_3,\dots,y_k,h(t,y_1,\dots,y_k))^T.$$

Důležitý krok! zapamatovat!

Základní matematická teorie pro úlohu (P) je založena na dvou předpokladech kladených na funkci $\vec{f}$:

(P1) $\vec{f}: E \to \mathbb{R}^N$ je spojitá na otevřené množině $E \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$

tzn. f je spojitá v každém bodě $(t_*,\vec{z}_*)\in E$

tzn. pro všechna $(t_*,z_*)\in E$ a

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\ \forall (t,z)\in(t_*-\delta,t_*+\delta)\times B_\delta(z_*)\ \|\vec{f}(t,\vec{z})-\vec{f}(t_*,\vec{z}^*)\|_{\mathbb{R}^N} <$$

kde $B_\delta(z_*) := \{\vec{z}\in\mathbb{R}^N;\ \|\vec{z}-\vec{z}_*\|_{\mathbb{R}^N}\le\delta\}$

a $\|\vec{z}\|_{\mathbb{R}^N} := \left(\sum_{i=1}^{N} z_i^2\right)^{1/2}$.

Podobně jako pro $h\in C(\langle\alpha,\beta\rangle)$ platí, že h je omezená na $\langle\alpha,\beta\rangle$, tak z (P1) plyne:

$$\Big[\forall\,\sigma := \{(t,\vec{z})\in E;\ t\in\langle t_0-a,t_0+a\rangle \text{ a } \|\vec{z}-\vec{y}_0\|_{\mathbb{R}^N}\le b\}$$

$$\exists M=M_\sigma>0\ \forall (t,\vec{z})\in\sigma\ |\vec{f}(t,\vec{z})|\le M\Big]$$

(P2) $\vec{f}: E\to\mathbb{R}^N$ je na E lokálně lipschitzovská vzhledem k $\vec{y}$;

tzn. $\forall\,\sigma$ definované výše $\exists\,\lambda=\lambda_\sigma>0$ tak, že

$$\forall\ (t,\vec{y}_1),(t,\vec{y}_2)\in\sigma\quad \|\vec{f}(t,\vec{y}_1)-\vec{f}(t,\vec{y}_2)\|_{\mathbb{R}^N}\le\lambda\|\vec{y}_1-\vec{y}_2\|_{\mathbb{R}^N}$$

Věta 7.2 (Peanova věta o existenci)

Je-li splněn předpoklad (P1), pak $\exists\,\delta>0$ a $\vec{y}:(t_0-\delta,t_0+\delta)\to\mathbb{R}^N$ řešící Cauchyho úlohu (P).

Věta 7.3 (Picard-Lindelöfova věta o existenci a jednoznačnosti)

Platí-li předpoklady (P1) a (P2), pak existuje právě jedna ($\exists!$) $\vec{y}:(t_0-\delta,t_0+\delta)\to\mathbb{R}^N$ řešící Cauchyho úlohu

$$\left[\ \delta := \min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}\ \right]$$

Obě věty dokážeme v Kapitole 9.

Příklad Uvažujme rov typu $y' = |y|^{\alpha}$, ($\alpha > 0$.) Pak $f(t,y) = g(y) := |y|^{\alpha}$ je sudá. Zkoumejme, pro jaká α je $g(y)$ lipschitzovská.

Řešení Je-li $\alpha \geq 0$, pak $D_g = \mathbb{R}$. Navíc $g \in C(\mathbb{R})$ a tedy $g \in C([-A,A])$ a tak g je omezená na $[-A,A]$ pro $A>0$ libovolné, tzn. $\forall A>0 \ \exists M = M_A \quad |g(y)| \leq M$ na $[-A,A]$.

Je-li $y_1 \neq y_2$, $y_1, y_2 \in [-A,A]$, pak

(i) $$\left|\frac{g(y_1)-g(y_2)}{y_1-y_2}\right| \leq \frac{2M}{\delta}$$ pro $|y_1-y_2| > \delta$

(ii) $$\left|\frac{g(y_1)-g(y_2)}{y_1-y_2}\right| \simeq \left|g'(y_1)\right|$$ pro $|y_1-y_2| \leq \delta$, δ malé dostatečně

ale $|g'(y_1)| \leq \alpha |y_1|^{\alpha-1} \leq \alpha |A|^{\alpha-1}$ je-li $\alpha \geq 1$

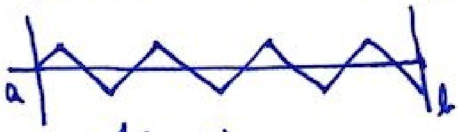
$\leq \frac{\alpha}{\epsilon^{1-\alpha}}$ je-li $\alpha \in (0,1)$ a $|y_1| \geq \epsilon$

Tedy: pro $\alpha \geq 1$, $g(y) = |y|^{\alpha}$ je lipschitzovská (na $[-A,A]$) s konstantou $\lambda := \max\left\{\frac{2M}{\delta}, \alpha |A|^{\alpha-1}\right\}$.

: pro $\alpha \in (0,1)$, $g(y) = |y|^{\alpha}$ je lipschitzovská na $[\epsilon, A]$, $\epsilon > 0$, s $\lambda := \max\left\{\frac{2M}{\delta}, \frac{\alpha}{\epsilon^{1-\alpha}}\right\}$. ▨

Příklad. (i) Funkce, která je $C^1((a,b))$ je na (a,b) lokálně lipschitzovská

(ii) Funkce $g(y) = y^2$ je lipschitzovská na $\langle -A, A\rangle$ pro $A>0$ libovolné, ale není lipschitzovská na $\mathbb{R}$. Je však na $\mathbb{R}$ lokálně lipschitzovská.

(iii) Funkce 

je na $\langle a,b\rangle$ lipschitzovská, ale není $C^1((a,b))$.

Uvažujme rovnici se separovanými proměnnými, tj.

$$y' = f(t)\,g(y).$$

Z Věty 7.3) a z předchozích příkladů plyne následující tvrzení.
z Věty 7.1

Tvrzení A Jsou-li $f \in C((t_0-\delta, t_0+\delta))$ a $g \in C((y_0-\Delta, y_0+\Delta))$, pak v bodě $[t_0, y_0]$ může dojít k větvení řešení pouze tehdy když

(i) $g(y_0) = 0$,

a

(ii) $g'(y_0)$ neexistuje resp. g není v okolí y_0 lipschitzovské.

Doplňme si obecnou teorii o ještě jedno tvrzení, které se týká nalepování řešení.

Tvrzení B (O nalepování řešení) Nechť $\vec{y}_1$ řeší $\vec{y}' = \vec{f}(t,\vec{y})$ na (a,b) a $\vec{y}_2$ stejnou rovnici na (b,c) a navíc platí:

(*) $$\lim_{t\to b-} \vec{y}_1(t) = \lim_{t\to b+} \vec{y}_2(t) = \vec{z} \quad \text{a} \quad \vec{f} \text{ je spojitá v } (b,\vec{z}),$$

pak

$$\vec{y}(t) := \begin{cases} \vec{y}_1(t) & \text{pro } t \in (a,b), \\ \vec{z} & \text{pro } t = b, \\ \vec{y}_2(t) & \text{pro } t \in (b,c), \end{cases}$$

je řešením $\vec{y}' = \vec{f}(t,\vec{y})$ na (a,c).

Dk Stačí dokázat $\vec{y}'(b) = f(b,\vec{z})$. Z (*) dále plyne:

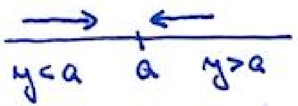
$$\begin{array}{ccccc} \lim_{t\to b-} \vec{f}(t,\vec{y}_1(t)) & = & \vec{f}(b,\vec{z}) & = & \lim_{t\to b+} \vec{f}(t,\vec{y}_2(t)) \\ \| & & & & \| \\ \lim_{t\to b-} y_1'(t) & & & & \lim_{t\to b+} y_2'(t) \\ \| & & & & \| \\ y_1'(b-) & & & & y_2'(b+), \end{array}$$

kde jsme využili věty o jednostranných derivacích. ▨

Úvaha (o nalepování řešení ODR $y' = g(y)$.)

Uvažujme rci $\boxed{y' = g(y)}$ a nechť bod $a \in \mathbb{R}$ je (nulový, kritický, rovnovážný, singulární) takový bod, kde $g(a) = 0$. Fce g je spojitá v okolí a.

Zkoumejme podrobněji co se děje když $g(y) \xrightarrow[(y \to a\pm)]{} g(a)$ pro $y \to a^{\pm}$.



Víme, že $t = G(y(t)) + C$ kde G je prim. fce k $\frac{1}{g(y)}$ na $(a, a+\Delta)$ resp. $(a-\Delta, a)$.

Definujme $\boxed{t^{\pm} := \lim_{y \to a\pm} G(y(t)) + C_{\in \mathbb{R}}}$ a označme:

$y > a$ $\quad y^{+}(t) := G^{-1}(t-c)$

$y < a$ $\quad y^{-}(t) = G^{-1}(t-c)$

Z pohledu t^{+} a t^{-} mohou nastat 4 možnosti:

- $t^{+} \in \mathbb{R}$, $t^{-} \in \mathbb{R}$
- $t^{+} \in \mathbb{R}$, t^{-} nevlastní
- $t^{-} \in \mathbb{R}$, t^{+} -||-

} ⇒ lze nalepit řešení } již z jedné strany

- t^{+}, t^{-} nevlastní } ⇒ nelze nalepit

Uvažujme

$$y'(t^{\pm}) = \lim_{t \to t^{\pm}} y'(t) = \lim_{t \to t^{\pm}} g(y(t)) = \lim_{y \to a^{\pm}} g(y) = g(a) = 0$$

a tedy lze spojit s konstantním řešením $y(t) \equiv a$.

Dá se ukázat, že pro g lipschitzovskou v okolí bodu a $(g(a)=0)$, platí: t^{+} a t^{-} jsou nevlastní.

Příklad ① $y' = y^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $y \equiv 0$ řešení stacionární.

Pro $y > 0$ $(y<1)$ $\quad G(y) = -\int_y^1 \frac{ds}{s^n} \underset{n \neq 1}{=} \left[-\frac{s^{1-n}}{1-n}\right]_y^1 = \frac{-1}{1-n} + \frac{1}{(1-n)y^{n-1}} \xrightarrow[y \to 0+]{n \geq 2} -\infty,$

$$\underset{n=1}{=} -\left[\ln s\right]_y^1 = \ln y \xrightarrow[y \to 0+]{} -\infty.$$

② $y' = y^{2/3}$

Pro $y > 0$ $(y<1)$ $\quad G(y) = -\int_y^1 \frac{ds}{s^{2/3}} = -\left[3 s^{1/3}\right]_y^1 = -3 + y^{1/3} \xrightarrow[y \to 0+]{} 3 \in \mathbb{R}.$ □

EULEROVA (numerická, aproximativní, přibližná) METODA TEČEN

Cílem je přibližně vyřešit libovolnou úlohu

$$\boxed{\begin{array}{ll}(P) & \vec{y}' = \vec{f}(t,\vec{y}) \quad v\ [t_0,T] \\ & \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0\end{array}}$$

Rozdělme interval $[t_0,T]$ na N dílčí (intervalů) ne nutně stejné délky

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$$

a nechť

$$h_n := t_n - t_{n-1} \qquad n = 1,\dots,N$$

Předpokládejme, že pro $n=1,\dots,N$ známe přibližné řešení v čase t_{n-1}. Toto řešení označme $\vec{y}_{n-1}$ (očekáváme $\vec{y}_{n-1} \doteq \vec{y}(t_{n-1})$). Pro $n=1$ je tento předpoklad splněn: $\vec{y}_0 = \vec{y}_0$ (počáteční podmínka).

Rozviňme řešení $\vec{y}(t)$ v bodě t_n do Taylorova polynomu v bodě (t_{n-1}) tj.

$$\vec{y}(t_n) = \vec{y}(t_{n-1}) + \vec{y}'(t_{n-1})\underbrace{(t_n-t_{n-1})}_{h_n} + O((t_n-t_{n-1})^2)$$

$$\overset{(P)}{=} \vec{y}(t_{n-1}) + \vec{f}(t_{n-1},\vec{y}(t_{n-1}))\,h_n + \underline{O\Big(\underbrace{(t_n-t_{n-1})^2}_{h_n^2}\Big)}$$

Pro $h_n << 1$, lze "očekávat", že $O(h_n^2)$ bude velmi malé, ale mohu jej zanedbat. Tak

$$\vec{y}(t_n) \approx \vec{y}(t_{n-1}) + \vec{f}(t_{n-1},\vec{y}(t_{n-1}))\,h_n$$

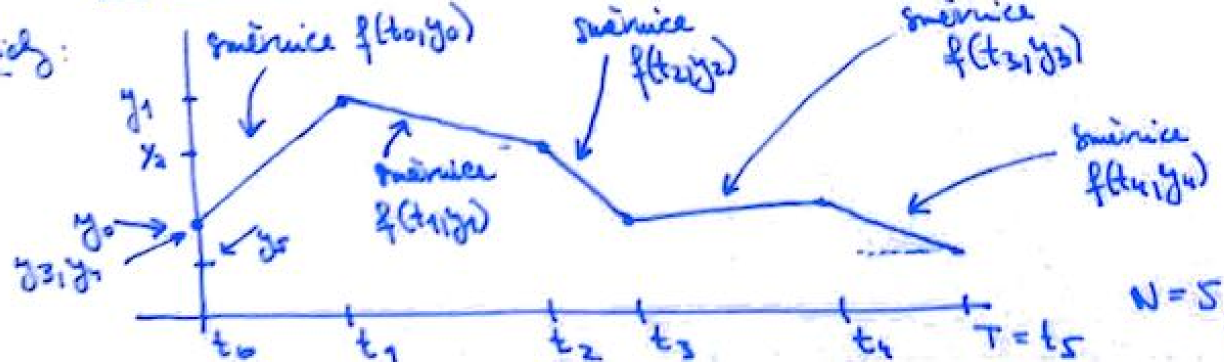
Dostávám tedy algoritmus:

EXPLICITNÍ EULER

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{y}_0 = \vec{y}_0 \ \text{(poč. podmínka)} \\ \vec{y}_n = \vec{y}_{n-1} + \vec{f}(t_{n-1},\vec{y}_{n-1})\,h_n\end{array}}$$

kde $\{y_n\}_{n=1}^N$ jsou přibližné hodnoty aproximující $\vec{y}(t_n)$.

Graficky:



Příklad ① Pomocí Eulerovy metody tečen určete přibližné řešení úlohy

$\boxed{y' = t\sqrt{y} \quad s \quad y(1) = 4}$

v bodech $t = 1.1, 1.2, 1.3, 1.4,$ a 1.5. Dělení volte ekvidistantní s délkou kroku $h = 0.1$.

$\boxed{\text{Řešení}}$

$$y_0 = 4$$

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)\overbrace{0{,}1}^{h} = 4 + 2\cdot(0{,}1) = 4.2$$

$$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)\,0.1 = 4.2 + (1{,}1)\sqrt{4{,}2}\;0{,}1 \doteq 4{,}42543$$

$$y_3 = \qquad \doteq 4{,}67787$$

$$y_4 = \qquad \doteq 4{,}95904$$

$$y_5 = \qquad \doteq 5.27081$$

zatímco přesná hodnota řešení v $t = 1{,}5$ je $\boxed{5.34766}$

② Pomocí Eulerovy metody tečen najděte přibližné řešení

$y' = y \;,\; y(0) = 1$ v bodě $x = 1$

tak, že budete dělit interval $\langle 0,1\rangle$ na $1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^k, \ldots$ dílků.

[Cíl: hledám stále lepší aproximaci čísla e.]

$\boxed{\text{Řešení}}$

$\boxed{k=1}$ $y_1 = 1 + 1\cdot 1 = 2 \doteq e$

$\boxed{k=2}$ $y_1 = 1 + 1\cdot(0{,}5) = 1{,}5$ $\qquad \underset{\substack{\doteq\\ e}}{y_2} = 1{,}5 + 1{,}5\cdot 0{,}5 = 2{,}25$

$\vdots$

$\boxed{k=4}$ $\qquad y_4 = 2{,}44141$

$\boxed{k=8}$ $\qquad y_8 = 2{,}56578$

$\boxed{k=16}$ $\qquad y_{16} = 2{,}63793$

$\vdots$

PŘESNÁ HODNOTA [$e = 2{,}71828\ldots$]

Další obecnou, ale technicky náročnou a "nepřehlednou" metodou pro řešení DR je metoda hledání řešení rozvojem do <u>mocninných řad</u>. Výhoda spočívá v její obecnosti, lze užít i na PDR, lze algoritmizovat. Nevýhoda spočívá, kromě pracnosti, v požadavku, aby koeficienty rovnice byly v okolí t_0 reálně analytické, tzn. existovalo okolí $(t_0-\Delta, t_0+\Delta)$, kde se koeficienty rovnice dají rozvinout do mocninné řady se středem v t_0, a poloměr Δ. Metoda těží z vlastností analytických funkcí, které jsou uzavřeny na sčítání, násobení, skládání, derivování.

<u>Obecné schéma</u>: Uvažujme lineární ODR 2. řádu

$$(*) \qquad Ly = a_2(t) y'' + a_1(t) y' + a_0(t) = 0 \qquad (\text{nebo } f(t))$$

a předpokládejme, že

$$(**) \begin{cases} a_i \text{ lze reprezentovat pomocí mocninných řad s poloměrem} \\ \text{konvergence } R \text{ a středem v } 0 \end{cases}$$

Pokud $a_2(t) \neq 0$ v $(-R,R)$ tak existují dvě lineárně nezávislá řešení (báze), která jsou navíc (reálně) analytická v $(-R,R)$. Označme tato řešení y_1, y_2. Pak obecné řešení $(*)$ je) lineární kombinací y_1, y_2.

dáno Buď y analytické řešení $(*)$. Hledejme jej tedy ve tvaru

$$(***) \qquad y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j t^j$$

Cílem je určit koeficienty $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$

Protože

$$(***)_1 \left\{ \begin{aligned} y'(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} j \alpha_j t^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \alpha_{j+1} t^j \\ \text{a} \quad y''(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1) \alpha_{j+2} t^j \end{aligned} \right. ,$$

tak rozvojem funkcí a_0, a_1, a_2 do mocninných řad a po dosazení těchto řad a řad $(***)$ a $(***)_1$ do $(*)$ upravíme na tvar

$$Ly(t) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j \, t^j = 0,$$

kde d_j jsou výrazy obsahující některé z) koeficientů $\alpha_k, k \in \mathbb{N}_0$
(neznámých

Požadavek

$$d_j = 0 \qquad j = 0, 1, \dots$$

dostaneme systém algebraických rovnic, které se snažíme vyřešit vzhledem k $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$. Příklady mohou situaci lépe ilustrovat.

Příklad 1 Uvažujme úlohu

(e) $\boxed{y' = y \quad \wedge \quad y(0) = 1}$

[Cíl: hledejme řešení pomocí mocninných řad.] Předpokládejme, že

$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j$. Pak $y'(t) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j t^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) a_{j+1} t^j$

Zároveň z počáteční podmínky plyne

$$\boxed{a_0 = 1}$$

Po dosazení mocninných řad do (e) dostaneme

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left((j+1) a_{j+1} - a_j \right) t^j = 0,$$

což dává

$$(j+1) a_{j+1} - a_j = 0 \qquad j = 0, 1, 2, \dots$$

tj.

$$\boxed{a_{j+1} = \frac{a_j}{j+1} = \dots = \frac{a_0}{(j+1)!} \qquad j = 0, 1, 2, \dots}$$

a tak

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \left(= e^t \right).$$

▨

Příklad 2 (Besselova rovnice) Nechť $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Uvažujme úlohu

(b) $$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$$

Cíl: nalézt obecné řešení metodou rozvoje do mocninných řad.

Řešení: Hledejme řešení ve tvaru $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Protože $y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \Rightarrow x y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k$

a $y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} \Rightarrow x^2 y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k$

tak z (b):

$$\boxed{-n^2 a_0 + a_1 (1 - n^2) x + \sum_{k=2}^{\infty} \left(k(k-1) a_k + k a_k - n^2 a_k + a_{k-2} \right) x^k = 0}$$

což dává

$$\boxed{n^2 a_0 = 0} \quad \boxed{(1-n^2)a_1 = 0} \quad \text{a} \quad \boxed{(k^2-n^2)\,a_k + a_{k-2} = 0} \quad \forall k \geq 2$$

Následuje diskuse v závislosti na $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

▶ $\boxed{n=0}$ $\Rightarrow$ $a_0 \in \mathbb{R}$ libovolné, $a_1 = 0$ a také $a_{2l+1} = 0$ $l \in \mathbb{N}$

a $$a_{2l} = -\frac{a_{2l-2}}{(2l)^2}$$

Tedy
$$\boxed{y(x) = a_0 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l}}$$

▶ $\boxed{n=1}$ $\Rightarrow$ $\underset{\Downarrow}{a_0 = 0}$, $\underset{\downarrow}{a_1 \in \mathbb{R}}$ libovolné

$\forall l \in \mathbb{N}$ $a_{2l} = 0$, $a_{2l+1} = -\frac{a_{2l-1}}{(2l+1)^2 - 1} = -\frac{a_{2l-1}}{4l(l+1)}$

Tedy
$$y(x) = 2a_1 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!\,(l+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+1}$$

▶ $\boxed{n \geq 2}$ $a_0 = 0, a_1 = 0, \dots, a_{n-1} = 0$, $a_n \in \mathbb{R}$ libovolné.

Pak $a_{n+2l-1} = 0$ a $a_{n+2l} = -\frac{a_{n+2l-2}}{(2l+n)^2 - l^2} = -\frac{a_{n+2l-2}}{4l(l+n)}$

Tedy
$$y(x) = n!\, 2^n a_n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!\,(l+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2l}$$

Normalizací $a_n = \frac{1}{n!\,2^n}$ (i pro $n = 0, 1, \dots$)

dostáváme
$$\boxed{y(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l!)(l+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2l}}$$

KANONICKÝ
TVAR
BESSELOVÝCH FUNKCÍ
1. DRUHU

$\boxed{7.4}$ LINEÁRNÍ DIFENCIÁLNÍ ROVNICE m-TÉHO ŘÁDU

Mějme $f, a_0, a_1, \dots, a_m \in C((a,b))$ a uvažujme rovnici

$$\boxed{(20) \quad a_m(x)y^{(m)} + a_{m-1}(x)y^{(m-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)}$$

Protože je diferenciální operátor

$$\underline{L} : C^k((a,b)) \longrightarrow C((a,b)),$$

definovaný předpisem

$$L(x)y = Ly := a_m(x)y^{(m)} + a_{m-1}(x)y^{(m-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y$$
$$= a_m(x)\frac{d^m y}{dx^m} + a_{m-1}(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y,$$

lineární, tak rovnice (20) je

> lineární ODR s pravou stranou f a koeficienty $a_0, \dots, a_m$ a to řádu m, pokud $\boxed{a_m(x) \neq 0 \text{ na } (a,b), \quad (21)}$
> což budeme nadále předpokládat.
> Je-li $f \equiv 0$, pak přidáváme k řeči (20) slovo homogenní.

Věta 7.4 (O globální existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy pro rovnici (20)). Nechť $f, a_0, \dots, a_m \in C((a,b))$ a $a_m \neq 0$ na (a,b). Pak pro každé $x_0 \in (a,b)$ a pro každou m-tici $(y_0, \dots, y_m)$ existuje právě jedno řešení $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ rovnice (20) splňující

$$(22) \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(m-1)}(x_0) = y_m \quad \longleftarrow \text{POČÁTEČNÍ PODMÍNKY}$$

Důkaz **KROK 1** Převedení $\boxed{(20) + (22)}$ na počáteční úlohu pro systém ODR 1. řádu.

Podělíme (20) fcí $a_m(x)$ a označme $u_1 := y, u_2 := y', \dots, u_m := y^{(m-1)}$.

Pak dostáváme

$$(23) \quad \boxed{\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= u_3 \\ &\vdots \\ u_{m-1}' &= u_m \\ u_m' &= -\frac{a_0(x)}{a_m(x)}u_1 - \frac{a_1(x)}{a_m(x)}u_2 - \dots - \frac{a_{m-1}(x)}{a_m(x)}u_m + \frac{f(x)}{a_m(x)} \end{aligned}} \quad \text{spolu s} \quad \boxed{\begin{aligned} u_1(x_0) &= y_0 \\ u_2(x_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ u_m(x_0) &= y_m \end{aligned}}$$

což lze psát v kompaktním tvaru pro $\vec{u} := (u_1, \dots, u_n)$:

(24) $\boxed{\vec{u}' = A(x)\vec{u} + \vec{f}(x) =: \vec{F}(x, \vec{u}) \qquad \text{spolu s} \quad \vec{u}(x_0) = (y_0, \dots, y_n)^T.}$

$\boxed{\text{KROK 2}}$ Lokální existence a jednoznačnost řešení (24) a tedy $\boxed{(20)+(22)}$

Protože $\vec{F}$ (definovaná v (24)) závisí na $\vec{u}$ lineárně, je fce $\vec{F}$ lipschitzovsky spojitá vzhledem k $\vec{u}$.

Dle Picard-Lindelöfovy věty 7.3 tak existují $\delta > 0$ a $\boxed{\vec{u} : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n}$ splňující (24), tj. platí

$$\vec{u}(x) = \vec{F}(x, \vec{u}(x)) \quad \text{pro} \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

a

$$\vec{u}(x_0) = (y_0, \dots, y_n)^T.$$

Navíc, toto $\vec{u}$ je jediné.

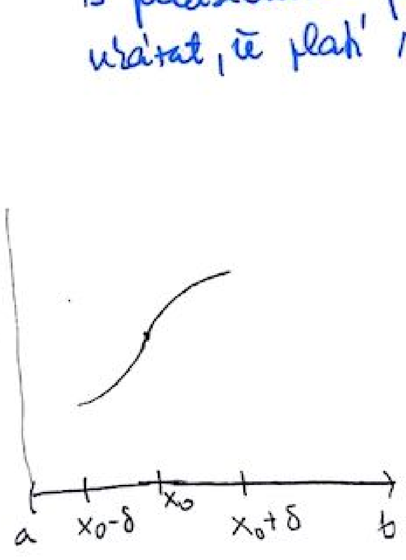
INTERMEZZO

Zbývá ukázat, že $\vec{u}$ lze jednoznačným způsobem rozšířit na (a,b). Budeme uvažovat jen rozšíření za $x_0 + \delta$ v případě když $x_0 + \delta < b$. [Rozšíření vlevo tj. před $x_0 - \delta$ se udělá analogicky (pokud $x_0 - \delta > a$).]

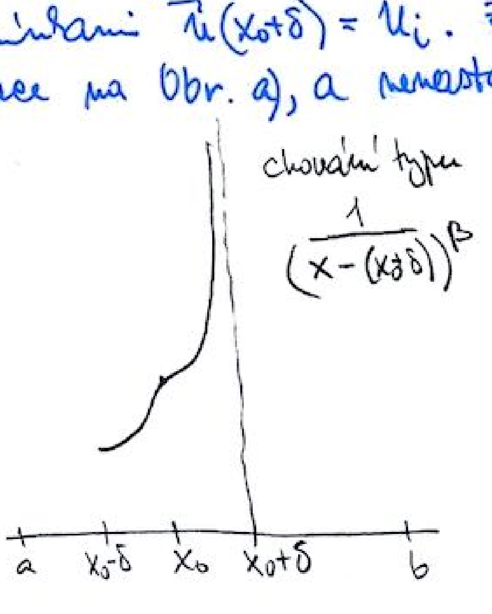
Víme, že řešení $\vec{u}$ je spojité a má spojité první derivace na $(x_0, x_0 + \delta)$. Stačí ukázat, že existuje $\lim_{x \to x_0 + \delta -} \vec{u}(x)$ a je konečná, tj.

(25) $\boxed{\exists \vec{U} \in \mathbb{R}^n \text{ tak, že } \lim_{x \to x_0 + \delta -} u_i(x) = U_i.}$

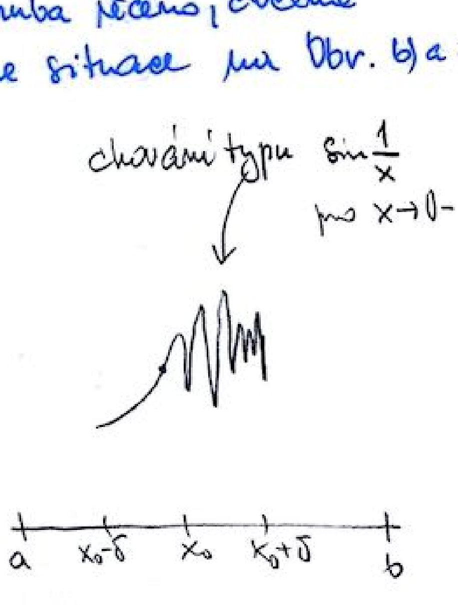
Jakmile (25) platí, lze opět využít Picard-Lindelöfovu větu 7.3 a sestrojit řešení začínající v $x_0 + \delta$, řešící $\vec{u}' = \vec{F}(x, \vec{u})$ s počátečními podmínkami $\vec{u}(x_0 + \delta) = U_i$. Zkrátka řečeno, chceme ukázat, že platí situace na Obr. a), a nenastane situace na Obr. b) a c).



ⓐ



ⓑ



ⓒ

$\boxed{\text{KROK 3}}$ Omezenost řešení $\vec{u}$ a jeho derivací na $\langle x_0, x_0+\delta)$

Připomeň: $\vec{u} = (u_1, \dots, u_m)$, $|\vec{u}|^2_{\mathbb{R}^m} := \sum_{i=1}^{m} u_i^2$.

Tak

$$\frac{d}{dx}|\vec{u}|^2_{\mathbb{R}^m} = 2\sum_{i=1}^{m} u_i u_i' \overset{(23)}{=} 2\sum_{i=1}^{m-1} u_i u_{i+1} - \left(2\sum_{j=0}^{m-1} \frac{a_j(x)}{a_n(x)} u_{j+1} u_m\right) + 2\frac{f(x)}{a_n(x)} u_m$$

(26)
$$\le \sum_{i=1}^{m-1} u_i^2 + u_{i+1}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \max_{[x_0, x_0+\delta]} \frac{|a_j(x)|}{|a_n(x)|}\left(u_{j+1}^2 + u_m^2\right) + \max_{x\in[x_0,x_0+\delta]} \frac{1}{|a_n(x)|}\left(\max_{x\in[x_0,x_0+\delta]} |f(x)|^2 + u_m^2\right)$$

$$\le C_1 |\vec{u}|^2_{\mathbb{R}^m} + C_2$$

kde $C_1, C_2 > 0$
(závisí na $n, x_0, x_0+\delta$)
VYUŽÍVÁME FAKT, ŽE $\boxed{x_0+\delta < b}$
a spojitost dat (koeficientů a
pravé strany na $[x_0, x_0+\delta]$.

Metodou á la integrační faktor:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-C_1(x-x_0)}|\vec{u}|^2_{\mathbb{R}^m}\right) = \left(\frac{d}{dx}|\vec{u}|^2_{\mathbb{R}^m} - C_1|\vec{u}|^2_{\mathbb{R}^m}\right)e^{-C_1(x-x_0)} \overset{(26)}{\le} C_2 e^{-C_1(x-x_0)} \le C_2.$$

Odtud, integrací od x_0 do x, kde $x \in (x_0, x_0+\delta]$, dostáváme:

(27)
$$\begin{cases} |\vec{u}(x)|^2_{\mathbb{R}^m} \le |\vec{u}(x_0)|_{\mathbb{R}^m} e^{C_1(x-x_0)} + C_2(x-x_0) \\ \qquad\qquad \le |(y_0, \dots, y_m)|_{\mathbb{R}^m} e^{C_1(b-x_0)} + C_2(b-x_0) =: M > 0 \end{cases}$$

Tedy $\vec{u} \in C(\langle x_0, x_0+\delta))$ a omezená na $\langle x_0, x_0+\delta)$. [Chování řešení načrtnuté na obr. ⓑ je vyloučeno.]

Navíc, z rovnice (24) plyne

$$|\vec{u}'(x)|_{\mathbb{R}^m} \le |A(x)\vec{u}(x)|_{\mathbb{R}^m} + |\vec{f}(x)|_{\mathbb{R}^m} \le \|A(x)\|\,|\vec{u}(x)|_{\mathbb{R}^m} + \frac{|f(x)|}{|a_n(x)|}$$

což implikuje, že pro $\forall x \in [x_0, x_0+\delta)$

$$|\vec{u}'(x)|_{\mathbb{R}^m} \overset{(27)}{\le} \tilde{M}.$$

↑
předpoklady na data.

Tedy*)
$$\sup_{x\in\langle x_0,x_0+\delta)} \left(|\vec{u}(x)|_{\mathbb{R}^m} + |\vec{u}'(x)|_{\mathbb{R}^m}\right) \le M + \tilde{M} < +\infty.$$

*) což $\sin\frac{1}{x}$ nesplňuje

KROK 4 Pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ existují $U_i \in \mathbb{R}$ tak, že

(28) $$\boxed{\lim_{x \to x_0+\delta-} u_i(x) = U_i}$$

Tedy (25) platí a důkaz bude hotov.

Mějme nějakou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $x_n \to x_0+\delta-$. Uvažujme $\{u_i(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Tato posloupnost je omezená, dle kroku 3, konstantou $\sqrt{M}$. Dle Weierstrassovy věty existuje vybraná podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}$ a $U_i \in \mathbb{R}$ tak, že $u_i(x_{n_k}) - U_i \to 0$ pro $k \to \infty$. ⊛

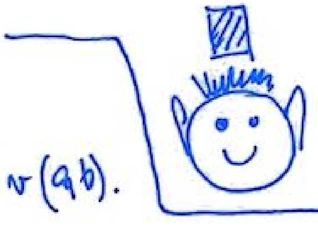
Pak však, pro $x \in \langle x_0, x_0+\delta)$,

$$\begin{aligned}
|u_i(x) - U_i| &\le |u_i(x) - u_i(x_{n_k})| + |u_i(x_{n_k}) - U_i| \\
&\overset{\text{LVOSH}}{=} |u_i'(\xi)|\,|x - x_{n_k}| + |u_i(x_{n_k}) - U_i| \\
&\overset{\text{KROK 3}}{\le} \tilde{M}\,|x - x_{n_k}| + |u_i(x_{n_k}) - U_i| \\
&\le \tilde{M}\big(|x - (x_0+\delta)| + |x_{n_k} - (x_0+\delta)|\big) + |u_i(x_{n_k}) - U_i|
\end{aligned}$$

a členy na pravé straně lze udělat libovolně malé pro k dostatečně velké a x blízké $x_0+\delta$. Tak (28) platí, a důkaz je hotov. Definujme-li totiž

$$b_* := \sup_{z \in \mathcal{M}}, \text{ kde } \mathcal{M} := \{[x_0, z) \subset \langle a, b);\ (24) \text{ má řešení na } [x_0, z)\}$$

Víme, že $\mathcal{M} \neq \emptyset$ a $b_* \in (x_0, b)$. Pokud $b_* = b$ jsme hotovi. Pokud $b_* < b$, pak dostaneme spor pomocí argumentace v kroku 3 a 4.



Důsledek A Úloha $Ly = 0$ s počátečními podmínkami $y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$ má jediné řešení $y \equiv 0$ v (a,b). Zde Ly označuje levou stranu rovnice (20).

Důsledek B U lineárních rovnic (1., 2., …, n-tého řádu) s koeficienty závislými spojitě na x na (a,b) nemůže nastat "větvení".

VLASTNOSTI ŘEŠENÍ HOMOGENNÍ RCE $Ly=0$

Věta 7.5 Množina $\{y\in C((a,b));\ Ly=0\}$ tvoří <u>n-dimenzionální</u> podprostor $C^n((a,b))$. Báze se nazývá <u>FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM</u>.

Dk • Je-li $y\in C((a,b))$ a řeší $Ly=0$, pak např. z přepisu na systém ODR 1. řádu vidíme, že $y\in C^n((a,b))$. Skutečnost, že $K:=\{y\in C^n((a,b));\ Ly=0\}$ je uzavřená na součet a násobení skalárem je snadné ověřit. Proveďte.

- <u>Ukážeme, že</u> $\dim K = n$.

▶ Buď $w_1,\dots,w_n$ <u>definovány jako řešení počátečních</u> úloh

(✿)
$$\boxed{\begin{aligned} &Lw_i = 0 \ \text{v}\ (a,b)\\ &w_i^{(j-1)}(x_0)=\delta_{ij} \qquad \text{pro } j=1,2,\dots,n\end{aligned}}$$

neboli
$\boxed{w_1}$ $Lw_1=0$ v (a,b) $\quad w_1(x_0)=1,\ w_1'(x_0)=0,\ \dots,\ w^{(n-1)}(x_0)=0$

$\boxed{w_2}$ $Lw_2=0$ v (a,b) $\quad w_2(x_0)=0,\ w_2'(x_0)=1,\ \dots,\ w^{(n-1)}(x_0)=0$

$\vdots$

$\boxed{w_n}$ $Lw_n=0$ v (a,b) $\quad w_n(x_0)=0,\ w_n'(x_0)=0,\ \dots,\ w^{(n-1)}(x_0)=1.$

Tvrdíme, že $\{w_1,\dots,w_n\}$ jsou lineárně nezávislé (LN). Je-li totiž $\boxed{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i w_i(x)=0}$ v (a,b), pak dosazením x_0 dostanu $\lambda_1=0$

zderivováním $\downarrow$ v (a,b), a dosazením x_0 — " — $\lambda_2=0$,

atd.

Tedy $\dim K \geq n$.

▶ Je-li <u>y libovolné řešení $Ly=0$</u>, tj. $y\in K$, pak položíme $\lambda_j = y^{(j-1)}(x_0)$. Tvrdíme, že pak $y(x)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j w_j(x)$, kde w_j jsou zavedeny v (✿). Definujme

$$z^{(x)} := y^{(x)} - \sum_{j=1}^{n}\lambda_j w_j^{(x)}.$$

Pak • $z(x_0)=z'(x_0)=\dots=z^{(n-1)}(x_0)=0$

• $Lz=0$ v (a,b)

a máme

a dle Důsledku A Věty 4.4

$z\equiv 0$, což implikuje

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j w_j(x) \quad \forall x\in(a,b).$$

Tedy $\dim K = n$. ▨

Pro ověření lineární nezávislosti řešení $Ly=0$ je užitečný pojem Wronskiánu.

Definice (WRONSKIÁN) Mějme n funkcí $u_1,\dots,u_n \in C^{(n-1)}((a,b))$. Pak Wronskián těchto funkcí v bodě $x_0 \in (a,b)$ definujeme:

$$W_{[u_1,\dots,u_n]}(x_0) := \det \begin{pmatrix} u_1(x_0) & u_2(x_0) & \cdots & u_n(x_0) \\ u_1'(x_0) & u_2'(x_0) & \cdots & u_n'(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x_0) & u_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} =: \underset{\substack{\uparrow \\ \text{jiné pomocné} \\ \text{značení}}}{\det \mathbb{V}(x_0)}$$

Věta 7.6 Jsou-li $u_1,\dots,u_n$ lineárně závislé, pak $W_{[u_1,\dots,u_n]}(x)=0$ pro všechna $x \in (a,b)$.

Dk Z předpokladu plyne, že existuje netriviální kombinace $u_1,\dots,u_n$, která je nulová, tzn.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x) = 0 \quad \text{v } (a,b) \quad \text{a} \quad \lambda_i \text{ nejsou všechna nulová.}$$

Postupným derivováním

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i^{(k)}(x) = 0 \quad \text{v } (a,b) \qquad \text{pro } k = 0,1,\dots,n-1$$

což implikuje $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{V}_i(x) = 0$ v (a,b) kde $\vec{V}_i(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_1'(x) \\ \\ u_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$

Tedy sloupce matice $\mathbb{V}(x)$ jsou lineárně závislé, což implikuje $\det \mathbb{V}(x) = W_{[u_1,\dots,u_n]}(x) = 0$. ∎

- Obecně neplatí tvrzení: Jsou-li $u_1^{(x)},\dots,u_n^{(x)}$ lineárně nezávislé v (a,b), pak $W_{[u_1,\dots,u_n]}(x) \neq 0$ pro $x \in (a,b)$.

Skutečně: buď $I = \mathbb{R}$ a

$$u_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{v } (-\infty,0) \\ t^2 & \text{v } \langle 0,+\infty) \end{cases} \qquad u_2(x) = \begin{cases} t^2 & \text{v } (-\infty,0) \\ 0 & \text{v } \langle 0,+\infty) \end{cases}$$

pak $\lambda_1 u_1(t) + \lambda_2 u_2(t) = 0$ pro $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$,

ale
$$W_{[u_1,u_2]}(t) = \begin{cases} \det \begin{pmatrix} 0 & t^2 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} = 0 & \text{v } (-\infty,0) \\ \det \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 2t & 0 \end{pmatrix} = 0 & \text{v } \langle 0,+\infty). \end{cases}$$

- Pokud však $u_1,\dots,u_m$ řeší $Ly=0$, pak již platí, že:
" lineární nezávislost $\{u_1,\dots,u_m\} \Rightarrow W_{[u_1,\dots,u_m]} \neq 0$ "

Přesněji, platí následující věta.

Věta 7.7 Nechť $\{u_1,\dots,u_m\}$ řeší $L(y)=0$. $L=L(x)$

Pak

(30) $$W'_{[u_1,\dots,u_m]}(x) = -\frac{a_{m-1}(x)}{a_m(x)} W_{[u_1,\dots,u_m]}(x)$$

což je ekvivalentní s

(31) $$W_{[u_1,\dots,u_m]}(x) = W_{[u_1,\dots,u_m]}(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{m-1}(s)}{a_m(s)}\, ds}.$$

Odsud plyne, že může nastat jen jedna z dvou možností:

(α) $\forall x \in (a,b): \quad W_{[u_1,\dots,u_m]}(x) = 0$

(β) $\forall x \in (a,b): \quad W_{[u_1,\dots,u_m]}(x) \neq 0.$

Navíc,

(#) $\{u_1,\dots,u_m\}$ jsou lin. nezávislý systém na (a,b) $\iff$ $\exists\, x_0 \in (a,b)$ tak, že $W_{[u_1,\dots,u_m]}(x_0) \neq 0$.

Dk **Ad (30)** Tvrzení plyne z vlastností determinantu, což je součet vhodných součinů. Tak

$$W'_{[u_1,\dots,u_m]}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \\ u_1^{(k+1)} & u_2^{(k+1)} & \dots & u_m^{(k+1)} \\ u_1^{(k+1)} & u_2^{(k+1)} & \dots & u_m^{(k+1)} \\ u_1^{(m-1)} & u_2^{(m-1)} & \dots & u_m^{(m-1)} \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{OPAKUJÍ} \\ \text{SE ŘÁDKY} \\ \text{VYJMA POSLEDNÍHO}}}{=} \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \\ u_1' & u_2' & \dots & u_m' \\ u_1^{(m-2)} & u_2^{(m-2)} & \dots & u_m^{(m-2)} \\ u_1^{(m)} & u_2^{(m)} & & u_m^{m} \end{pmatrix}$$

užiji rovnici (ODR)

$$y_i^{(m)} = -\sum_{j=0}^{m-1} \frac{a_j(x)}{a_m(x)} y_i^{(j)} \quad \overset{\downarrow}{=} \quad -\frac{a_{m-1}(x)}{a_m(x)} \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \\ u_1' & u_2' & \dots & u_m' \\ u_1^{(m-2)} & u_2^{(m-2)} & & u_m^{(m-2)} \\ u_1^{(m-1)} & u_2^{(m-1)} & & u_m^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{a_{m-1}(x)}{a_m(x)} W_{[u_1,\dots,u_m]}(x),$$

což je ODR 1. řádu typu $y' + \frac{a_{m-1}(x)}{a_m(x)} y = 0$, kterou umíme řešit. Tedy platí nejen (30), ale také $\boxed{(31), (\alpha), (\beta).}$ zbývá ověřit ekvivalenci (#).

$\boxed{\text{Ad} (‡)}$ (‡) je ekvivalentní:

(•) $\{u_1,\dots,u_m\}$ jsou lineárně závislé $\Leftrightarrow$ $\forall x_0\in(a,b)$ $W_{[u_1,\dots,u_m]}(x_0)=0$

Dokažme tedy (•).

$\boxed{\Rightarrow}$ plyne z Věty 7.6

$\boxed{\Leftarrow}$ Z předpokladu plyne, že sloupce matice W (viz definice Wronskiánu) jsou lineárně závislé. Vezměme $x_0\in(a,b)$ lib., pevné. Pak existují $\lambda_j\in\mathbb{R}$, $j=1,\dots,m$ (ne všechna λ_j jsou nulová) tak, že

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j u_j^{(k)}(x_0)=0 \qquad \text{pro všechna } k=0,1,\dots,m-1$$

Pak $u(x):=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j u_j(x)$ splňuje $\boxed{Lu=0}$ (neb $Lu_j=0$ dle předpokladu)

a $\boxed{u(x_0)=u'(x_0)=\dots=u^{(m-1)}(x_0)=0}$. Dle Důsledku A Věty 7.4 $u\equiv 0$. ▨

VLASTNOSTI ŘEŠENÍ NEHOMOGENNÍ ROVNICE $Ly=f$

dim V < +∞.

Z lineární algebry víme, že pro lineární operátor $L: V\to V$ mohou nastat dvě varianty řešení rovnice $Lx=a$:

Buď • řešení neexistují

Nebo • $x\in W_\alpha=\{\alpha+W\}$, kde $L\alpha=a$ a $W=\operatorname{Ker}L$ }

jedno speciální řeš. prostor všech řeš. $\triangleright$ $a=0$

VIZ TVRZENÍ 10, str. 22 D. ŠTIIO: LAF

Řešíme rovnici $\boxed{L(t)y=f}$, o které víme, dle Věty 7.4, že řešení na (a,b) má (a je jediné pokud specifikujeme poč. podmínky). Z lineární algebry tedy víme, že obecné řešení $L(t)y=f$ má tvar:

$$\boxed{y^f_{obec}(x)=y^f_{part}(x)+y_{ob,hom}(x)}$$

Následující věta nám dává návod jak najít y^f_{part}.

$\boxed{\text{Věta 7.8}}$ $\boxed{\text{Variace konstant}}$ Buď $\{u_i\}_{i=1}^{m}$ báze prostoru $\{y\in C(a,b); Ly=0\}$. [fundamentální systém]

Nechť $c_i:(a,b)\to\mathbb{R}$, $i=1,2,\dots,m$ jsou takové, že c_i' řeší

$$(♡)\quad\left\{\begin{aligned} c_1'(x)u_1(x)+\dots &+c_m'(x)u_m(x)=0\\ c_1'(x)u_1'(x)+\dots &+c_m'(x)u_m'(x)=0\\ &\ \vdots\\ c_1'(x)u_1^{(m-1)}(x)+\dots &+c_m'(x)u_m^{(m-1)}(x)=\frac{f(x)}{a_m(x)}\end{aligned}\right.$$

Pak $y^f_{part}(x):=\sum_{i=1}^{m}c_i(x)\ {}_i(x)$ řeší $L(t)y=f$.

(Dk) Dosadím y^f_{part} do rovnice a užiji (♡). ▨

Otázkou zůstává jak nalézt $c_i'(x)$ resp. $c_i(x)$. Pozorujme, že

$$(\heartsuit) \iff \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_m' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(m-1)} & u_2^{(m-1)} & \cdots & u_m^{(m-1)} \end{pmatrix}}_{W} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{f}{a_m} \end{pmatrix}$$

Vidíme, že $\det W = W_{[u_1,\dots,u_m]}$, který bude nenulový vždy pokud $\{u_1,\dots,u_m\}$ jsou lineárně nezávislé. Tedy dle Cramerova pravidla

$$c_i'(x) = \frac{W_i(x)}{W_{[u_1,\dots,u_m]}(x)} \quad \text{kde } W_i = \det \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_{i-1} & 0 & u_{i+1} & \cdots & u_m \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(m-1)} & \cdots & u_i^{(m-1)} & \frac{f}{a_m} & u_{i+1}^{(m-1)} & \cdots & u_m^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{i+m} \frac{f}{a_m} \det \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 & u_{i-1} & u_{i+1} & u_m \\ \vdots & & & \\ u_1^{(m-2)} & u_{i-1}^{(m-2)} & u_{i+1}^{(m-2)} & u_m^{(m-2)} \end{pmatrix}}_{\text{matice } (m-1)\times(m-1)}.$$

Tak

$$y^f_{part}(x) = \sum_{i=1}^m c_i(x) u_i(x), \text{ kde}$$

$$c_i(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f(s)}{a_m(s)} \frac{(-1)^{i+m}}{W_{[u_1,\dots,u_m]}}(s) \det \begin{pmatrix} u_1(s) & \cdots & u_{i-1}(s) & u_{i+1}(s) & \cdots & u_m(s) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(m-2)}(s) & \cdots & u_i^{(m-2)}(s) & u_{i+1}^{(m-2)}(s) & \cdots & u_m^{(m-2)}(s) \end{pmatrix} ds$$

neboli

$$\boxed{y^f_{part}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f(s)}{a_m(s)} \frac{1}{W_{[u_1,\dots,u_m]}(s)} \det \begin{pmatrix} u_1(s) & \cdots & u_m(s) \\ & & \\ u_1^{(m-2)}(s) & \cdots & u_m^{(m-2)}(s) \\ u_1(x) & \cdots & u_m(x) \end{pmatrix} ds}$$

Tento vzoreček má význam spíše symbolický – lze napsat formulku, ale z pohledu další analýzy či využití při řešení příkladů je jeho role spíše okrajová.

AŽ DOPOSUD JSME V TÉTO SEKCI 7.4 ZKOUMALI LINEÁRNÍ ODR m-tého ŘÁDU S KOEFICIENTY a_k ZÁVISLÝMI NA X. TEORIE JE ÚPLNÁ, ALE NENÍ METODA, JAK OBECNĚ (lze pro Eulerovy rovnice) NALÉZT BÁZI (FUND. SYSTÉM) $L(x)y=0$. VÍCE NA CVIČENÍ. PROTO SE DÁLE OMEZÍME NA a_k KONSTANTNÍ.

LINEÁRNÍ ROVNICE n-TÉHO ŘÁDU S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

Pro $a_n=1$, $a_0,a_1,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{R}$ se rovnice (20) redukuje na

$$(30)\quad \boxed{y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=f(x).}$$

Hledáme-li řešení homogenní rovnice ve tvaru $y(x)=e^{\lambda x}$, dostaneme charakteristickou rovnici

$$(31)\quad \lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_1\lambda+a_0\lambda=0.$$

Věta 7.9 (n-různých kořenů (31)) Má-li (31) n-různých kořenů $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{C}$, pak $\{e^{\lambda_1x},\dots,e^{\lambda_nx}\}$ tvoří bázi (fund. systém) rovnice $Ly=0$.

Dk • Víme, že $e^{\lambda_i x}$ řeší $Ly=0$.

• Zbývá ukázat, že $\{e^{\lambda_1x},\dots,e^{\lambda_nx}\}$ jsou lineárně nezávislé.

Avšak

$$W_{[e^{\lambda_1x},\dots,e^{\lambda_nx}]}(x)=\det\begin{pmatrix} e^{\lambda_1x} & & e^{\lambda_nx}\\ \lambda_1e^{\lambda_1x} & \dots & \lambda_ne^{\lambda_nx}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1x} & & \lambda_n^{n-1}e^{\lambda_nx}\end{pmatrix}$$

$$=e^{(\lambda_1+\dots+\lambda_n)x}\det\begin{pmatrix}1 & & 1\\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & & \lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

$$=e^{(\lambda_1+\dots+\lambda_n)x}\prod_{\substack{i<j\\ i,j=1}}^{n}(\lambda_i-\lambda_j)\neq 0$$

▨

Alternativně: stačí ukázat, že Wronskián je nenulový jen v jednom bodě např. $x=0$. Opět vede na

Věta 7.10 Je-li λ kořen násobnosti k (31), pak $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x},\dots,x^{k-1}e^{\lambda x}$ řeší $Ly=0$.

Dk [1] Je-li $\lambda=0$ kořen násobnosti k, pak $a_0=\dots=a_{k-1}=0$ a tedy triviálně $1,x,\dots,x^{k-1}$ řeší $Ly=0$.

[2] Je-li $\lambda\neq0$, hledejme $y(x)$ ve tvaru $y(x)=z(x)e^{\lambda x}$, z libovolná.

Máme

(*) $\underline{L(y(x)) = L\left(z(x)e^{\lambda x}\right) = e^{\lambda x} M(z(x))}$, kde M je diferenciální operátor n-tého řádu

Buď P charakteristický polynom L
a Q —||— M. Tzn. $M(e^{\mu x}) = Q(\mu)e^{\mu x}$
$L(e^{\lambda x}) = P(\lambda)e^{\lambda x}$.

Odsud

$$Q(\mu) = \frac{M(e^{\mu x})}{e^{\mu x}} \overset{(*)}{=} \frac{L(e^{(\mu+\lambda)x})}{e^{(\mu+\lambda)x}} = P(\lambda+\mu)$$

Tedy, je-li λ kořen $P(\lambda)=0$ násobnosti k, je $\mu=0$ kořen $Q(\mu)=0$ násobnosti k. Dle [1]: $1, x, \dots, x^{k-1}$ řeší $M(z(x))=0$ a tak $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}$ řeší, dle (*), $Ly=0$.

☒

Stále však nevíme, že $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}\}$ spolu s podobnými řešeními pro jiná (odlišná) vlastní čísla tvoří fundamentální systém. K tomuto cíli nejdříve zformulujeme pomocné tvrzení.

<u>Tvrzení</u> Buď $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ navzájem různá čísla a nechť $P_1, \dots, P_m$ jsou polynomy (nad $\mathbb{C}$). Pak platí:

Je-li $\sum_{i=1}^{m} P_i(x)e^{\lambda_i x} = 0$ pro $\forall x \in (a,b)$, pak $P_i \equiv 0$ na (a,b) pro $i = 1, \dots, m$.

(Dk) [Indukcí] (m=1) $P_1(x)e^{\lambda_1 x} = 0$ pro $\forall x \in (a,b) \Rightarrow P_1(x) = 0$ všude v (a,b).

∞-podmínek na konečný počet koeficientů

(m=2) $\boxed{P_2(x) = -P_1(x)e^{\overbrace{(\lambda_1-\lambda_2)}^{\neq 0}x} \quad (■)}$

Je-li P_2 polynom stupně k, pak $(k+1)$-krát derivováním vztahu (■), dostaneme

$$0 = Q(x)e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} \quad \forall x \in (a,b),$$

což dává $Q \equiv 0$ v (a,b) a to implikuje $P_1 \equiv 0$ v (a,b) a z (■) $P_2 \equiv 0$.

(m obecné) $\boxed{P_m(x) = -\sum_{j=1}^{m-1} P_j(x)e^{(\lambda_j-\lambda_m)x}}$ (■■) kde P_m je stupně k

Opět $(k+1)$-krát derivuji a dostaneme:

$$0 = \sum_{j=1}^{m-1} Q_j(x) e^{(\lambda_j-\lambda_m)x},$$

což, dle indukčního předpokladu implikuje $Q_j \equiv 0$ v (a,b), a tedy $P_j \equiv 0$ v (a,b) pro $j=1,\dots,m-1$ a A([illegible]) $P_m \equiv 0$ v (a,b). ▨

Věta 7.11 (Fundamentální systém v obecném případě). Jsou-li $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ navzájem různé kořeny charakteristické rovnice $P(\lambda)=0$,

VŠECHNY

pak

$$F := \{e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{\nu_1-1}e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, \dots, x^{\nu_2-1}e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_m x}, xe^{\lambda_m x}, \dots, x^{\nu_m-1}e^{\lambda_m x}\}$$

tvoří bázi (fundamentální systém) rovnice $Ly=0$.

Dk
- Víme, že prvky F řeší $Ly=0$
- Dále F obsahuje právě n různých funkcí (n je stupeň polynomu P)
- Ověřme, že F jsou lin. nezávislá.
  Nechť $\sum_{i=1}^{n} c_i \underset{\in F}{y_i}(x) = 0$. Pak $0=\sum_{j=1}^{m} P_j(x)e^{\lambda_j x}$ a dle předchozího tvrzení $P_j \equiv 0$ v (a,b), což implikuje $c_i=0$. ▨

- Diskuse o komplexních kořenech $\lambda, \bar\lambda$ a vytvoření reálného fundamentálního systému zůstává beze změny.
- Také pravidla/principy pro hledání partikulárního řešení je-li f ve speciálním tvaru

$$f(x) = P(x)e^{\mu x}$$

nebo

$$f(x) = \tilde{P}(x)(\cos\mu x)e^{\alpha x}$$

nebo

$$f(x) = \tilde{\tilde{P}}(x)(\sin\mu x)e^{\alpha x}$$

- Do dalších částí se s sebou neseme dluh nedokázaných dvou vět: Peanovy a Picard-Lindelöfovy.

§6 ČÍSELNÉ ŘADY

Sčítání nekonečně mnoha čísel vzbuzovalo pozornost od starověku. Vzpomeňme si například na Zenonův paradox o Achilovi a želvě.

Nekonečně mnoho čísel si budeme popisovat posloupností, tedy zobrazením z množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny čísel reálných či komplexních. Buď tedy $\boxed{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ posloupnost}}$, kde $a_n \in \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Záměrem je vybudovat matematické základy pro nekonečné součty

$$(1) \qquad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots\dots + a_k + \dots\dots \dots$$

Cílem bude nejen určit výsledek (1), ale také se naučit s těmito nekonečnými součty pracovat, aniž bychom znali přesný součet (1). Zápis (1) budeme zkráceně zapisovat

$$(1*) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

a budeme jej nazývat **řadou** (angl. *series*)

Definice Buď $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ daná posloupnost reálných či komplexních čísel. Pak

$$(2) \qquad \boxed{s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

nazveme **n-tý částečný součet** posloupnosti $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, a posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme **posloupnost n-tých částečných součtů**.

Na základě limitního chování $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ stanovíme chování řady (1*):

Definice Řekneme, že **řada** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je

- **KONVERGENTNÍ**, pokud existuje $\lim_{n\to\infty} s_n =: s \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$)
  tzn. vlastní limita
- **DIVERGENTNÍ**, pokud $\lim_{n\to\infty} s_n$ existuje a je buď $\underbrace{+\infty, -\infty}_{\in \mathbb{R}^*}$ nebo $\infty \in \mathbb{C}^*$.
- **OSCILUJÍCÍ**, pokud $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje.
  tzn. nevlastní limita

Definice (Součet řady). Pokud $s := \lim_{n\to\infty} s_n$ existuje a je vlastní či nevlastní, pak s nazveme "součet řady (1*)" a píšeme $s := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

{Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ má tak dvojí význam: označuje jednak danou řadu, tak její součet (pokud existuje)}

Pozorování Je-li $\boxed{a_n \in \mathbb{C}}$, $n \in \mathbb{N}$, pak $\boxed{a_n = \alpha_n + i\beta_n}$, kde $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$.

Tedy
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + i \sum_{k=1}^{n} \beta_k .$$
Odsud pak snadno plyne:

- řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje $\Longleftrightarrow$ řady $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ konvergují
- platí $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k .$$

Příklady ① Geometrická řada Nechť $q \in \mathbb{C}$. Z identity
$$(1+q+\dots+q^n)(1-q) = 1-q^{n+1}$$
plyne pro $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$: $$s_n = \begin{cases} n+1 & \text{je-li } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{je-li } q \neq 1 \end{cases}$$

Je-li $|q| < 1$, pak $s_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-q}$ a řada $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ konverguje.
Pro ostatní q, geometrická řada buď diverguje nebo osciluje.

② Teleskopické řady jsou řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, kde a_k lze psát ve tvaru $\boxed{a_k = b_{k+1} - b_k}$. Pak platí
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = b_{n+1} - b_1$$
a pozorujeme, že platí (dokažte si sami):

- [Teleskopická řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje $\Longleftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) existuje.]

Speciálně vyšetřeme, zda $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konverguje a jaký je její součet.

Řešení: Platí: $a_k := \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ a řada je tedy teleskopická s $b_k = -\frac{1}{k}$. Tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} - b_1 = 1$. Tak $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1}$

$\to a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{6}, a_3 = \frac{1}{12}, a_4 = \frac{1}{20}, \dots$

③ **Harmonická řada:** $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty}$ Harmonická řada diverguje

Řešení Pro $s_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ platí: $1 = s_1 < s_2 < \dots < s_n$.

Tedy $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a $\lim_{n\to\infty} s_n$ existuje a platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{2^n}$$

Avšak

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}$$

$$= (n+2)\frac{1}{2} \to \infty$$

Tedy: $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty}$.

④ **Řada** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ nekonverguje, neboť posloupnost částečných součtů splňuje

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \text{ liché} \\ 0 & \text{pro } n \text{ sudé} \end{cases}$$

Tedy $\limsup_{n\to\infty} s_n = 1 \neq 0 = \liminf_{n\to\infty} s_n$.

Připomeňte si charakterizaci konvergence posloupnosti pomocí B-C podmínky a pomocí limsup a liminf

Řada je zajímavá i z následujícího pohledu.

- $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = 1-1+1-1+\dots$ má částečné součty $1, 0, 1, 0, \dots$
- řada $(1-1)+(1-1)+\dots$ má —||— $0, 0, 0, 0, \dots$
- řada $1+(-1+1)+(-1+1)+\dots$ má —||— $1, 1, 1, 1, \dots$

Výsledek závisí na uzávorkování.

Poznámka (o uzávorkování) Je-li $1 \le m_1 < m_2 < \dots < \dots$

a definujeme-li $b_1 = a_1 + \dots + a_{m_1}$, $b_2 = a_{m_1+1} + \dots + a_{m_2}$,
$b_3 = a_{m_2+1} + \dots + a_{m_3}$, ..., $b_k = a_{m_{k-1}+1} + \dots + a_{m_k}$, ...

pak řadu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ nazveme uzávorkováním řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Částečné součty $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ tvoří podposloupnost částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Pokud tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, konverguje i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, a to ke stejnému součtu. Jak ukazuje předchozí příklad, pokud řada $\sum a_k$ nekonverguje, uzávorkování mohou dávat různé výsledky.

Poznámka • Pro $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, symbol $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$ znamená $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$, kde $a_m := b_{m+p-1}$.

- Vynechání, přidání, záměna konečně prvků v posloupnosti, má vliv na součet řady, ale nikoliv na to zda řada konverguje/diverguje.

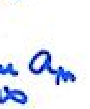
Následující věta je prvním kritériem, kterým bychom měli vždy otestovat danou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Pokud totiž $\lim_{n \to \infty} a_n$ nebude existovat nebo bude nenulová, pak dle této věty řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje.

Věta 6.1 (NUTNÁ PODMÍNKA KONVERGENCE ŘAD)

Pokud $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, pak $\boxed{\lim_{k \to +\infty} a_k = 0}$

Dk Z předpokladu plyne, že $\lim_{k \to \infty} s_k = s \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) existuje.

Protože
$$\lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k \to \infty} s_k - \lim_{k \to \infty} s_{k-1} = s - s = 0.$$



Příklad ⑤ Řada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ nekonverguje, neboť $\lim_{n \to \infty} \underbrace{(-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\alpha_n}$ neexistuje $\left(\overline{\lim_{n \to \infty}}\, \alpha_n = 1 \neq -1 = \underline{\lim_{n \to \infty}}\, \alpha_n \right)$. ▨

Pro počítání je důležitá i následující věta o aritmetice řad, které také implikuje, že prostory

- $\check{R} := \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} ; \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje$\}$
- $\ell_1 := \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} ; \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje$\}$

jsou vektorové prostory.

Věta 6.2 (Aritmetika limit) Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A \in \mathbb{R}^*$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B \in \mathbb{R}^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha A + \beta B$ kdykoliv pravá strana má smysl.

Dk: plyne z věty o aritmetice limit neboť

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha a_k + \beta b_k\right) = \lim_{n\to\infty}\left\{\alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k\right\}$$

$$= \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} a_k + \beta \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} b_k = \alpha A + \beta B. \quad \boxtimes$$

6.1 ŘADY S NEZÁPORNÝMI ČLENY

V celé této kapitolce budeme studovat řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n \in \mathbb{R}_0^+$ (tj. $a_n \geq 0$). Protože pak je vždy posloupnost částečných součtů neklesající, tak [$\lim_{n\to\infty} s_n$ vždy existuje]*) a pak buď řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje nebo diverguje (je-li součet $+\infty$). Připomeňme si příklady řad s nezápornými členy, které jsme již vyšetřili:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ pro $q \in \langle 0, 1)$, speciálně $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.

---

*) Také platí $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$.

Věta 6.3 (Srovnávací a podílové srovnávací kritérium)

Nechť platí jeden z předpokladů:

(3) $\boxed{0 \le a_k \le b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}}$ (stačí $\forall k \ge k_0$)

(4) $a_k > 0, b_k > 0$ a $\boxed{\frac{a_{k+1}}{a_k} \le \frac{b_{k+1}}{b_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}}$ (opět stačí $k \ge k_0$)

Pak platí:

(i) Pokud $\sum_1^\infty a_k$ diverguje, tak $\sum_{k=1}^\infty b_k$ diverguje.

(ii) Pokud $\sum_1^\infty b_k$ konverguje, tak $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konverguje.

(Dk) **Předp. (3)** Protože $0 \le \sum_{k=1}^m a_k \le \sum_{k=1}^m b_k$, je i $\sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_1^m a_k \le \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^m b_k$.

Je-li v poslední nerovnosti pravá strana konečná, je i levá strana konečná a (ii) platí. Naopak, je-li levá strana $+\infty$, je i pravá strana $+\infty$, a (i) platí.

Předpokládejme nyní (4) Z (4) plyne:

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} a_1 \le \frac{b_k}{b_{k-1}} \frac{b_{k-1}}{b_{k-2}} \cdots \frac{b_2}{b_1} a_1 = \frac{a_1}{b_1} b_k$$

a použijeme již dokázaný výsledek pro $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ a $\{\frac{a_1}{b_1} b_k\}_{k=1}^\infty$. ▨

Příklady ⑥ Buď $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, kde $\alpha \in (0,1)$. Pak $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} = \infty$ neboť pro $\alpha \in (0,1)$ je $n^\alpha \le n \iff \frac{1}{n} \le \frac{1}{n^\alpha}$ a víme z Příkladu ③, že $\sum \frac{1}{n} = \infty$.

⑦ Pro $a_n = \frac{1}{n^2}$ naopak platí $\frac{1}{n \cdot n} \le \frac{1}{n(n-1)}$. Protože $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(n-1)}$ konverguje dle Příkladu ②, tak $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ konverguje.

Věta 6.4 (Cauchyho odmocninové kritérium) Nechť $a_k \geq 0$ a $k_0 \in \mathbb{N}$.

Pokud

(i) existuje $q \in (0,1)$ tak, že $\sqrt[k]{a_k} \leq q$ pro $\forall k \geq k_0$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

(ii) $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ pro všechna $k \geq k_0$, pak $\sum_{1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Dk **Ad (i)** Z předpokladu plyne $0 \leq a_k \leq q^k$ a protože $q \in (0,1)$ tak $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ konverguje (geometrická řada). Dle Věty 6.3 tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje také.

Ad (ii) Z předpokladu $a_k \geq 1$ $(k \geq k_0)$ a z Věty 6.1 máme tvrzení.

Věta 6.5 (d'Alembertovo podílové kritérium) Nechť $a_k > 0$ a $k_0 \in \mathbb{N}$.

Pokud

(i) existuje $q \in (0,1)$ tak, že $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q$ pro $\forall k \geq k_0$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

(ii) $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ pro všechna $k \geq k_0$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Dk **Ad (i)** Podobně jako v důkazu Věty 6.3 píšeme:

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_{k_0+1}}{a_{k_0}} a_{k_0} \leq \underbrace{q^{k-k_0} a_{k_0}}_{\text{člen geometrické řady}} \quad \text{pro } k \geq k_0$$

, $q \in (0,1)$.

a protože $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-k_0}$ konverguje, Věta 6.3 dává tvrzení.

Ad (ii) Z předpokladu $a_{k+1} \geq a_k \geq \dots \geq a_{k_0} > 0$, $\forall k \geq k_0$. Tedy $\lim_{k \to \infty} a_k \neq 0$. Dle Věty 6.1, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$. ▨

Předchozí kritéria mají i tzv. limitní varianty, která se někdy snadněji ověřují. Pozornost věnujte předpokladům, ostrým nerovnostem v jednotlivých podmínkách.

$\boxed{\text{Věta 6.6}}$ (Kritéria v limitním tvaru)

(α) Limitní srovnávací kritérium

Nechť $a_n, b_n > 0$ a nechť $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ tj. vlastní a nenulová

Pak: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje

(β) Nechť $a_n, b_n > 0$ a nechť $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Pak platí:

- Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- Pokud $\sum a_n$ diverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje

(γ) Limitní podílové kritérium

Nechť $a_k > 0$. Je-li $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

Je-li $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$, pak $\sum a_k$ diverguje

(δ) Limitní odmocninové kritérium

Nechť $a_k \geq 0$. Je-li $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} < 1$, pak $\sum_1^{\infty} a_k$ konverguje.

Je-li $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} > 1$, pak $\sum_1^{\infty} a_k$ diverguje.

(Dk) $\boxed{\text{Ad }(\alpha)}$ Z existence limity $L := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, kde $0 < L < +\infty$ plyne

$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq n_0$ $\boxed{\frac{L}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2L}$

což implikuje $b_n \leq \frac{2}{L} a_n \leq 4 b_n$ pro $\forall n \geq n_0$ a tvrzení plyne z V.6.3.

$\boxed{\text{Ad }(\beta)}$ Z existence limity plyne: $\exists M > 0: 0 \leq a_n \leq M b_n \ \forall n \geq n_0$.
Opět srovnávací kritérium, věta 6.3, dává tvrzení.

$\boxed{\text{Ad }(\gamma)}$ + $\boxed{\text{Ad }(\delta)}$ Z předpokladů se (snadno) ověří (PROVEĎTE!)
předpoklady vět 6.4 resp. 6.5, z kterých tvrzení plynou. ▨

$\boxed{\text{Příklady}}$ ⑧ $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+2}\right)^{k^2}$ konverguje, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k}{k+2}\right)^{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+2}\right)^{k} = \exp\left(\lim_{k\to\infty} \overset{\nwarrow 1_{k\to\infty}}{\boxed{\frac{\ln\left(\frac{k}{k+2}\right)}{\frac{k}{k+2} - 1}}} \frac{(-2k)}{k+2}\right)$$

$$= e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1; \text{ (δ) dává konvergenci.}$$

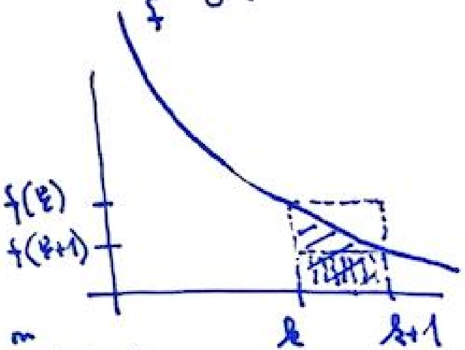
⑨ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}$ konverguje, neboť $\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{[(k+1)!]^2}{[2(k+1)]!}\frac{(2k)!}{[k!]^2}=\frac{(k+1)^2}{2(k+1)(2k+1)}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{4}<1$

a tvrzení plyne z Věty 6.6 (γ). ▨

Užitečným nástrojem k vyšetření konvergence/divergence řad je také následující integrální kritérium.

$\boxed{\text{Věta 6.7}}$ (Integrální kritérium) Buď $k_0\in\mathbb{N}$ a $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ kladná a nerostoucí na $[k_0,\infty)$. Pak

(I) $\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)$ konverguje $\underset{\text{PRÁVĚ KDYŽ}}{\iff}$ $\int_{k_0}^{\infty} f(x)\,dx$ konverguje



Dk Z monotónie (viz Obr. 1) plyne:

$$\forall k\geq k_0: \quad f(k)\geq\int_k^{k+1} f(x)\,dx\geq f(k+1)$$

což implikuje

$$(**)\quad \sum_{k=k_0}^{m} f(k)\geq\sum_{k=k_0}^{m}\int_k^{k+1} f(x)\,dx=\int_{k_0}^{m+1} f(x)\,dx\geq\sum_{k=k_0}^{m} f(k+1)\geq 0$$

Odtud dostáváme obě implikace v (I).

$\boxed{\Rightarrow}$ Je-li $\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)$ konvergentní, je pak posloupnost n-tých částečných součtů $\left\{\sum_{k=k_0}^{m} f(k)\right\}_{m=k+1}^{\infty}$ omezená, což implikuje:

fce $\boxed{n\longmapsto\int_{k_0}^{m+1} f(x)\,dx}$ je neklesající a omezená.

Tedy $\underset{\text{existuje}}{\lim_{n\to\infty}\int_{k_0}^{m} f(x)\,dx}=:\int_{k_0}^{\infty} f(x)\,dx$ konverguje.

$\boxed{\Leftarrow}$ Naopak platí z (**):

$$\sum_{k=k_0}^{m} f(k)=f(k_0)+\sum_{k=k_0}^{m-1} f(k+1)\overset{(**)}{\leq} f(k_0)+\sum_{k=k_0}^{m-1}\int_k^{k+1} f(x)\,dx\leq f(k_0)+\int_{k_0}^{m} f(x)\,dx$$

Tedy, pokud konverguje $\int_{k_0}^{\infty} f(x)\,dx$, pak ex. $\lim_{n\to\infty}\int_{k_0}^{m} f(x)\,dx$ vlastní. Tak $\left\{\sum_{k=k_0}^{m} f(k)\right\}_{m=k_0+1}^{\infty}$ je omezená, monotónní; má tedy vlastní limitu. Tak $\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)$ konverguje. ▨

Příklady ⑩ Pro $\alpha>1$ je $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ konvergentní, neboť

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{\alpha-1}.$$

⑪ Rozhodněte, pro která $\beta>1$ je $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ konvergentní.

Řešení:

Zkoumáme $I := \int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$. Substitucí $y=\ln x$ $\left(\Rightarrow dy=\frac{dx}{x}\right)$

dostáváme

$I = \int_{\ln 2}^{\infty}\frac{dy}{y^\beta}$, který konverguje právě když $\boxed{\beta>1}$

Tedy: (dle Věty 6.7) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ konverguje pro $\beta>1$

. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n} = \infty$

! Srovnej s harmonickou řadou a Příklady ③, ⑥ a ⑩.

Všimněte si, že limitní odmocninové a limitní podílové kritérium nedávají žádnou informaci o konvergenci řad (či jejich divergenci), pokud

(+) $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k} = 1$ respektive $\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$.

Pokud nám vyjde některá z podmínek (+), tak musíme postupovat pomocí jemnějších kritérií (třeba integrálního).

Existuje spousta dalších kritérií. V odmocninovém či podílovém kritériu jsme (v důkazu) porovnávali "naši" řadu s geometrickou řadou. V Raabeho kritériu se daná řada porovná s řadou $\sum\frac{1}{n^\alpha}$; v Gaussově kritériu se zase daná řada porovná s $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$, atd.

Prvky konvergentní řady musí jít (pro $k\to\infty$) k nule, viz nutná podmínka Věta 6.1. O tom, zda řada konverguje, tedy rozhoduje jak rychle jdou a_k k nule. Víme, že $a_k=\frac{1}{k}$

nebo $a_k = \frac{1}{k \ln k}$ nestačí. Myšlenku poznat, zda prvky řady jdou dostatečně rychle k nule, využívá Cauchyho kondenzační kritérium. Tato kritéria do základního kursu nebudeme uvádět, ale přidáme je pro nadšence formou dodatku. Příští týden se zaměříme na obecné řady čísel; opustíme tedy předpoklad, že $a_k \geq 0 \ \forall k \geq k_0$, který hrál v celé kapitole podstatnou roli.

DODATEK (aneb ČTENÍ NAVÍC)

Věta D.1 (Kondenzační kritérium) Nechť $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost. Pak

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konverguje } \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konverguje}$$

Dk plyne z následujících horních a dolních odhadů pro S_{2^n}, tj. částečných součtů posloupnosti $\{a_k\}$:

Horní odhad:

- $$a_1 + (a_2+a_3) + (a_4+a_5+a_6+a_7) + \dots + (a_{2^{n-1}} + \dots + a_{2^n-1}) \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}}$$

Dolní odhad:

- $$a_1 + a_2 + (a_3+a_4) + (a_5+\dots+a_8) + \dots + (a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n}) \geq a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^{n-1} a_{2^n}$$

Ad $\boxed{\Rightarrow}$ Pokud $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, tak jsou omezené S_{2^n} nalevo dolního odhadu a jsou tak omezeny částečné součty řady $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$. Tedy tato řada konverguje.

Ad $\boxed{\Leftarrow}$ V tomto případě plyne tvrzení z horního odhadu. ▨

APLIKACE D.1

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, konverguje $\overset{\text{V.D.1}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} \text{ konverguje.}}$

Ale $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-\alpha)}$ je geometrická řada s $q := 2^{1-\alpha} < 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha > 1.}}$

- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ (s $\beta > 0$) konverguje $\overset{\text{V.D.1}}{\Longleftrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n (\log 2^n)^\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^\beta n^\beta}$ konverguje

$$\Leftrightarrow \boxed{\beta > 1}$$

Věta D.2 (Raabeho kritérium – zjemnění podílového kritéria]

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s $a_n>0$ je dána. Pak platí:

(i) Jestliže pro $q>1$ platí $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geq q$ pro $\forall n\geq n_0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

lze nahradit: $\boxed{\text{Jestliže } \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>1}$ (, který implikuje)

(ii) Jestliže $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leq 1$ pro všechna $n\geq n_0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

lze nahradit: $\left[\text{Jestliže } \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<1\right]$ $\Uparrow$

(Dk) **Ad(i)** Z předpokladu plyne $\frac{a_n}{a_{n+1}}\geq 1+\frac{q}{n}$. Protože $q>1$, lze zvolit $\boxed{\alpha\in(1,q)}$ a pokusíme se porovnat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s řadou $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, o které víme, že konverguje. Označme $b_n := \frac{1}{n^\alpha}$.

Pak
$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} = 1+\frac{\alpha}{n}(1+\xi)^{\alpha-1} < 1+\frac{\alpha}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}$$
kde $\xi\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$.

{Zde jsme využili Langrangeovu VOSH na funkci $F(x)=(1+x)^{\alpha}$:
$F(x)-F(0)=F'(\xi)(x-0) \Rightarrow$ pro $x=\frac{1}{n}$ $\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1=\alpha(1+\xi)^{\alpha-1}\frac{1}{n}}$

{Protože $\lim_{n\to\infty}\alpha\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}=\alpha$ (OVĚŘTE SI SAMI) a zároveň $\underline{\alpha<q}$,
tak $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tak, že $\underbrace{\alpha\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}<q}$ (pro všechna $n\geq n_0$)

Tedy: $\left[\frac{b_n}{b_{n+1}} < 1+\frac{\alpha}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} < 1+\frac{q}{n} \leq \frac{a_n}{a_{n+1}}\right]$ pro $\forall n\geq n_0$

$\Downarrow$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{b_{n+1}}{b_n}$ a protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv., tak podílové srovnávací kritérium implikuje, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje také.

Ad (ii) Z předpokladu plyne $\frac{a_n}{a_{n+1}}\leq 1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}=\frac{b_n}{b_{n+1}}$ kde $b_n:=\frac{1}{n}$.

Tedy $\frac{b_{n+1}}{b_n}\leq\frac{a_{n+1}}{a_n}$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, tak také $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. ▨

$\boxed{\text{APLIKACE D.2}}$ Mějme zadanou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tentokrát rekursivně (tzn. jako iterační proces): $\boxed{a_1=1}$ a $\left[a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n\right]$

Určete, zda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Řešení Jako první možnost se nabízí limitní podílové kritérium.

Avšak
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1,$$
což je přesně ta situace, kdy Limitní podílové kritérium Věta 6.6 (γ) nic nedává. Raabeho kritérium je jemnější. Proto
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+2}{n}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\,\frac{2}{n}=2,$$
tak dle Věty D.2 řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. ▨

Ještě jemnější/přesnější je následující Gaussovo kritérium, které v sobě navíc zahrnuje d'Alembertovo limitní podílové kritérium tak i Raabeho kritérium.

$\boxed{\text{GAUSSOVO KRITÉRIUM}}$

$\boxed{\text{Věta D.3}}$ Nechť existují $p,q\in\mathbb{R}$ a $\varepsilon>0$ tak, že

$$(*)\qquad \frac{a_n}{a_{n+1}}=p+\frac{q}{n}+\frac{t_n}{n^{1+\varepsilon}},$$
kde $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená posloupnost.

Pak platí:

(i) Je-li $p>1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

(ii) Je-li $p<1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

(iii) Je-li $p=1$ a $q>1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje

(iv) Je-li $p=1$ a $q\le 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Dk $\boxed{\text{Ad (i) a (ii)}}$ Tvrzení plynou z limitního podílového kritéria, tj. Věta 6.6 (γ) neboť
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{a_n}{a_{n+1}}}\overset{(*)}{=}\frac{1}{p}.$$

$\boxed{\text{Ad (iii) a } \boxed{\text{(iv) s } q<1}}$ Tato tvrzení plynou z Raabeho kritéria, Věta D.2, neboť pro $p=1$ plyne z $(*)$: $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=q$.

ZBÝVÁ DOKÁZAT TVRZENÍ PRO $p=q=1$ v (iv).

Ad podpřípad (iv): $p=q=1$ Danou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující $(*)$ s $p=q=1$, tzn.

$$(**) \qquad \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{t_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

porovnáme s posloupností $b_n := \frac{1}{n \ln n}$, o které víme, že její řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverguje, viz Příklad ⑪. Pro $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$(***) \qquad \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(n+1)}{n} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{n+1}{n \ln n}\left[\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

Taylorův polynom stupně 2 v bodě $x_0=0$ s Lagrangeovým tvarem zbytku pro $F(x)=\ln(1+x)$ dává:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\frac{1}{(1+\xi)^2} = \frac{1}{n} + \frac{c_n}{n^2} \qquad \text{kde } c_n = \frac{-1}{2}\frac{1}{(1+\xi)^2} \text{ a } \xi=\xi_n \in \left(0,\frac{1}{n}\right)$$

Navíc $|c_n| \leq \frac{1}{2}$.

Dosazením do $(***)$ dostáváme

$$\frac{b_n}{b_n} = \frac{n+1}{n \ln n}\left[\ln n + \frac{1}{n} + \frac{c_n}{n^2}\right] = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{n}+\frac{c_n}{n^2}\right)\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} + \frac{1}{n^2 \ln n}\left(1 + c_n + \frac{c_n}{n}\right).$$

Porovnáním získaného výsledku s $(**)$ dostáváme:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{b_n}{b_{n+1}} \quad \text{pro } n \text{ dostatečně velké,}$$

neboli $\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \frac{a_n}{a_{n+1}}$ a dle Věty 6.3 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje. ▨

Aplikace D.3 Pro $a,b \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+a)(k-1+a)\dots a}{k!\, k^b}$

Řešení: Pro $a_k := \frac{(k+a)(k-1+a)\dots a}{k!\, k^b}$ platí:

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{(k+1)}{(k+1+a)}\left(\frac{k+1}{k}\right)^b = \left(1 - \frac{a}{k+1+a}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)^b$$

Taylorův rozvoje 2. stupně $F(x) = (1+x)^b$ a Taylorův rozvoj 1. stupně $G(x) = \frac{1}{1+x}$ v bodě $x_0=0$ s Lagrangeovým tvarem zbytku dává

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^b = 1 + \frac{b}{k} + \frac{b(b-1)}{2}(1+\xi_k)\frac{1}{k^2} \quad \text{a} \quad \frac{1}{k+1+a} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{1+\frac{1+a}{k}}\right) = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{2(1+\tilde{\xi}_k)^2}\frac{1}{k}\right),$$

kde $\xi_k, \tilde{\xi}_k \in \left(0,\frac{1}{k}\right)$. Tedy

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = 1 + \frac{b-a}{k} + \frac{t_k}{k^2},$$ kde $\{t_k\}$ je omezená. Zkoumaná řada tedy konverguje dle Gaussove kritérie $\Longleftrightarrow \boxed{b-a>1}$ ▨

$\boxed{6.2}$ ALTERNUJÍCÍ A OBECNÉ ŘADY

$\boxed{\text{Def.}}$ Nechť $\boxed{a_n \in \mathbb{C} \text{ nebo } \mathbb{R}.}$ Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně pokud $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje

Pozorování Úloha zjistit zda řada komplexních či reálných čísel konverguje absolutně nás převádí do předchozí kapitoly 6.1. neboť $|a_n|_{\mathbb{C}} \geq 0$ i $|a_n|_{\mathbb{R}} \geq 0$.

Naším cílem je zkoumat, kdy řada $\sum a_k$ konverguje. ① Ukážeme, a to bude náš první dílčí cíl, že pokud řada konverguje absolutně, pak konverguje. Schématicky

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konverguje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}$$

Pak si ② ukážeme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konverguje. Posloupnost $a_n := (-1)^n \frac{1}{n}$ je tak příkladem, kdy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje (viz harmonická řada, Příklad ③). Přímočarým zobecněním vyšetřování konvergence řady $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ bude Leibnitzovo kritérium. ③ Jeho důkaz bude náš třetí dílčí cíl v této sekci.

$\boxed{\text{Věta 6.8.}}$ (B-C. podmínka pro řady) Platí:

(5) řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ \forall \underset{m \geq n}{n, m \geq n_0} : \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$

Dk Levá strana ekvivalence (5) je dle definice $\iff$ limita $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ existuje a je vlastní $\iff \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku $\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq n_0)\ |s_n - s_m| < \varepsilon$, přičemž lze předpokládat bez újmy obecnosti, že $m \geq n$. Pak $|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right|$. Tvrzení je dokázáno. ▨

$\boxed{\text{Věta 6.9}}$ (Absolutní konvergence ⇒ Konvergence)

Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ konverguje, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje

(Dk) Z předpokladu a B-C podmínky pro řadu $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ víme, že:

(⊛) $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall m\geq n\geq n_0 : \sum_{k=n}^{m}|a_k|<\varepsilon)$.

Protože $$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta\text{-nerovnost} \\ \text{pro konečný počet sčítanců}}}{\leq} \sum_{k=m+1}^{\infty}|a_k|$$

tak, z (⊛) plyne B-C podmínka pro řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje. ▨

$\boxed{\text{Definice}}$ Buď $a_n\geq 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ se nazývá <u>alternující</u>.

$\boxed{\text{Příklad ⑫}}$ Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ je alternující. Ukážeme, že je <u>konvergentní</u>. Posloupnost $\left\{(-1)^n\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy <u>příkladem posloupnosti</u>, která <u>konverguje</u>, <u>ale</u> <u>nekonverguje absolutně</u> (viz Příklad ③).

(Dk, že $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ konverguje) Využijeme skutečnosti, že posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající. Pro liché a sudé členy posloupnosti n-tých částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$s_{2n+1} = 1 \underbrace{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{<0} \underbrace{-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}_{<0} - \dots \underbrace{-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}}_{<0}$$

$$s_{2n} = \underbrace{1-\frac{1}{2}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}_{>0} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}}_{>0}$$

Tedy $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí

Obě posloupnosti tedy mají limitu:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} =: L \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} s_{2n} =: S$$

Navíc platí: $\boxed{L \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}}$, $\boxed{S \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}}$ a $\boxed{s_{2n+1}-s_{2n} = \frac{1}{2n+1} \to 0}$

Tedy $0 = \lim_{n\to\infty}(s_{2n+1}-s_{2n}) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n}}$ neboť výraz vpravo má smysl.

Odsud $S = L \in \mathbb{R}$, a také $\lim_{n\to\infty} s_n = S$ a $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ konverguje. ▨

Výše uvedený důkaz konvergence alternující řady $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ lze zobecnit pro libovolnou posloupnost $\{(-1)^m a_m\}_{n=1}^{\infty}$, která splňuje podmínky:

(♔)
- $a_m \geq 0$
- $\lim_{n\to\infty} a_m = 0$
- $\{a_n\}$ je nerostoucí: $n < m \Rightarrow a_n \geq a_m$.

To přesně říká následující Leibnizovo kritérium.

Věta 6.10 (Leibnizovo kritérium pro alternující řady).
Buď $\{a_m\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost kladných čísel. PLATÍ:

(6) $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}a_m$ konverguje $\iff \lim_{n\to\infty} a_m = 0$.

Neboli: Nutná podmínka konvergence řad, tj. podmínka $\lim_{n\to\infty} a_m = 0$, je pro nerostoucí nezáporné posloupnosti postačující pro konvergenci alternující řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+1}a_m$.

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ plyne z Věty 6.1 (nutná podmínka konvergence řad)

$\boxed{\Leftarrow}$ Platí:
- $s_{2(n+1)} = s_{2n} + (-1)^{2n+2}a_{2n+1} + (-1)^{2n+3}a_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{a_{2n+1} - a_{2n+2}}_{\geq 0} \geq s_{2n} \geq \dots \geq s_2 = -a_2 + a_1 \geq 0$
- $s_{2(n+1)+1} = s_{2n+1} + (-1)^{2n+3}a_{2n+2} + (-1)^{2n+4}a_{2n+3} = s_{2n+1} \underbrace{- a_{2n+2} + a_{2n+3}}_{\leq 0} \leq s_{2n+1} \leq \dots \leq s_1 = a_1$
- $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1} \geq s_{2n}$

Tedy:
- $\boxed{0 \leq s_n \leq s_{2n+1} \leq a_1}$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$
- $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ klesající. Obě jsou omezené.

Existují tedy vlastní limity: $S := \lim_{n\to\infty} s_{2n}$ a $L := \lim s_{2n+1}$ a také $L \geq S$.

Navíc $L - S = \lim(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$. Tedy $L = S$ a tvrzení platí.

Pro $x \in \mathbb{R}$ umíme odpovědět otázku, kdy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konverguje, diverguje či osciluje. Skutečně, protože $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n}$ konverguje dle limitního d'Alembertova kritéria pokud $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)} \frac{n}{|x|^n} < 1$,

což je ekvivalentní požadavku $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} |x| < 1 \iff |x| < 1$, dostáváme, dle $\boxed{\text{Kritéria AK} \Rightarrow \text{K}}$, že řada $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \text{ konverguje pro } x \in (-1,1)}$. (dokonce absolutně)

Dále víme, že $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n}$ neexistuje nebo není nulová pro $x \in \mathbb{R}$ takové, že $|x| > 1$. (Pro $x > 1$, posloupnost $\left\{\frac{x^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje
Pro $x < -1$, —"— $\left\{\frac{x^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje)

Tedy, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ pro $x > 1$ diverguje a pro $x < -1$ nekonverguje (osciluje). Zbývají body $x = \pm 1$. Pro $x = 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje (viz Příklad ③), zatímco řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje (ale ne absolutně), viz Příklad ⑫.

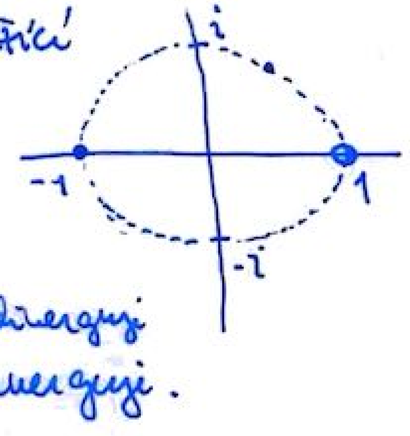
Motivací pro další výklad bude otázka:
Pro jaká $z \in \mathbb{C}$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konverguje, diverguje, osciluje?

Protože pro $z \in \mathbb{C}$: $z = |z| e^{i\varphi}$ $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$

a $z^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n \cos n\varphi + i |z|^n \sin n\varphi$

tak stejnými metodami jako pro $x \in \mathbb{R}$, $|x| \neq 1$, zjistíme, že

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konverguje (dokonce absolutně) pro $|z| < 1$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ diverguje nebo osciluje pro $|z| > 1$.



Zbývá vyšetřit $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ tzn. z ležící na jednotkové kružnici nebo z tvaru $z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$.
Přitom víme, že na jednotkové kružnici je bod $(z = 1)$, kdy řada diverguje a bod $(z = -1)$, kdy řada konverguje.

Zajímá nás tedy co se děje v okolích bodech jednotkové kružnice.

Připomeňme si, že zkoumání konvergence řady $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n}}$ je ekvivalentní zkoumání konv. řad $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n}}$ a $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n}}$

Všimněme si, že tyto řady lze psát ve tvaru

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, kde $\underline{a_n = \frac{1}{n}}$ a $\underline{b_n = e^{in\varphi}}$ či $\underline{\sin n\varphi}$ nebo $\underline{\cos n\varphi}$.

Řadami typu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ se nyní budeme zabývat. Začneme jedním technickým tvrzením, které lze interpretovat jako diskrétní verzi integrace per-partes.

Lemma (Diskrétní verze integrace per-partes) Pro $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}, \{b_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ platí:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \quad \text{kde } B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i .$$

Dk. Protože $b_1 = B_1$ a $b_k = B_k - B_{k-1}$ pro $k \geq 2$, píšeme

$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k = \sum_{k=2}^{m} a_k (B_k - B_{k-1}) + a_1 B_1$$

$$= a_1 B_1 + a_2 B_2 - a_2 B_1 + a_3 B_3 - a_3 B_2 + \dots + a_m B_m - a_m B_{m-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_m B_m = a_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) B_k$$ ▨

Skutečnost, že sčítáme v Lemmatu od $k=1$, nehrála v důkazu žádnou roli; máme tedy také: pro $m > n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\boxed{(6) \quad \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \quad \text{kde } B_k := \sum_{i=n+1}^{k} b_i}$$

$\boxed{\text{Věta 6.11}}$ (Abelovo a Dirichletovo kritérium)

Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ monotónní. Buď $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Dále nechť:

$\boxed{\text{BUĎ}}$

(DIR) $a_n \to 0$ pro $n \to \infty$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ má omezenou posloupnost částečných součtů,

NEBO

(ABEL) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje.

Pak $\underline{\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ konverguje}}$

Dk Chceme ukázat, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ splňuje B.-C. podmínku: K danému $\varepsilon > 0$ hledáme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall\, m \geq n \geq n_0$: $\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k < \varepsilon$.

Definujeme-li $B_k := \sum_{i=n+1}^{k} b_i$, tak z předchozí lemmy a (6) dostáváme:

$$(\bullet) \quad \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \right| \leq |a_m|\,|B_m| + \max_{k \in \{n+1,\dots,m\}} |B_k| \sum_{k=n+1}^{m-1} |a_{k+1} - a_k|$$

Protože $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní, tak $|a_{k+1} - a_k| = \begin{cases} a_{k+1} - a_k & \text{je-li } \{a_k\} \text{ rostoucí resp. neklesající} \\ a_k - a_{k+1} & \text{je-li } \{a_k\} \text{ klesající resp. nerostoucí} \end{cases}$

Tedy $\{|a_{k+1} - a_k|\}_{k=1}^{\infty}$ je teleskopická a platí:

$$\sum_{k=n+1}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| = \pm\left[a_m - a_{m+1}\right]$$

Tedy odsud a z $(\bullet)$:

$$(\bullet\bullet) \quad \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \right| \leq 3 \max_{k \in \{n+1,\dots,m\}} |a_k| \max_{k \in \{n+1,\dots,m\}} |B_k|.$$

K výše danému $\varepsilon > 0$, za předpokladu (DIR), $\exists\, M > 0$ tak, že $\forall\, k \geq 1$ $|B_k| \leq M$, a také existuje n_0 tak, že $\forall\, m \geq n \geq n_0$: $\max_{k \in \{n+1,\dots,m\}} |a_k| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Tedy z $(\bullet\bullet)$: $\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \right| < \varepsilon$

Za předpokladu (ABEL), $\exists\, L > 0$ tak, že $\forall\, k \geq 1$ $|a_k| < L$ a k danému $\varepsilon > 0$ najdeme z B-C. podmínky pro konvergující řadu $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $m \geq n \geq n_0$: $|B_k| < \frac{\varepsilon}{3L}$.

Tedy opět z $(\bullet\bullet)$: $\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \right| < \varepsilon$. ▨

Příklady (13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n}$ pro $\varphi \in (0, 2\pi)$ pevné konverguje, neboť dle předchozího Dirichletova kritéria posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a splňuje $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Zbývá ověřit, že posloupnost částečných součtů posloupnosti $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ s $b_k := e^{ik\varphi}$ je omezená. Avšak A Gaussova vzorce pro součet geometrické řady máme

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} e^{ik\varphi} = e^{i\varphi} \frac{1 - e^{i(n+1)\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} .$$

Tedy

$$|S_n|_{\mathbb{C}} \leq |e^{i\varphi}|_{\mathbb{C}} \frac{|1 - e^{i(n+1)\varphi}|_{\mathbb{C}}}{|1 - e^{i\varphi}|_{\mathbb{C}}} \leq \frac{2}{|1 - e^{i\varphi}|_{\mathbb{C}}} \leq \frac{2}{1 - \cos\varphi} =: M \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

kde jsme využili $|1 - \cos\varphi - i\sin\varphi|_{\mathbb{C}}^2 = (1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi \geq (1-\cos\varphi)^2$.

Speciálně jsme také ukázali, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ konverguje pro $x \in (0, 2\pi)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ konverguje pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$. ⊛

(14) Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} k$ konverguje neboť:

- $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} := \{\operatorname{arctg} k\}_{k=1}^{\infty}$ je omezená a monotónní

a

- pro $b_k := \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ konverguje dle Leibnizova kritéria. ⊛

(15) Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$ nekonverguje, neboť $\sin^2 k = \frac{1 - \cos 2k}{2}$ a tedy

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{\cos 2k}{2k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k}{2k} \right] (⊛)$$

Pokud řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k}{2k}$ konverguje dle Dirichletova kritéria. OVĚŘTE. Kdyby $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$ konvergovala, tak z (⊛) by plynulo, že $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konverguje, což je spor a tedy řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$ nekonverguje.

$\boxed{6.3}$ Mohutnost (kardinalita) čísel. Přerovnání řad. Součin řad.

Buď $M \neq \emptyset$ množina prvků. Mohutnost množiny udává počet prvků množiny M. Ačkoliv jsme zvyklí porovnávat počty prvků v každodenním životě, i tento proces našeho myšlení vyžaduje jistou abstrakci a „ztotožnění". Cílem našeho povídání bude porovnat mohutnost nekonečných množin.

Definice Řekneme, že $\emptyset \neq M$ je konečná, pokud existuje $L \in \mathbb{N}$ a existuje $\varphi : \mathbb{N}_L \xrightarrow{na} M$ prosté, kde $\mathbb{N}_L := \{n \in \mathbb{N};\ n \leq L\}$.

Množina M je

- nekonečná, není-li konečná
- spočetně {nekonečná}, jestliže existuje $\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{na} M$ prosté.
  V tomto případě lze prvky M psát ve tvaru: $M = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$.
- {spočetná} je-li konečná nebo spočetně nekonečná
- nespočetná, není-li spočetná.

Georg Cantor (3.3.1845 – 6.1.1918)
německý matematik

D. Hilbert (1900): „Nikdo nás nevyžene z ráje, který pro nás připravil Cantor.

Příklad Uvažujme $\mathbb{N}_{sudé} = \{2k; k \in \mathbb{N}\}$. Pak z množinového pohledu $\mathbb{N}_{sudé} \subsetneqq \mathbb{N}$. Z pohledu kardinality, tj. kolik prvků tyto množiny mají, jsou však $\mathbb{N}_{sudé}$ a $\mathbb{N}$ stejně velké neboť $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_{sudé}$ definované $\varphi(k) = 2k$ je prosté a na.

Věta 6.12 Platí:

(i) Jsou-li S a T spočetné, pak $S \cup T$ a $S \times T$ jsou spočetné.

(ii) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ jsou spočetné.

(iii) $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^m$ jsou nespočetné.

Ⓓⓚ **Ad(i)** Nechť $S = \{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $T = \{t_k\}_{k=1}^{\infty}$. Definujeme-li φ předpisem

$$\begin{aligned} \varphi(2n) &= s_n \\ \varphi(2n-1) &= t_n \end{aligned} \quad (n \in \mathbb{N})$$

pak $\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{na} S \cup T$ prosté

Tedy $S \cup T$ je spočetně nekonečná.

V případě $S\times T := \{(s_j,t_k);\ \underset{j\in\mathbb{N}}{j=1,2,\dots};\ \underset{k\in\mathbb{N}}{k=1,2,\dots}\}$ si pomůžeme obrázkem. Kartézský součin $S\times T$ lze zobrazit:

$$\begin{tikzcd}
(s_1,t_1)^{①} \arrow[r] & (s_1,t_2)^{②} \arrow[dl] & (s_1,t_3)^{④} \arrow[dl] & (s_1,t_4)^{⑦} \arrow[dl] & \cdots \\
(s_2,t_1)^{③} & (s_2,t_2)^{⑤} \arrow[dl] & (s_2,t_3)^{⑧} \arrow[dl] & (s_2,t_4) & \cdots \\
(s_3,t_1)^{⑥} & (s_3,t_2)^{⑨} \arrow[dl] & (s_3,t_3) & (s_3,t_4) & \cdots \\
(s_4,t_1)^{⑩} & (s_4,t_2) & (s_4,t_3) & (s_4,t_4) & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

Zobrazení φ přiřadí $m\in\mathbb{N}$ prvek (s_j,t_k), který má u sebe (červený) kroužek ⓜ. Toto zobrazení je prosté a na.

Ad (ii) • $\mathbb{Z}$ mají stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$ neboť zobrazení $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ definované: $\boxed{\begin{matrix}\varphi(1)=0 & \\ \varphi(2k)=k & k\in\mathbb{N} \\ \varphi(2k+1)=-k & \end{matrix}}$ je prosté a na.

• $\mathbb{Q}$ chápeme jako množinu $\left\{\frac{p}{q};\ p\in\mathbb{Z} \text{ a } q\in\mathbb{N}\right\}$ (s tím, že $\frac{2}{2}, \frac{1}{1}, \dots$ chápeme jako odlišné prvky) pak $\mathbb{Q}$ lze ztotožnit s $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, což je dle předchozího spočetná množina.

Ad (iii) Chceme ukázat, že $\mathbb{R}$ je nespočetná. Uvažujme nejdříve uzavřený interval $S:=\langle 0,1\rangle$. S je buď spočetná (tzn. spočetně nekonečná) nebo nespočetná. Předpokládejme, že S je spočetná. Každý prvek z S lze reprezentovat ve tvaru desetinného rozvoje $0,d_1d_2d_3\dots d_m\dots$, kde $d_k\in\{0,1,\dots,9\}$.

(vyloučíme čísla typu $0,d_1\dots d_k\overline{9}$ (abychom se vyhnuli nejednoznačnosti)) s výjimkou $1=0.\overline{9}$)

Z předpokladu, že S je spočetná plyne, že prvky S lze uspořádat do posloupnosti: $\underline{\varphi(k)=x_k=0,d_{k1}d_{k2}\dots d_{km}\dots}$

Máme tedy:

$$(T)\qquad \begin{array}{l} x_1 = 0,\, d_{11}\, d_{12}\, d_{13} \ldots\ldots d_{1k} \ldots \\ x_2 = 0,\, d_{21}\, d_{22}\, d_{23} \ldots\ldots d_{2k} \ldots \\ \vdots \\ x_k = 0,\, d_{k1}\, d_{k2}\, d_{k3} \ldots\ldots d_{kk} \ldots \\ \vdots \end{array}$$

Dle předpokladu (S spočetná) by každé číslo z S mělo být v seznamu (T). Zaměříme se, tak jako Cantor, na prvky na diagonále*), tj. d_{kk}, a vytvoříme číslo y tvaru

(*) $$y = 0, c_1 c_2 \ldots c_k \ldots ,$$

které patří do S, ale nebude prvkem tabulky (T). Tato tabulka však měla obsahovat všechny prvky S, kdyby S byla spočetná. Máme tedy spor a S musí být nespočetná. Nyní tedy ke konstrukci y tvaru (*) nepatřící do (T). Zvolme si 2 čísla z $\{1,2,\ldots,8\}$, například 1 a 6. Definujme y tvaru (*) takto:

Je-li $d_{kk} = 1$, pak polož $c_k = 6$

Je-li $d_{kk} \neq 1$, pak polož $c_k = 1$.

Takto vytvořené y patří do S, ale neshoduje se s žádným prvkem z (T).

Tedy $\langle 0,1 \rangle$ je nespočetná, a také $(0,1)$ je nespočetná.

Protože $\operatorname{cotg} \pi x : (0,1) \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ prostě a $(0,1)$ je nespočetná, tak je $\mathbb{R}$ také nespočetná.

Dle (i) je $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a také $\mathbb{R}^k = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{k\text{-krát}}$ nespočetná (se stejnou mohutností jako $\mathbb{R}$).

Protože $\mathbb{C}$ je isomorfní s $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ má i $\mathbb{C}$ a také $\mathbb{C}^k = \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}$ stejnou mohutnost jako $\mathbb{R}$.

---

*) Metody tohoto typu se často nazývají <u>Cantorova diagonalizace</u>

- M, U jsou <u>stejně mohutné</u> (mají <u>stejnou kardinalitu</u>) $=_{df}$ $\exists \varphi: M \xrightarrow{na} U$ prostě.

- Mohutnost (kardinalita) množiny M se označuje často $|M|$, tedy stejným symbolem jako absolutní hodnota nebo míra množiny (budeme mít později). POZOR!

- Mohutnost $\mathbb{N}$ se označuje $\aleph_0$ (z hebrejské abecedy... <u>aleph nula</u>)

  tedy $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

- Je-li X množina, pak $\mathcal{P}(X) := \{A;\, A \subset X\}$ je tzv. <u>potenční množina</u>

  (angl. power set) ... systém všech podmnožin

  - Je-li X konečná, pak je $|\mathcal{P}(X)| > |X|$
  - $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| =: \aleph_1 > \aleph_0$ — Množina všech podmnožin přirozených čísel je stejně mohutná jako množina reálných čísel

    aleph jedna

    $$|\mathcal{P}(\mathbb{R})| > \aleph_1 = |\mathbb{R}|$$

  - Otevřeným problémem axiomatické teorie množin je tzv. "hypotéza kontinua": neexistuje žádné (kardinální) číslo c, které leží mezi $\aleph_0$ a $\aleph_1$.

Cantor:
- Počet bodů na úsečce je stejný jako počet bodů ve čtverci.

Přerovnání řad

Definice Nechť $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) a $\varphi: \mathbb{N} \xrightarrow{na} \mathbb{N}$ prostě. Pak řadu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k := \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ nazveme <u>přerovnáním řady</u> $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Věta 6.13 Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je <u>absolutně konvergentní</u> a je-li $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ její přerovnání. Pak
- $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ konverguje absolutně
- $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(Dk) $\boxed{\text{Ad konvergence}}$ Pro dané libovolné $\varepsilon>0$ existuje $n_0\in\mathbb{N}$: $\sum_{n=n_0}^{\infty}|a_n|<\varepsilon$. Definujme $m_0:=\max\{\varphi^{-1}(1),\dots,\varphi^{-1}(n_0-1)\}$.

Pak pro $m>m_0$ platí $\varphi(m)\geq n_0$ a tedy

$$\sum_{m=m_0+1}^{\infty}|a_{\varphi(m)}| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty}|a_n|<\varepsilon$$ a tedy $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{\varphi(k)}|$ konverguje.

$\boxed{\text{Ad součet}}$ Označme $s:=\lim_{n\to\infty}s_m=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_k$

a $t:=\lim_{n\to\infty}t_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}a_{\varphi(k)}=\sum_{k=1}^{m}a_{\varphi(k)}$

Pro $\varepsilon>0$ najdeme $n_0\in\mathbb{N}$: $\sum_{k=n_0}^{\infty}|a_k|<\varepsilon$ a $\sum_{k=n_0}^{\infty}|a_{\varphi(k)}|<\varepsilon$.

Nyní najdeme $m_0\in\mathbb{N}$ takové, že $\boxed{m_0\geq n_0}$, $\boxed{\{1,\dots,n_0-1\}\subset\{\varphi(1),\dots,\varphi(m_0)\}}$

$\boxed{\{\varphi(1),\dots,\varphi(n_0-1)\}\subset\{1,\dots,m_0\}}$

Pak pro $m\geq m_0$:

$$|s_m-t_m|=\Big|\sum_{k=1}^{m}a_k-\sum_{k=1}^{m}a_{\varphi(k)}\Big|\leq\sum_{k=n_0}^{\infty}|a_k|+\sum_{k=n_0}^{\infty}|a_{\varphi(k)}|<2\varepsilon$$ ▨

(Jiný dk) $\boxed{\text{Krok 1}}$ Dokážeme nejdříve tvrzení pro $a_n\geq0$. Pak $\{a_{\varphi(1)},\dots,a_{\varphi(m)}\}\subset\{a_1,\dots,a_M\}$ pro $M\in\mathbb{N}$ dostatečně velké.

Tedy $$0\leq\sum_{k=1}^{m}a_{\varphi(k)}\leq\sum_{k=1}^{M}a_k\leq\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sup_{n\in\mathbb{N}}s_M=:s<+\infty$$

Tak $\underline{t}:=\lim\sum_{k=1}^{m}a_{\varphi(k)}\ \underline{\leq s}<\infty$ a $\underline{\text{řada }\sum_{k=1}^{\infty}a_{\varphi(k)}\text{ konverguje.}}$

Nyní vyjdeme z dokázaného a ze skutečnosti, že $\{a_1,\dots,a_m\}\subset\{a_{\varphi(1)},\dots,a_{\varphi(L)}\}$ pro L dostatečně velké.

Tedy $$0\leq\sum_{k=1}^{m}a_k\leq\sum_{k=1}^{L}a_{\varphi(k)}\leq\sum_{k=1}^{\infty}a_{\varphi(k)}=t\Rightarrow\boxed{s\leq t}$$

$\boxed{s=t}$ $\boxed{\text{Krok 2}}$ Jsou-li $a_n\in\mathbb{R}$, pak $a_n=a_n^+-a_n^-$ a $|a_n|=a_n^++a_n^-$, kde $x^+=\max\{x,0\}$ a $x^-=\max\{-x,0\}$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konverguje, též konvergují $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$. Dle $\boxed{\text{KROKU 1}}$ však konvergují také $\sum_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}^-$ a navíc $\sum_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}^{+/-}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{+/-}$.

Tak $$\sum_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}^+-\sum_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}^-=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+-\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$ ▨

Příklad, který ukazuje, že <u>pro neabsolutně konvergentní řady</u> Věta 6.13 <u>neplatí</u>

Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = (1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\dots)$ definována předpisem $a_{2n-1} = \frac{1}{n}$ a $a_{2n} = -\frac{1}{n}$. Pak $S_{2n} = 0$ a $S_{2n-1} = \frac{1}{n}$.
Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} a_k = 0$.

Uvažujme přerovnání

$$\{a_{\varphi(k)}\}_{k=1}^{\infty} = (1,\frac{1}{2},-1,\frac{1}{3},\frac{1}{4},-\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{1}{6},-\frac{1}{3},\dots$$

definované takto:

$$a_{\varphi(3k-2)} = \frac{1}{2k-1}, \quad a_{\varphi(3k-1)} = \frac{1}{2k}, \quad a_{\varphi(3k)} = -\frac{1}{k}.$$

Pak

$$\underline{\sigma_{3k}} = \sum_{k=1}^{3k} a_{\varphi(k)} = \sum_{l=1}^{k} \{a_{\varphi(3l-2)} + a_{\varphi(3l-1)} + a_{\varphi(3l)}\}$$

$$= \sum_{l=1}^{k}\left(\frac{1}{2l-1} + \frac{1}{2l} - \frac{1}{l}\right) = \sum_{l=1}^{k} \frac{2l + (2l-1) - 2(2l-1)}{2l(2l-1)}$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{(2l-1)2l} = \sum_{l=1}^{k}\left(\frac{1}{2l-1} - \frac{1}{2l}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots \Big|_{x=1} = \ln(x+1)\Big|_{x=1}$$

$$= \underline{\ln 2}$$

Protože $\sigma_{3k+1} - \sigma_{3k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$ a $\sigma_{3k+2} - \sigma_{3k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$,

tak $\lim_{k\to\infty} \sigma_k$ existuje a rovná se ln 2.

Vidíme, že přerovnáním <u>konvergentních</u>*) řad mohu dostat různé výsledky. Následující Riemannova věta, že lze vhodným přerovnáním dostat jakýkoliv výsledek, i +/-∞. JAKÝ TO ROZDÍL oproti absolutně konvergentním řadám!

*) <u>neabsolutně</u>

Věta 6.14 (Riemannova věta o přerovnání neabsolutně konvergentních řad)

$$\boxed{\text{Nechť } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konverguje neabsolutně. Pak pro každé } s^* \in \mathbb{R}^* \text{ existuje přerovnání } \varphi \text{ s } \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = s^*.}$$

Dk Připomeňme si nejdříve značení: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^+ = \max\{x, 0\} \geq 0$, $x^- = \max\{-x, 0\} \geq 0$

a tedy $x = x^+ - x^-$ a $|x| = x^+ + x^-$.

▶ Tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$

Tvrdíme, že nutně z neabsolutní konvergence $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ plyne:

$$(+) \quad \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \infty \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \infty}$$

Kdyby totiž $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergovaly, tak $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje, ale to neplatí.

Kdyby jedna z řad divergovala a druhá konvergovala, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje. Platí tedy (+).

▶ Pro dané $s^* \in \mathbb{R}$, bereme kladné členy tak dlouho až jejich součet je větší než s^*, pak přidáváme záporné prvky až se dostaneme pod s^*, pak kladné, pak záporné, ...

Otázka: Jak budeme postupovat je-li $s^* = +\infty$ či $s^* = -\infty$?

▨

POZOR! S neabsolutně konvergujícími řadami je třeba pracovat obzvláště opatrně, jak ukazují příklady připravené na stránkách kursu Vítem Průšou. Nevhodné manipulace (které zdánlivě působí věrohodně) mohou vést k identitám typu

$$\ln 2 = 2 \ln 2 \quad \text{či} \quad \ln 2 = 0.$$

Součin řad

Definice Nechť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ a $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ jsou dvě řady komplexních čísel. Pak symbolem $\sum_{n,m=1}^\infty a_n b_m$ rozumíme Cauchyův součin řad, definovaný předpisem

$$\sum_{n,m=1}^\infty a_n b_m := \sum_{k=1}^\infty \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^k a_{k+1-j} b_j}_{\overset{\shortparallel}{c_k}}\Big) = a_1b_1 + (a_2b_1 + a_1b_2) + (a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3) + \dots$$

pro pozdější použití

Otázky: (1) Kdy $\sum_{n,m=1}^\infty a_n b_m$ (ve smyslu Cauchy) konverguje?

(2) kdy a zda platí: $\boxed{\sum_{n,m=1}^\infty a_n b_m = \Big(\sum_{n=1}^\infty a_n\Big)\Big(\sum_{m=1}^\infty b_m\Big)}$?

Věta 6.15 (Mertensova věta) Nechť $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konverguje absolutně a $\sum_{m=1}^\infty b_m$ konverguje. Pak Cauchyův součin řad $\sum_{n,m=1}^\infty a_n b_m$ konverguje a vztah (2) platí.

Dk Označme $c_k := \sum_{j=1}^k a_{k+1-j} b_j$, $B_K := \sum_{k=1}^K b_k$, $A_K := \sum_{k=1}^K a_k$,

$B := \lim_{K\to\infty} B_K$, $A := \lim_{K\to\infty} A_K$

Cílem je ukázat, že $\lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^K c_k$ existuje a rovná $AB = \lim_{K\to\infty} A_K B$

Avšak:

$$\sum_{k=1}^K c_k = \sum_{k=1}^K \Big(\sum_{j=1}^k a_{k+j-1} b_j\Big) = a_1b_1 + (a_2b_1 + a_1b_2) + \dots + (a_Kb_1 + \dots + a_1b_K)$$

$$= a_1(b_1 + b_2 + \dots + b_K) + a_2(b_1 + b_2 + \dots + b_{K-1}) + \dots + a_K b_1$$

$$= a_1 B_K + a_2 B_{K-1} + \dots + a_K B_1$$

$$= A_K B + a_1(B_K - B) + a_2(B_{K-1} - B) + \dots + a_K(B_1 - B)$$

$$= A_K B + \underbrace{\sum_{j=1}^K a_{K+1-j}(B_j - B)}_{=:\,\gamma_K}.$$

ZBÝVÁ UKÁZAT, ŽE $\lim_{K\to\infty} \gamma_K = 0$

Volme $\varepsilon>0$ pevně, ale libovolně. Pak z (B-C) podmínky pro řadu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, plyne existence $K_0\in\mathbb{N}: \forall \tilde{K}\geq K_0: |B_{\tilde{K}}-B|<\varepsilon$.

Pak

$$|\gamma_K| \leq \left|\sum_{j=1}^{K_0} a_{K+1-j}(B_j-B)\right| + \left|\sum_{j=K_0+1}^{K}(a_{K+1-j})(B_j-B)\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{K_0}|a_{K+1-j}||(B_j-B)| + \varepsilon\boxed{\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|\right)}=:\tilde{A}$$

Protože $\lim_{K\to\infty} a_{K+1-j}=0$, tak existuje $K_1\in\mathbb{N}: \forall l\geq K_1+1-K_0$

$$|a_l| \leq \frac{\varepsilon}{K_0 \max_{j\in\mathbb{N}}|B_j-B|}.$$

Pak pro $K\geq K_1$: $|\gamma_K| \leq K_0\cdot\frac{\varepsilon}{K_0}+\varepsilon\tilde{A}=\varepsilon(\tilde{A}+A)$. ▨

$\boxed{\text{Věta 6.16}}$ Cauchyův součin dvou absolutně konvergentních řad je absolutně konvergentní.

Dk Aplikací Věty 6.15 na $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|, \sum_{k=1}^{\infty}|b_k|$ dostáváme, že $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}|a_{k+1-j}||b_j|\right)$ konverguje.

Protože $\forall K\in\mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{j=1}^{k}a_{k+1-j}b_j\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}|a_{k+1-j}||b_j|\right)$,

tak řada $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\underbrace{\sum_{j=1}^{k}a_{k+1-j}b_j}_{c_k}\right|$ konverguje. ▨

$\boxed{\text{(Proti)příklad}}$ Buď $a_n=b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Pak víme, že $\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konvergují neabsolutně. Ukážeme, že $\sum_{m,n=1}^{\infty}a_m b_n$ nekonverguje.

Řešení Řada $a_1b_1+(a_2b_1+a_1b_2)+(a_3b_1+a_2b_2+a_1b_3)+\dots$ má tvar

$$\underbrace{1}_{c_1} + \underbrace{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{c_2} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}}_{c_3}+$$

a platí $\boxed{c_{2k-1}\geq 1}$ pro všechna k, což dává nekonvergenci $\sum c_k$ dle Věty 6.1.

Vskutku: $c_{2k-1}=\frac{1}{k}+2\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{\sqrt{j}}\frac{1}{\sqrt{2k-j}} \geq \frac{1}{k}+2\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{\underbrace{\boxed{\sqrt{k-1}}}_{\leq\sqrt{k}}\sqrt{2k}} \geq \frac{1}{k}+\sqrt{2}\frac{k-1}{k}$. ▨

6|30

6.4. Mocninné řady

Definice (Mocninná řada) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ je mocninná řada se středem v z_0

Příklad Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ je mocninná řada s $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$.
Již dříve jsme ukázali, že tato řada konverguje absolutně pro $|z|<1$; A také, že pro $|z|>1$ nekonverguje a $C = \{z \in \mathbb{C} ; |z|=1\}$, jednotková kružnice vytváří rozhraní. Tuto situaci zobecňuje Věta 6.17 níže.

Poznámka
- Mocninná řada je speciální případ řady funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$; zde $f_n(z) = a_n (z-z_0)^n$. Zkoumat vlastnosti posloupností funkcí a řad funkcí budeme systematicky v dalším semestru.
- Mocninné řady patří mezi důležité kapitoly Komplexní analýza, tj. analýzy funkcí komplexní proměnné.
- Teorie mocninných řad je tedy důležitá.

Věta 6.17 Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Položme

$$(*) \qquad R := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0,+\infty]$$

(tedy včetně $+\infty$, které dostaneme, je-li $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$)

Pak:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ konverguje absolutně na $B_R(z_0)$ a nekonverguje na $\mathbb{C} \setminus \overline{B_R(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} ; |z-z_0| > R\}$

(ii) existuje-li $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$, pak se rovná $1/R$

(iii) existuje-li $\lim \sqrt[k]{|a_k|}$, pak se rovná $1/R$.

Definice R definované (*) se nazývá poloměr konvergence $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.

Úmluva Označíme-li $\underbrace{w := z - z_0}_{\text{posunutí}}$, pak zkoumání mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ se převede na $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ se středem v počátku.

$\downarrow$

Nadále: $z_0 = 0$

Důkaz Věty 6.17 **Ad (i)** Tvrzení plyne z odmocninového kritéria (Věta 6.4) pro $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n$. Tato řada konverguje jestliže $\exists q \in (0,1)$

$\sqrt[n]{|a_n||z|^n} \leq q$ pro $n \geq n_0$ a diverguje pokud $\sqrt[n]{|a_n||z|^n} \geq 1$ pro $n \geq n_0$.

Avšak:

pro $\forall \varepsilon > 0$ a pro n dostatečně velká

- $$\sqrt[n]{|a_n||z|^n} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|z| \leq \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} + \varepsilon\right)|z| = \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)|z|$$

volím ε: $0 < \varepsilon < \frac{1}{|z|} - \frac{1}{R}$ ↪ $<$ $\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{|z|} - \frac{1}{R}\right)|z| = 1$.

- Naopak pro $R \in (0, +\infty)$ a $|z| > R$:

$$\sqrt[n]{|a_n||z|^n} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|z| > \left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)|z| \geq 1 .$$

pro nekonečně mnoho indexů

pro $\frac{1}{R} - \frac{1}{|z|} > \varepsilon$

Ad (ii) Nechť $\varrho := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. Pak pro $z \in \mathbb{C}$ pevné platí

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| \xrightarrow{n\to\infty} \varrho|z| .$$

Podle d'Alembertova podílového kritéria, pro pevné $z : |z| < \frac{1}{\varrho}$ je $\varrho|z| < 1$ a tedy dle Věty 6.5 řada konverguje. Naopak pro $|z| : |z| > \frac{1}{\varrho}$ musí platit podmínka (ii) Věty 6.5 a řada nekonverguje. Tedy $R = \frac{1}{\varrho}$.

Ad (iii) plyne z Věty 6.4 (odmocninové kritérium) nebo přímo z definice R. ▨

Příklad Uvažme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{5^n}$, $z \in \mathbb{C}$. Zde $a_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ liché} \\ \frac{1}{5^n} & \text{pro } n \text{ sudé} \end{cases}$.

Pak $$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{5^n}\right)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} 5^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{5}} .$$

Tedy řada $\sum \frac{z^{2n}}{5^n}$ má poloměr konvergence $\sqrt{5}$. ▨

Nyní si uvedeme čtyři tvrzení, která nám učiní z mocninných řad silný matematický prostředek. V bodech $z \in \mathbb{C}$ splňujících $|z|<R$ budeme moci tyto nekonečné řady derivovat/integrovat člen po členu.

Věta 6.18 (Derivace mocninné řady) Nechť R je poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ má také poloměr konvergence R a pro $|z|<R$ a $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ platí:

$$\boxed{(*) \qquad f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}}$$

Dk **KROK 1** Chceme ukázat, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ mají stejný poloměr konvergence. Avšak:

- protože $\sqrt[n]{n} \geq 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ tak $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} \geq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$
- také $\sqrt[n]{n|a_n|} \leq \underbrace{\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{k}}_{\searrow 1} \sqrt[n]{a_n} \underset{\substack{\varepsilon>0 \text{ lib.} \\ n \geq n_0(\varepsilon)}}{\leq} (1+\varepsilon)\sqrt[n]{|a_n|}$

a tak

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} \leq (1+\varepsilon) \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

a tvrzení plyne.

KROK 2 **Důkaz (*)** Buď $z: |z|<R$ a zvolme δ tak, aby $|z|+\delta<R$.

Dále nechť h splňuje $|h|<\delta$ $\quad (\Rightarrow |z+h| < |z|+|h| < |z|+\delta < R)$

Chceme ukázat, že

$$R_h := \left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \longrightarrow 0 \quad \text{pro } |h| \to 0$$

Avšak

$$R_h = \left| \frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right|$$

$$= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{(z+h)^n}{h} - \frac{z^n}{h} - n z^{n-1} \right) \right|$$

$$(z+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k$$

$$= \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-1} \right|$$

$$\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |z|^{n-k} |h|^{k-1}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |z|^{n-k} \delta^{k-2} |h|$$

$$\leq |h| \delta^{2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| (|z|+\delta)^{n}$$

$$\leq C|h|$$ neboť studované mocninné řady konvergují absolutně v bodě $|z|+\delta < R$

Tedy $R_h \to 0$ pro $h \to 0$ a Věta 6.18 je dokázána. ▨

Věta 6.19 (O jednoznačnosti rozvoje do mocninné řady)

Nechť $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ pro $|z| < \rho$ a $\rho > 0$.

Pak $a_n = b_n$ pro $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Důkaz Dle předchozí věty i derivované řady pro $|z|<\rho$ konvergují a platí vztah (✳). Tak

$$f^{(k)}(z)\Big|_{z=0} = k!\, a_k = k!\, b_k$$, což implikuje $a_k = b_k$. ▨

Věta 6.20 (Integrace mocninné řady) Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, a nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ má poloměr konvergence $R > 0$. Pro $z: |z| < R$ položme $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Pak

$$\underline{F(z)} := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{m+1} z^{m+1} + C$$ je primitivní funkce k f.

Dk Dle Věty 6.19 platí: $(F(z))' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_m}{m+1} z^{m+1} \right)' = \sum_{m=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$. ▨

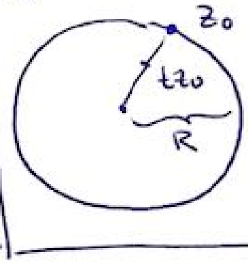
Příklad Víme, že $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ a $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$ pro $|x| < 1$.

Dle předchozí věty tak dostáváme pro $|x|<1$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

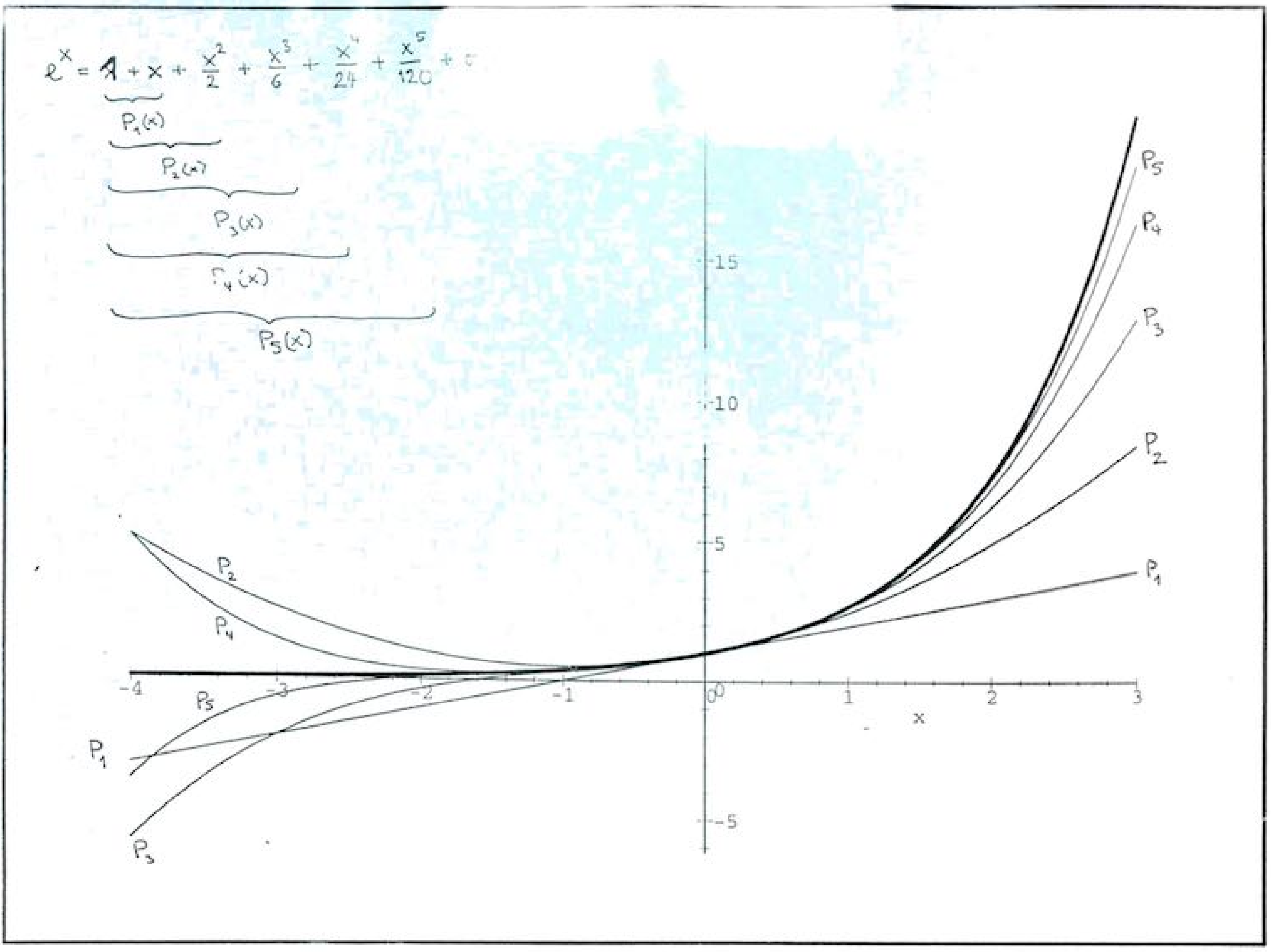
Užitečné je i následující tvrzení, které si uvedeme bez důkazu.

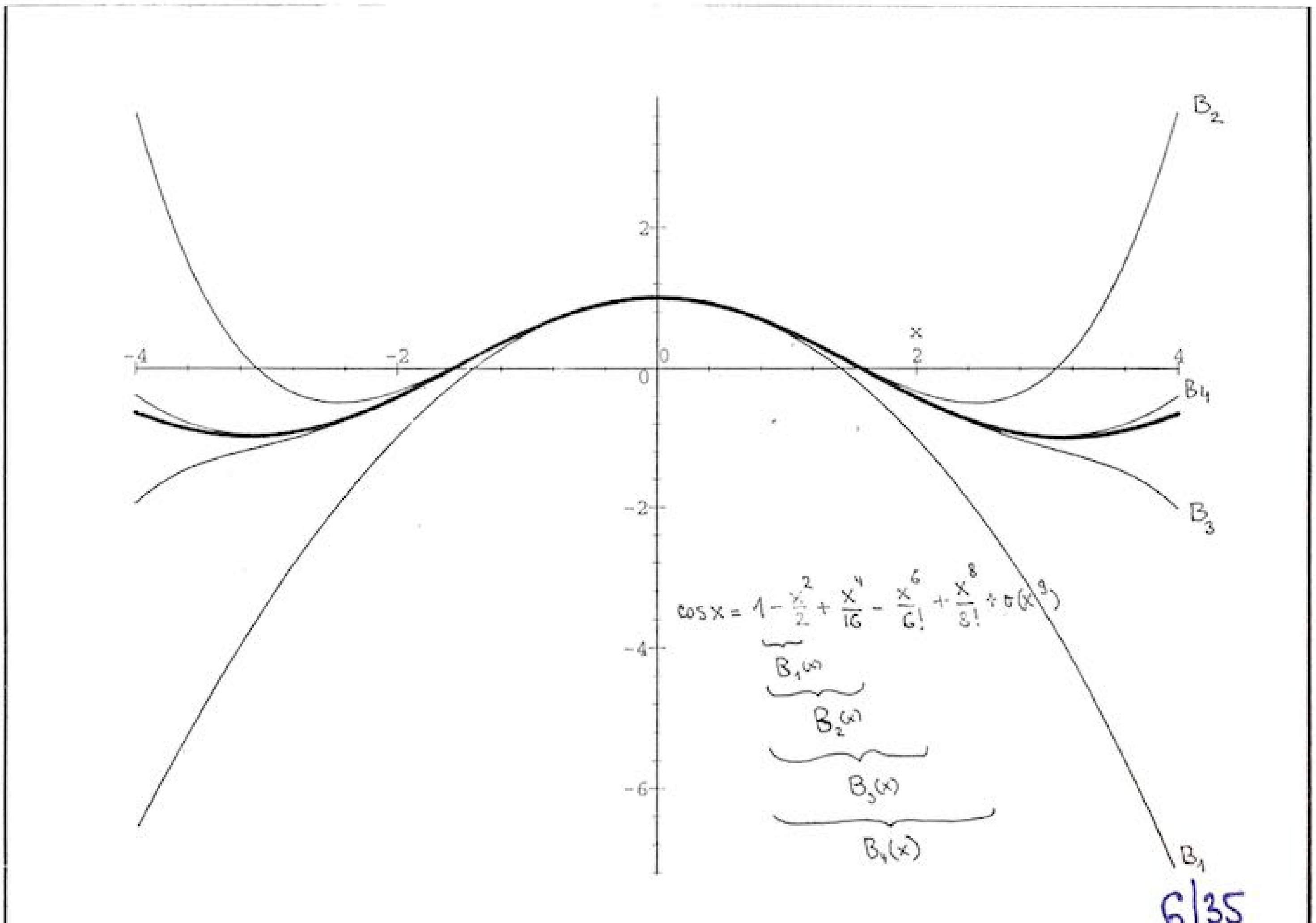
Abelova věta Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ má poloměr konvergence $R \in (0, \infty)$. Pokud pro $z_0 \in \mathbb{C} : |z_0| = R$ řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_0^k$ konverguje, pak je funkce $t \longmapsto f(t z_0)$ spojitá na $\langle 0, 1 \rangle$.



pokračování: pro $x = 1$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ konverguje, tedy $t \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ je spojité na $\langle 0,1 \rangle$. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \lim_{t \to 1-} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{t \to 1-} \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$


$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o$
P1(x)
P2(x)
P3(x)
P4(x)
P5(x)
P5
P4
P3
P2
P1
P2
P4
P5
P1
P3
15
10
5
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
x


B2
B4
B3
B1
2
-2
-4
-6
-4
-2
0
2
4
x
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + o(x^9)$
B1(x)
B2(x)
B3(x)
B4(x)

$\boxed{\text{Věta 6.21}}$ (o sinu, cosinu a exponenciále).

Existuje právě jedna funkce $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tak, že

(1) $\exp(z_1+z_2) = \exp z_1 \exp z_2 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(2) $\exp(x+iy) = \exp x(\cos y + i \sin y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(3) $\exp 0 = 1$

(4) $(\exp z)' = \exp z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

(5) $\exp|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \xrightarrow{na} (0, +\infty)$ rostoucí $\left(\Rightarrow \exists \ln : (0,+\infty) \xrightarrow{na} \mathbb{R} \text{ rostoucí} \atop \ln := (\exp)^{-1}\right)$

(6) pro $x \in \mathbb{R}^+$, $p, q \in \mathbb{N}$: $\exp\left(\frac{p}{q}\ln x\right) = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

(7) $e := \exp 1$ je iracionální (tzn. $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Existují právě dvě reálné funkce cos a sin : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a číslo $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ iracionální tak, že

(8) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(9) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(10) $\sin(-x) = -\sin x$ a $\cos(-x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(11) $\sin|_{\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle}$ je rostoucí

(12) $\sin 0 = 0$ a $\sin' x|_{x=0} = 1$.

Dk[1] Definujme pro $z \in \mathbb{C}$:

sin liché

je sudé

$$(\delta) \quad \boxed{\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} \quad \boxed{\sin z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}} \quad \boxed{\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}}$$

Komplexní funkce exp, sin, cos : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jsou definovány pomocí mocninných řad s poloměrem konvergence $R^{-1} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1}\right)^{-1} = \cancel{+}\infty$.

Dle Věty 6.18 o derivování mocninných řad

$$(\exp z)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp z$$

Opět známý trik: označ $l = n-1$ a přeznač l na n.

a také

$$\underset{\sim\sim}{(\sin z)}' = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \underset{\sim\sim}{\cos z} \quad \text{a podobně} \quad \underset{\sim\sim}{(\cos z)}' = \underline{-\sin z}$$

PROVEĎTE!

Navíc, $\exp 0 = 1$, $\sin 0 = 0$ a $(\sin' x)|_{x=0} = 1$. $\boxed{\text{Tedy (3), (4), (10) a (12) platí.}}$

[2] $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

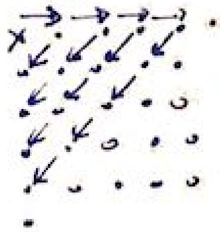
binomická věta

$$\boxed{\exp(z_1+z_2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \quad \rightarrow \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!\,k!} z_1^k z_2^{n-k}}_{c_n \text{ v definici součinu řad}}$$

Cauchyův součin řad

$$= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_1^m}{m!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!}\right) = \boxed{\exp z_1 \exp z_2}$$



a tak $\boxed{(1) \text{ platí}}$. Odsud také plyne

$$\boxed{(13) \quad \exp(x+iy) = \exp x \exp(iy)}$$

Z (8) dostáváme: $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos z + i \sin z$$

sudé vs liché

a stejně

$$\exp(-iz) = \cos z - i \sin z,$$

což implikuje jednak

$$(14) \quad \boxed{\cos z = \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}} \quad \text{a} \quad \boxed{\sin z = \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}}$$

a také, ve spojení s (13), $\boxed{\text{rovnost (2)}}$.

Vztahy (14) také implikují $\boxed{\cos^2 z + \sin^2 z = 1}$, kde využijeme vztah $\exp(-z) = \frac{1}{\exp z}$ neboť $1 = \exp 0 = \exp(z-z) = \exp z \exp(-z)$.

Dále $\boxed{\exp(i(x+y)) = \exp(ix)\exp(iy)}$ implikuje ve spojení (2) vztahy (8) a (9). Vskutku:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(x+y) + i\sin(x+y) &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \end{aligned}}$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí dostaneme $\boxed{(8) \text{ a } (9)}$.

[3] $\boxed{\text{Pro } x \in \mathbb{R}:}$

$$(\exp x)' = \exp x = \exp\left(\frac{x}{2}\right)\exp\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\exp\frac{x}{2}\right)^2 > 0 \Rightarrow \exp|_{\mathbb{R}} \text{ je rostoucí a kladná}$$

Když totiž $\exists x_0 \in \mathbb{C}: \exp x_0 = 0$, pak pro $z \in \mathbb{C}$ libovolné

$$\exp(z) = \exp(z - x_0 + x_0) = \exp(z-x_0)\exp x_0 = 0, \ \lightning$$

- Také $\lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$ a odsud $\lim_{x\to-\infty} \exp x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\exp(-x)} =$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\exp y} = 0+ .$$

$\boxed{\text{Tedy (5) je dokázáno.}}$

$\boxed{\text{Ad (6)}}$ Máme ukázat, že pro $x \in \mathbb{R}$ $\left[\exp|_{\mathbb{R}}\left(\frac{p}{q}\ln x\right)\right]^q = x^p$.

Avšak levá strana dle (1) splňuje

$$\left(\exp\left(\frac{p}{q}\ln x\right)\right)^q \underset{\substack{\uparrow \\ (1)\ q\text{-krát}}}{=} \exp|_{\mathbb{R}}\left(q\,\frac{p}{q}\ln x\right) = \exp|_{\mathbb{R}}\left(p \ln x\right) = x^p.$$

inverzní fce k $\exp|_{\mathbb{R}}$.

- Protože ze závěru kapitoly 5. víme, že π je iracionální zbývá dokázat jednoznačnost exponenciály, (11) a ověřit, že $e := \exp 1$ je iracionální!

$\boxed{\text{Ad jednoznačnost}}$ Mějme dvě funkce f, g takové, že $f' = f$ a $g' = g$, $g \neq 0$, (splňují (1)-(4), speciálně) a $f(0) = g(0) = 1$. Pak pro $z \in \mathbb{C}$: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{fg - fg}{g^2} = 0$

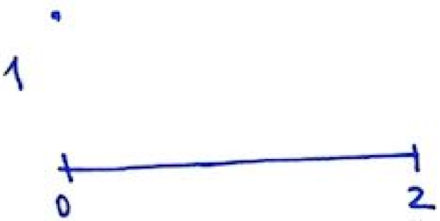
tedy $\frac{f(z)}{g(z)} =$ konst. a protože $\frac{f(0)}{g(0)} = 1$ tak $f(z) = g(z)$ pro $\forall z \in \mathbb{C}$.

$\boxed{\text{Ad (11)}}$ Víme $\cos 0 = 1$. Dále $\cos 2 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{4}{2} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \dots$

$$< 1 - 2 + \frac{2^4}{4!}\left(1 + \frac{2^2}{6\cdot 5} + \frac{2^4}{8\cdot7\cdot6\cdot5} + \frac{2^6}{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5} + \dots\right)$$

$$< -1 + \frac{16}{24}\left(1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^4 + \left(\frac{2}{5}\right)^6 + \dots\right)$$

$$= -1 + \frac{2}{3}\,\frac{1}{1 - \frac{4}{25}} = -1 + \frac{50}{63} < 0.$$



Víme, že $\cos : \langle 0, 2\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která je kladná v 0 a záporná v 2. Z Darbouxovy věty tak plyne $\exists\, c > 0$ tak, že $\cos c = 0$. Buď

$$\gamma := \inf\{c \in (0,2);\ \cos c = 0\} \quad \text{a položme } \pi := 2\gamma.$$

Protože $(\sin x)' = \cos x > 0$ na $(0, \frac{\pi}{2})$, tak $\sin x|_{\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle}$ roste.

Ze spojitosti $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ a ze vztahu

$\cos^2 + \sin^2 = 1$ plyne $\boxed{\sin\frac{\pi}{2} = 1}$ ■

---

zde jsme využili vzorec $\boxed{\ln xy = \ln x + \ln y}$, který plyne z

$\exp|_{\mathbb{R}}(\ln y + \ln x) \overset{(1)}{=} \exp|_{\mathbb{R}} \ln x \exp \ln y = xy$, neb $p \ln x = \underbrace{\ln x + \dots + \ln x}_{p\text{-krát}} = \ln \underbrace{x \cdots x}_{p\text{-krát}} = \ln x^p$

Ad $e := \exp 1$ je iracionální

Když $e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, nesoudělná, $q > 2$, vezmeme $k > q$, $k \in \mathbb{N}$.

Protože $\boxed{e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} + \frac{e^{\xi}}{(k+1)!}, \text{ kde } \xi \in (0,1).}$ $1 < e^{\xi} < e < 3$.

tak

$$k!\frac{p}{q} = k!e = \underbrace{2k! + \frac{k!}{2!} + \dots \frac{k!}{k!}}_{L} + \frac{e^{\xi}}{k+1}$$

$$= L + \frac{e^{\xi}}{k+1} \quad \text{kde } L \in \mathbb{N}.$$

neboli

$\frac{e^{\xi}}{k+1} = k!\frac{p}{q} + L \in \mathbb{N}$, ale volbou $k \gg 1$ dostaneme

$\frac{e^{\xi}}{k+1} \in (0,1)$, což dává ↯ s tím, že $\frac{e^{\xi}}{k+1}$ má být přirozené číslo. ▨

EXPONENCIÁLA MATICE Pro $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ nebo $\mathbb{C}^{d \times d}$ definujeme

$$\boxed{\exp \mathbb{A} = e^{\mathbb{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^k}{k!} = \mathbb{I} + \mathbb{A} + \frac{\mathbb{A}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbb{A}^k}{k!} + \dots}$$

Definujeme $\|\mathbb{A}\| := \sup_{\substack{\vec{x} \in \mathbb{R}^d \\ |\vec{x}|_{\mathbb{R}^d} \leq 1}} |\mathbb{A}\vec{x}|_{\mathbb{R}^d}$

NORMA MATICE

$\|\cdot\| : \text{matice} \longmapsto \text{číslo} \geq 0$

nejmenší $C > 0$ splňující
$|\mathbb{A}\vec{x}|_{\mathbb{R}^d} \leq C|\vec{x}|_{\mathbb{R}^d}$

$\vec{z} \in \mathbb{R}^d$: $|\vec{z}|_{\mathbb{R}^d} := \left(\sum_{i=1}^{d} z_i^2\right)^{1/2}$

Platí: $|\mathbb{A}\underline{\mathbb{B}x}|_{\mathbb{R}^d} \leq \|\mathbb{A}\| \, |\mathbb{B}\vec{x}|_{\mathbb{R}^d} \leq \|\mathbb{A}\| \, \|\mathbb{B}\| \, |\vec{x}|_{\mathbb{R}^d}$

$$\Rightarrow \boxed{\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| \, \|\mathbb{B}\|}$$

Speciálně: $\|\mathbb{A}^2\| \leq \|\mathbb{A}\|^2$ a $\|\mathbb{A}^k\| \leq \|\mathbb{A}\|^k$

Definice Řada, která definuje $\exp \mathbb{A}$, konverguje, pokud $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\mathbb{A}\|^k}{k!}$ konverguje

- $\|\exp \mathbb{A}\| = \left\|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^k}{k!}\right\| = \lim_{n \to \infty} \left\|\sum_{k=0}^{m} \frac{\mathbb{A}^k}{k!}\right\| \leq \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{\|\mathbb{A}\|^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\mathbb{A}\|^k}{k!} = \exp \|\mathbb{A}\|$
- Platí: $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} \Rightarrow \exp(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \exp \mathbb{A} \exp \mathbb{B}$

- Pro $\mathbb{A}$ diagonální, tzn. $\mathbb{A} := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_d \end{pmatrix}$,

je $\mathbb{A}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_d^k \end{pmatrix}$. Pak dle definice

$$\underline{\underline{\exp \mathbb{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d^2 \end{pmatrix} + \dots + \frac{1}{k!}\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d^k \end{pmatrix} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\lambda_1+\frac{\lambda_1^2}{2}+\frac{\lambda_1^3}{3!}+\dots & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 1+\lambda_2+\frac{\lambda_2^2}{2}+\frac{\lambda_2^3}{3!}+\dots & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1+\lambda_d+\frac{\lambda_d^2}{2}+\frac{\lambda_d^3}{3!}+\dots \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & e^{\lambda_2} & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_d} \end{pmatrix}}}$$

- Pro $\mathbb{A}$ diagonalizovatelnou, tzn. pro $\mathbb{A}$ splňující $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}$, kde $\mathbb{D}$ je diagonální,

platí: $\mathbb{A}^2 = \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}}_{\mathbb{A}}\underset{\mathbb{I}}{\,}\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}}_{\mathbb{A}} = \mathbb{B}\mathbb{D}^2\mathbb{B}^{-1}$ a podobně $\mathbb{A}^k = \mathbb{B}\mathbb{D}^k\mathbb{B}^{-1}$.

Tedy $\boxed{\exp \mathbb{A} = \exp(\mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}) = \mathbb{B}(\exp \mathbb{D})\mathbb{B}^{-1}.}$

- Tuto konstrukci lze rozšířit i pro obecnější struktury jako jsou (lineární) operátory, tj. zobrazení z prostoru fcí do prostoru funkcí.

— . —

§8 FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

8.1 Prostor $\mathbb{R}^d$

Buď $d\in\mathbb{N}$, $d\geq 2$. Prostorem $\mathbb{R}^d$ rozumíme všechny možné d-tice reálných čísel, tzn.

$$\mathbb{R}^d := \{(x_1,\dots,x_d);\ x_i\in\mathbb{R} \text{ pro } i=1,2,\dots,d\}.$$

Prvky $\mathbb{R}^d$ se buď značí tučně $\mathbf{x}$, nebo se šipkou $\vec{x}$, nebo s vlnovkou $\underset{\sim}{x}$, nebo se píše $x=(\xi_1,\dots,\xi_d)\in\mathbb{R}^d$ či $x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$.

Víme z LA, že $\mathbb{R}^d$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$, kde

▶ $\vec{x}+\vec{y} \overset{df}{=} (x_1+y_1,\dots,x_d+y_d)$ pro $\forall x,y\in\mathbb{R}^d$

$x=(x_1,\dots,x_d)$

▶ $\lambda\vec{x} \overset{df}{=} (\lambda x_1,\dots,\lambda x_d)$

$y=(y_1,\dots,y_d)$

Tak $(\mathbb{R}^d,+)$ je Abelova grupa s nulovým prvkem $\vec{0}=(0,0,\dots,0)$.

Na rozdíl od $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$, na $\mathbb{R}^d$ není definován součin, který by z $\mathbb{R}^d$ vytvořil těleso.

"Jistým" zobecněním součinu na $\mathbb{R}$ je skalární součin $\vec{x}\cdot\vec{y}$, který však $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^d$ nepřiřadí prvek z $\mathbb{R}^d$, ale číslo.

Def. Buď $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^d$, pak $\sum_{i=1}^{d} x_iy_i$ se nazývá skalární součin $\vec{x}$ a $\vec{y}$.

Píšeme
$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Einsteinova}\\ \text{sumační konvence}}}{=} x_i y_i \qquad \text{či} \quad (\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$$

Věta 8.1 (Vlastnosti skalárního součinu) Platí:

(S1) Pro každé $\vec{x}_1,\vec{x}_2$ a $\vec{y}\in\mathbb{R}^d$ a pro každé $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$:
$$(\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2,\vec{y}) = \alpha(\vec{x}_1,\vec{y})+\beta(\vec{x}_2,\vec{y})$$
LINEARITA

(S2) Pro každé $\vec{x}_1,\vec{x}_2\in\mathbb{R}^d$:
$$(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = (\vec{x}_2,\vec{x}_1)$$
SYMETRIE

(S3) Pro každé $\vec{x}\in\mathbb{R}^d$: $(\vec{x},\vec{x})\geq 0$
$$\text{a } (\vec{x},\vec{x})=0 \iff \vec{x}=0$$

Dk plyne přímo z definice. ▨

Definujme zobrazení $|\cdot|_E : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+_0$ předpisem

$$\underbrace{|\vec{x}|_E = \sqrt{(\vec{x},\vec{x})} = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}} = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)^{1/2}}$$

Euklidovská

norma indukovaná skalárním součinem

Platí:

$\boxed{\text{Věta } 8.2}$ ($|\cdot|_E$ splňuje vlastnosti normy) Platí:

(N1) $|\vec{x}|_E \geq 0$ pro $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^d$ a $|\vec{x}|_E = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$ $\boxed{\text{NEZÁPORNOST NORMY}}$

(N2) Pro libovolné $\lambda \in \mathbb{R}$ a $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$: $|\lambda \vec{x}|_E = |\lambda|\,|\vec{x}|_E$ $\boxed{\text{1-HOMOGENITA}}$

(N3) Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$: $|\vec{x}+\vec{y}|_E \leq |\vec{x}|_E + |\vec{y}|_E$ $\boxed{\Delta\text{-NEROVNOST}}$

Také platí Cauchy-Schwarzova nerovnost:

(C-S) Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$: $|(\vec{x},\vec{y})| \leq |\vec{x}|_E |\vec{y}|_E$
přičemž rovnost nastane právě když $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou LZ.

lineárně závislé

Dk • (N1) a (N2) plyne z definice $(\vec{x},\vec{y})$ a (S3).

• $\boxed{\text{Ad (C-S)}}$ · Je-li $\vec{y} = \vec{0}$, pak $(\vec{x},\vec{0}) = (\vec{x},\vec{0}+\vec{0}) = (\vec{x},\vec{0}) + (\vec{x},\vec{0})$
a tak $(\vec{x},\vec{0}) = 0$.

Tedy (C-S) platí pro $\vec{y} = \vec{0}$.

· Je-li $\vec{y} \neq 0$, pak $|\vec{y}|_E \neq 0$ a máme pro $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$ libovolné:

(♣) $0 \leq (\vec{x}+t\vec{y}, \vec{x}+t\vec{y}) = |\vec{x}|_E^2 + 2t(\vec{x},\vec{y}) + t^2 |\vec{y}|_E^2 = f(t)$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{(\vec{x},\vec{y})}{|\vec{y}|^2}$ a pro toto t dostáváme z (♣):

$$0 \leq |\vec{x}|_E^2 - \frac{2(\vec{x},\vec{y})^2}{|\vec{y}|^2} + \frac{(\vec{x},\vec{y})^2}{|\vec{y}|^2} = |\vec{x}|_E^2 - \frac{(\vec{x},\vec{y})^2}{|\vec{y}|_E^2}$$

což dává (C-S).

Jsou-li $\vec{x}$ a $\vec{y}$ lineárně nezávislé, pak $\vec{x}+t\vec{y} \neq 0$, a první nerovnost v (♣) je ostrá. Jsou-li naopak $\vec{x}$ a $\vec{y}$ lineárně závislé, pak $\vec{x} = s\vec{y}$ a

$$|(\vec{x},\vec{y})| = |(s\vec{y},\vec{y})| = |s|(\vec{y},\vec{y}) = |s||\vec{y}|_E^2 = |s||\vec{y}|_E|\vec{y}|_E = |s\vec{y}|_E|\vec{y}|_E = |\vec{x}|_E|\vec{y}|_E,$$

a rovnost v (C-S) platí.

- zbývá dokázat Δ-nerovnost. Využijeme-li (C-S) nerovnost, máme

$$|\vec{x}+\vec{y}|_E^2 = (\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) = (\vec{x},\vec{x}) + 2(\vec{x},\vec{y}) + (\vec{y},\vec{y})$$
$$\underset{C-S}{\leq} |\vec{x}|_E^2 + 2|\vec{x}|_E|\vec{y}|_E + |\vec{y}|_E^2$$
$$= \left(|\vec{x}|_E + |\vec{y}|_E\right)^2,$$

což dává (N3).

<u>Pozorování</u> ① Ukažte, že skalární součin v $\mathbb{R}^d$ je invariantní vzhledem k otočení (reprezentovaný ortogonální maticí Q, splňující $QQ^T = \mathbb{I}$).

<u>Řešení</u> Pro $\vec{x}^* = Q\vec{x}$, $\vec{y}^* = Q\vec{y}$ platí:

$$(\vec{x}^*,\vec{y}^*) = (Q\vec{x},Q\vec{y}) = \sum_{i=1}^{d} \underbrace{Q_{is}x_s}\,\underbrace{Q_{ik}y_k}$$

sumační konvence (sčítání přes s a k od 1 do d)

$$\overset{\text{definice transponované matice}}{=} \sum_{i=1}^{d} (Q^T)_{si} Q_{ik} y_k x_s$$
$$\underset{Q^TQ=\mathbb{I}}{=} \delta_{sk} y_k x_s = \sum_{k=1}^{d} y_k x_k$$
$$= (\vec{x},\vec{y}).$$

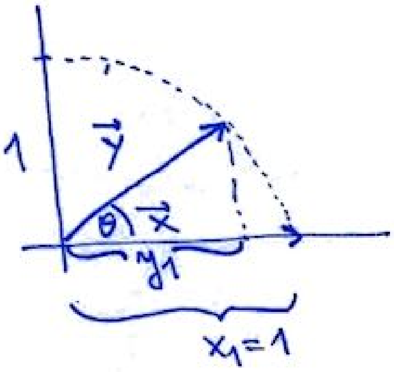
▨

② Buď $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^d$, $|\vec{x}|_E = |\vec{y}|_E = 1$. Pak vhodným pootočením lze ztotožnit $\vec{x}$ s vektorem $(1,0,\dots,0)$ a vektor $\vec{y}$ <u>umístit</u> do roviny dané vektory $(1,0,..,0)$ a $(0,0,..,1)$.

Pak (viz obrázek)

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = y_1 = \cos\theta,$$

kde θ je úhel sevřený mezi vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$.



Pro libovolné $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^d$, pak

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|_E}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|_E} = \cos\theta,$$ což implikuje

$$(\vec{u},\vec{v}) = \cos\theta\,|\vec{u}|_E\,|\vec{v}|_E.$$

viz Pozorování ①

Pomocí normy lze definovat <u>vzdálenost</u> (neboli <u>metriku</u>)

$$\text{dist}_E(\vec{x},\vec{y}) := |\vec{x}-\vec{y}|_E .$$

Platí:

$\boxed{\text{Věta } 8.3}$ (Vlastnosti metriky)

(M1) $\forall \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^d$: $\text{dist}_E(\vec{x},\vec{y}) \geq 0 \ \wedge\ \text{dist}_E(\vec{x},\vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{y}$ $\boxed{\text{NEZÁPORNOST}}$

(M2) $\forall \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^d$: $\text{dist}_E(\vec{x},\vec{y}) = \text{dist}_E(\vec{y},\vec{x})$ $\boxed{\text{SYMETRIE}}$

(M3) $\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathbb{R}^d$: $\text{dist}_E(\vec{x},\vec{y}) \leq \text{dist}_E(\vec{x},\vec{z}) + \text{dist}_E(\vec{z},\vec{y})$ $\boxed{\Delta\text{-OVÁ NEROVNOST}}$

(Dk) (Mi) plynou z (Ni) ve Větě 9.2. ▨

$\boxed{\text{Zobecněné struktury}}$

$\boxed{\text{pre-Hilbertův prostor}}$ neboli prostor se skalárním součinem je jakýkoliv vektorový prostor H, na kterém je definováno zobrazení

$$(\cdot,\cdot)_H : H\times H \to \mathbb{R}$$

splňující (S1)-(S3), tj. linearitu, symetrii a nezápornost.

<u>Příklad</u> ① Uvažujme prostor $l_2 := \{\{x_i\}_{i=1}^{\infty};\ \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$ a definujme pro $x,y\in l_2$, tzn. $x=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $y=\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$

$$(x,y)_H := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

Pak $(l_2,(\cdot,\cdot)_H)$ je pre-Hilbertův. Ověřte.

② Uvažujte $R((a,b))$ prostor Riemannovsky integrovatelných funkcí na (a,b). Ukažte, že $R((a,b))$ je vektorový prostor. Pro $f,g\in R((a,b))$, definujme

$$(f,g)_H := (R)\int_a^b f(x)g(x)\,dx .$$

Q : Proč není $(f,g)_H$ skalární součin na $R((a,b))$?

Vždy lze v pre-Hilbertově prostoru definovat $\|\cdot\|_H : H \to \mathbb{R}_0^+$ předpisem

$$\|u\|_H := \sqrt{(u,u)_H}$$

Pak $\|\cdot\|_H$ splňuje vlastnosti (N1) a (N2) jednoduše. Opakujeme-li důkaz (C-S) nerovnosti a následné Δ-nerovnosti úplně stejně jako větě 8.2, pozorujeme, že

$\|\cdot\|_H$ je norma na prostoru H.

Říkáme, že $\|\cdot\|_H$ je **norma indukovaná skalárním součinem**

Normovaný prostor Je-li X vektorový prostor, na kterém existuje zobrazení $\|\cdot\|_X : X \to \mathbb{R}_0^+$ splňující (N1)-(N3), pak $(X, \|\cdot\|_X)$ se nazývá **normovaný prostor**

Příklad ① Prostor $C(\langle a,b\rangle)$ je vektorový prostor ∞-dimenze neboť $x^k \in C(\langle a,b\rangle)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. a ze vztahu $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i x^i = 0$ pro $\forall x \in \langle a,b\rangle$ plyne $\lambda_i = 0$ a tak $\{1, x, \dots, x^k, \dots\}$ jsou lineárně nezávislé.

Definujme $\|f\|_{C(\langle a,b\rangle, \max)} := \|f\|_\infty := \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f(x)|$

Pak $\|f\|_\infty$ je norma, OVĚŘTE, a prostor

$$\left(C(\langle a,b\rangle), \|\cdot\|_\infty\right)$$ je normovaný prostor.

② Definujeme-li na stejném prostoru

$$\|f\|_{C(\langle a,b\rangle, int)} := \|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

pak $\|f\|_1$ je na $C(\langle a,b\rangle)$ opět norma.

Prostor $\left(C(\langle a,b\rangle), \|\cdot\|_1\right)$ je opět normovaný prostor.

nepředpokládáme, že dim $H < +\infty$

Tvrzení Buď H vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, na kterém je definován skalární součin $(\cdot,\cdot)_H : H \times H \to \mathbb{R}$ splňující

$(S1)_{\mathbb{C}}$ $\forall\, x_1, x_2 \in H$ a $y \in H$ a $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$(\alpha x_1 + \beta x_2, y)_H = \alpha (x_1, y)_H + \beta (x_2, y)_H$$

$(S2)_{\mathbb{C}}$ $\forall\, x, y \in H$: $(x,y)_H = \overline{(y,x)_H}$ kde $\bar{z} := z_1 - i z_2$ pro $z = z_1 + i z_2$

$(S3)_{\mathbb{C}}$ $\forall\, x \in H$: $(x,x)_H \geq 0$ & $(x,x)_H = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Definujme $|\cdot|_H := \sqrt{(\cdot,\cdot)_H}$ tj. $|x|_H = (x,x)_H^{1/2}$.

Pak $|\cdot|_H : H \to \mathbb{R}_0^+$ vždy splňuje vlastnosti normy (N1)–(N3).

Dk $\boxed{\text{Ad (N1)}}$ $\boxed{|x|_H \geq 0}$ a $\boxed{|x|_H = 0 \Leftrightarrow x = 0}$ plyne resp. je ekvivalentní $(S3)_{\mathbb{C}}$

$\boxed{\text{Ad (N2)}}$

$$|\lambda x|_H^2 = (\lambda x, \lambda x)_H \underset{(S1)_{\mathbb{C}}}{=} \lambda (x, \lambda x)_H \underset{(S2)_{\mathbb{C}}}{=} \lambda \overline{(\lambda x, x)}_H \underset{(S1)_{\mathbb{C}}}{=} \lambda \bar{\lambda} \overline{(x,x)}_H$$

$$\underset{(S3)_{\mathbb{C}}}{=} \lambda\bar{\lambda}(x,x)_H = |\lambda|_{\mathbb{C}}^2 |x|_H^2 \text{ , což implikuje}$$

$$|\lambda x|_H = |\lambda|_{\mathbb{C}} |x|_H \quad \text{pro } \forall \lambda \in \mathbb{C}\ \forall x \in H.$$

$\boxed{\text{Ad (N3)}}$

$$|x+y|_H^2 = (x+y, x+y)_H = (x,x)_H + (x,y)_H + (y,x)_H + (y,y)_H$$

$$\underset{(S2)_{\mathbb{C}}}{=} |x|_H^2 + \underbrace{(x,y)_H + \overline{(x,y)}_H}_{z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z} + |y|_H^2 = |x|_H^2 + 2\,\mathrm{Re}(x,y)_H + |y|_H^2$$

$$\leq |x|_H^2 + 2|(x,y)_H|_{\mathbb{C}} + |y|_H^2 \leq |x|_H^2 + 2|x|_H|y|_H + |y|_H^2 = (|x|_H + |y|_H)^2 \quad ▨$$

$\boxed{\text{Cauchy-Schwarzova } \leq}$

$$\forall x, y \in H: \ |(x,y)_H| \leq |x|_H |y|_H$$

Dk • $\boxed{y = 0}$ $\Rightarrow (x,0) = \overline{(0,x)}$ a $(0,x) = (0+0,x) = (0,x) + (0,x) \Rightarrow (0,x) = 0$ a (C-S) platí.

• $\boxed{y \neq 0}$ $\lambda \in \mathbb{C}$

$$0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y)_H = (x,x)_H + \lambda (y,x) + \overline{\lambda (y,x)} + |\lambda|_{\mathbb{C}}^2 (y,y)_H$$

$$= (x,x)_H + \lambda \overline{(x,y)} + \bar{\lambda}(x,y) + |\lambda|_{\mathbb{C}}^2 (y,y)_H$$

Volbou $\lambda = -\frac{(x,y)}{(y,y)_H}$:

$$0 \leq (x,x)_H - \frac{(x,y)\overline{(x,y)}}{(y,y)_H} - \frac{\overline{(x,y)}_H (x,y)_H}{(y,y)_H} + \frac{\overset{= |(x,y)_H|^2}{(x,y)_H \overline{(x,y)}_H}}{(y,y)_H}$$

což dává tvrzení. ▨

8/5*

Definice Buď X normovaný prostor s normami $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$. Řekneme, že tyto normy jsou ekvivalentní pokud existují $c_1, c_2 > 0$ tak, že $\forall x \in X$

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

Příklad • Normy $\|f\|_\infty$ a $\|f\|_1$ NEJSOU v $C(\langle a,b\rangle)$ ekvivalentní.

METRICKÝ PROSTOR Buď M nějaká (neprázdná) množina objektů,*) na které lze zavést zobrazení

$$\rho : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$

splňující (M1) - (M3). Pak (M,ρ) nazveme metrický prostor

Příklad • $C(\langle a,b\rangle)$ je metrický prostor s metrikou $\rho_\infty(f,g) := \|f-g\|_\infty = \max\limits_{x \in \langle a,b\rangle} |f(x)-g(x)|$

• $C(\langle a,b\rangle)$ je metrický prostor s metrikou $\rho_1(f,g) := \|f-g\|_1 = \int_a^b |f(x)-g(x)|dx$

Je-li $X \overset{=(X,\|\cdot\|_X)}{}$ normovaný prostor, pak X je (vektorový) metrický prostor s metrikou

$$\rho(x,y) := \|x-y\|_X$$

Tato metrika se nazývá metrika (vzdálenost) indukovaná normou.

---

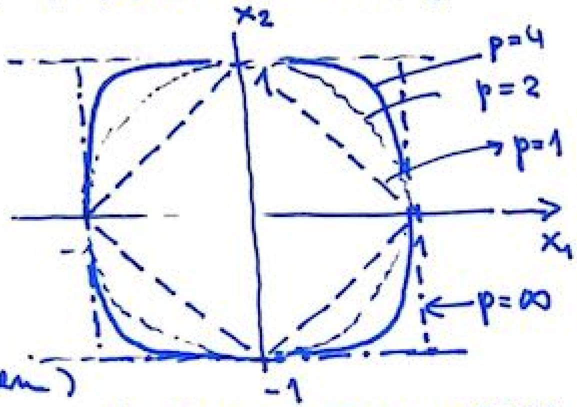
*) Nemusí tedy M být vektorový prostor.

Definujme v $\mathbb{R}^d$ následující zobrazení pro $p \in \langle 1, +\infty \rangle$:

$\boxed{1 \le p < +\infty}$: $$|\vec{x}|_p := \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

$\boxed{p = +\infty}$ $$|\vec{x}|_\infty := \max_{i=1,2,\dots,d} |x_i|$$

Pak $|\cdot|_p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_0^+$ jsou normy. Skutečně 1-homogenita a nezápornost plynou přímo z definice norem (OVĚŘTE!), zatímco Δ-nerovnost plyne z Minkowského nerovnosti, kterou ukážeme za chvíli. Všimněte si, jak vypadají jednotkové koule v těchto normách, tj. množiny $B_1^p(0) := \{\vec{x}\in\mathbb{R}^d ; |\vec{x}|_p \le 1\}$.



Všimněte si také, že $|\cdot|_2 = |\cdot|_E$ (jen tato norma je generována skalárním součinem)

Normě $|\cdot|_\infty$ se někdy říká supremová,
Normě $|\cdot|_1$ —"— součtová.

VŠECHNY TYTO NORMY JSOU VZÁJEMNĚ EKVIVALENTNÍ.

Na závěr si ukážeme tři nerovnosti, které vedou k Δ-nerovnosti.

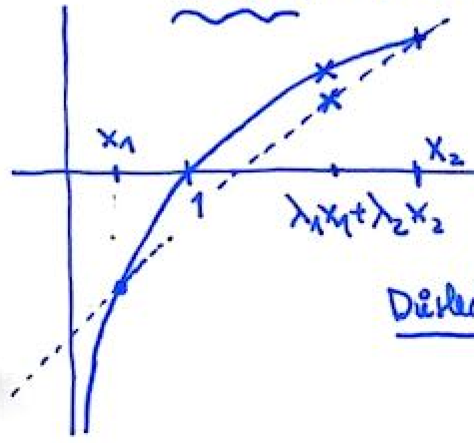
Tvrzení (Youngova nerovnost) Pro $a,b>0$ platí:

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$ kde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) $p,q \in 1,+\infty$

Někdy se píše $q=p'$; $p'=\frac{p}{p-1}$.
p,p' duální exponenty.

Dk Plyne z (ryzí) monotónie a konkávity logaritmu:

$$\underbrace{\ln(ab)} = \ln a + \ln b = \underbrace{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q}_{\lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2} \le \underbrace{\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right)}_{\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)}$$



a aplikujme exponenciálu. ■

Důsledek: Pro $A,B>0$, $\varepsilon>0$ libovolné:

$$AB \le \varepsilon A^p + \frac{p-1}{\varepsilon^{1/(p-1)}}\left(\frac{B}{p}\right)^{p'} \qquad p' := \frac{p}{p-1}$$

Tvrzení (Hölderova nerovnost) Pro $p \in \langle 1, +\infty \rangle$, $q = \frac{p}{p-1}$ a pro $\boxed{\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d: \quad |(\vec{x}, \vec{y})| \leq |\vec{x}|_p |\vec{y}|_q}$

speciální případ $\boxed{p=2}$: (C-S) $\leq$

(Dk) Je-li: $\vec{x} = \vec{0}$ nebo $\vec{y} = \vec{0}$, pak zjevně triviální.

Je-li: $\boxed{p=1}$, pak

$$|(\vec{x}, \vec{y})| = \left| \sum_{i=1}^{d} x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^{d} |x_i||y_i| \leq \max_{i=1,\dots,d} |y_i| \sum_{i=1}^{d} |x_i|$$

$$= |\vec{x}|_1 |\vec{y}|_\infty .$$

Podobně pro $\boxed{p=\infty.}$

Je-li $\boxed{1 < p < +\infty}$, pak $\boxed{\text{a } |\vec{x}|_p \neq 0 \text{ a } |\vec{y}|_q \neq 0}$

$$\underbrace{\frac{|(\vec{x}, \vec{y})|}{|\vec{x}|_p |\vec{y}|_q}} \leq \sum_{i=1}^{d} \frac{|x_i|}{|\vec{x}|_p} \frac{|y_i|}{|\vec{y}|_q} \overset{\substack{\text{Young} \\ \downarrow}}{\leq}$$

$$\leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{d} \frac{|x_i|^p}{|\vec{x}|_p^p} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{d} \frac{|y_i|^q}{|\vec{y}|_q^q}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \underbrace{1} \qquad ▨$$

Tvrzení (Minkowského nerovnost)

Pro $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$ a $p \in \langle 1, +\infty \rangle$ platí:

$$|\vec{x} + \vec{y}|_p \leq |\vec{x}|_p + |\vec{y}|_p$$

(Dk) Pro $\boxed{p=1}$ a $\boxed{p=\infty}$ je důkaz jednodušší (SAMI).

Pro $\boxed{p=2}$ jsme již nerovnost dokázali. Nyní předvedeme již obecnější důkaz platný pro p: $\boxed{1 < p < +\infty}$.

$$\underbrace{|x_i + y_i|^p = |x_i + y_i| \, |x_i + y_i|^{p-1}}_{\text{Trik}}$$

$$|\vec{x} + \vec{y}|_p^p = \sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{d} |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{d} |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} |\vec{x}|_p \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} + |\vec{y}|_p \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq \left(|\vec{x}|_p + |\vec{y}|_p \right) |\vec{x} + \vec{y}|_p^{p-1},$$ což dává tvrzení. ▨

8.2 Topologie $\mathbb{R}^d$

Def. Buď $\varepsilon > 0$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^d$. Pak **ε-okolím bodu $\vec{x}_0$** nazveme množinu $U_\varepsilon(x_0)$ definovanou: $U_\varepsilon(\vec{x}_0) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d ; |\vec{x} - \vec{x}_0|_\infty < \varepsilon\}$

Pozorování
- $U_\varepsilon(\vec{x}_0)$ je krychle o straně 2ε
- $\vec{x}_0 \in U_\varepsilon(\vec{x}_0)$
- Je-li $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, pak $U_{\varepsilon_1}(\vec{x}_0) \subset U_\varepsilon(\vec{x}_0)$

> Ze všech $|\cdot|_p$ norem, $1 \leq p \leq \infty$, jsme zvolili $|\cdot|_\infty$ normu, neboť s ní se nejlépe počítá. Častější volba je $|\cdot|_2$ norma.

Def. (VNITŘNÍ BOD MNOŽINY) Buď $M \subset \mathbb{R}^d$. Řekneme, že $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ je **vnitřní bod M** pokud $(\exists \varepsilon > 0)$ $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset M$.

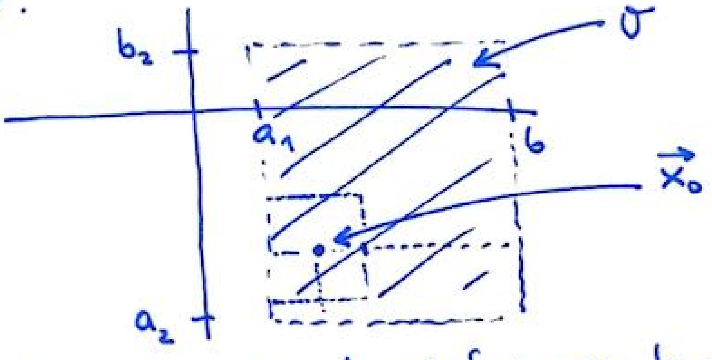
Def. (OTEVŘENÁ MNOŽINA) Řekneme, že $M \subset \mathbb{R}^d$ je **otevřená** pokud každý bod M je vnitřní. Neboli:

$$\boxed{M \subset \mathbb{R}^d \text{ je otevřená } \overset{df.}{\equiv} \forall \vec{x} \in M \ \exists \varepsilon > 0 \text{ tak, že } U_\varepsilon(\vec{x}) \subset M.}$$

Příklad Nechť $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^d$, $a_k < b_k$, $k = 1, \dots, d$. Pak $O := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d ; a_k < x_k < b_k, k = 1, 2, \dots, d\}$ je otevřená v $\mathbb{R}^d$.

ⒹⓀ Pro $\vec{x}_0 \in O$ libovolné položíme $\varepsilon = \min_{k=1,2,\dots,d} \{x_{0k} - a_k, b_k - x_{0k}\}$

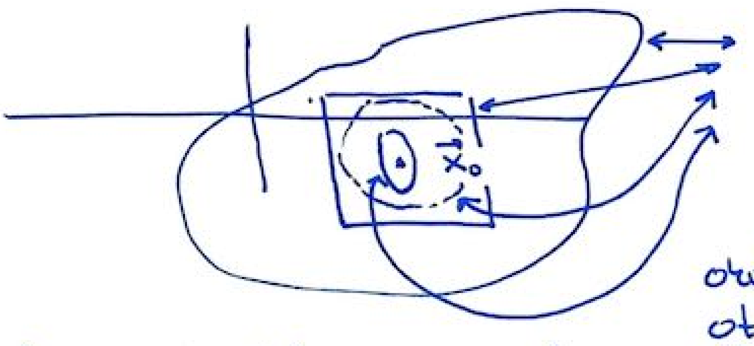
Pak $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset O$.



Také jsem mohl definovat $\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{k=1,\dots,d} \{x_{0k} - a_k, b_k - x_{0k}\}$

Definice Okolím bodu $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ rozumíme libovolnou OTEVŘENOU množinu obsahující $\vec{x}_0$.

Příklad



tyto čtyři množiny (brambora, čtverec, kruh a elipsa) jsou okolí $\vec{x}_0$, pokud jsou otevřené. Např.

$\check{C}_1 : \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d ; |\vec{x} - \vec{x}_0| < \frac{1}{2}\}$ je otevřená, ale

$\check{C}_2 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d ; |\vec{x} - \vec{x}_0| \leq \frac{1}{2}\}$ otevřená není.

Věta 8.4 Systém všech otevřených množin v $\mathbb{R}^d$ má následující vlastnosti:

(T1) $\emptyset$, $\mathbb{R}^d$ jsou otevřené

(T2) sjednocení libovolného počtu otevřených množin je otevřené

(T3) průnik konečného počtu otevřených množin je otevřený

Dk **Ad (T1)** triviální

Ad (T2) Jsou-li G_α otevřené a $\vec{x}_0 \in \bigcup_\alpha G_\alpha$, pak $\exists\, \alpha_0$ tak, že $\vec{x}_0 \in G_{\alpha_0}$. Protože G_{α_0} je otevřená, tak existuje $U_\varepsilon(\vec{x}_0)$, ε-ové okolí, tak, že $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset G_{\alpha_0}$. Pak ale $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$.

[α je index, který vybírám z nějaké množiny indexů, např. $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \Gamma$, Γ množina indexů jisté mohutnosti]

Ad (T3) Buď $\vec{x}_0 \in \bigcap_{i=1}^m G_i$, G_i otevřená. Pak $\vec{x}_0 \in G_i$ pro $i = 1, 2, \dots, m$ a existují $\varepsilon_i > 0$ tak, že $U_{\varepsilon_i}(\vec{x}_0) \subset G_i$.

Definujme $\varepsilon := \min_{i=1,\dots,m} \varepsilon_i$. Pak $\boxed{U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset \bigcap_{i=1}^m G_i}$

POZOR!! $\bigcap_{i=1}^\infty G_i$ nemusí být otevřená. Volme např.

$G_i := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d ; |\vec{x}|_\infty < \frac{1}{k}\}$. Pak $\bigcap_{i=1}^\infty G_i = \{0\}$.

D E F I N I C E

TOPOLOGICKÝ PROSTOR Buď X libovolná množina, na které uvažujeme (tzn. máme nebo zavedeme) systém $\mathcal{T}$ podmnožin X takových, že

(T1)* $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(T2)* Jsou-li $G_\alpha \in \mathcal{T}$, pak $\bigcup_\alpha G_\alpha \in \mathcal{T}$

(T3)* Jsou-li $G_i \in \mathcal{T}$, $\underbrace{i=1,\dots,m}_{\text{KONEČNĚ}}$, pak $\bigcap_{i=1}^{m} G_i \in \mathcal{T}$.

Pak $\mathcal{T}$ se nazývá topologie,

a $(X,\mathcal{T})$ je topologický prostor.

Příklady
- $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ je triviální topologie, kterou lze zavést na libovolné množině.
- v $\mathbb{R}^d$ je $\mathcal{T}$ definována takto: $\left[\text{pro } \forall \varepsilon > 0 \text{ a } \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \emptyset, \mathbb{R}^d \text{ a } U_\varepsilon(\vec{x}) \in \mathcal{T}\right]$

vidíme, že $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ ← potenční množina = systém všech podmnožin $\mathbb{R}^d$.

Definice Řekneme, že $M \subseteq \mathbb{R}^d$ je uzavřená $\overset{\text{df}}{\Leftrightarrow}$ $\mathbb{R}^d \setminus M$ je otevřená (neboli doplněk M (angl. complement) značíme $\underline{M^c}$ je otevřený).

Protože platí:

$$\boxed{\mathbb{R}^d \setminus \left(\bigcap_\alpha G_\alpha\right) = \bigcup_\alpha \left(\mathbb{R}^d \setminus G_\alpha\right)} \text{ a } \boxed{\mathbb{R}^d \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m} G_i\right) = \bigcap_{i=1}^{m} \left(\mathbb{R}^d \setminus G_i\right)}$$

tak z Věty 8.4. plyne:

Věta 8.4* Systém všech uzavřených podmnožin $\mathbb{R}^d$ má následující vlastnosti:

(1) $\emptyset, \mathbb{R}^d$ jsou uzavřené

(2) Jsou-li G_i uzavřené pro $i = 1, \dots, m$, pak $\bigcup_{i=1}^{m} G_i$ je uzavřené

(3) Jsou-li G_α uzavřené, α libovolné, pak $\bigcap_\alpha G_\alpha$ je uzavřená množina.

Definice • $\boxed{\text{HRANIČNÍ BOD MNOŽINY}}$ Buď $M \subset \mathbb{R}^d$. Bod $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ nazveme *hraničním bodem* M nebo *bodem hranice* M jestliže libovolné (každé) okolí $\vec{x}$ má neprázdný průnik s M i $\mathbb{R}^d \setminus M$, tzn.

$$(\forall \underset{\underset{\text{okolí}}{\uparrow}}{\mathcal{U}}(\vec{x}))\ \left(\mathcal{U}(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset \ \wedge\ \mathcal{U}(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus M) \neq \emptyset \right)$$

- [HRANICE] Množina všech hraničních bodů M se nazývá *hranice M* a značí se ∂M.

- $\boxed{\text{UZÁVĚR MNOŽINY}}$ je sjednocení M a její hranice, tzn.

$$\overline{M} := M \cup \partial M. \qquad \boxed{\overline{M} = \text{uzávěr } M}$$

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ libovolná, pak $\overline{(\overline{M})} = \overline{M}$.

Ⓓⓚ Protože dle definice $\overline{(\overline{M})} = \overline{M} \cup \partial\overline{M} = M \cup \partial M \cup \partial\overline{M}$, stačí ukázat, že $\underline{\partial\overline{M} \subset \partial M.}$

Je-li tedy $\vec{x} \in \partial\overline{M}$, pak

(1) $\forall \mathcal{U}(\vec{x})$: $\quad \mathcal{U}(\vec{x}) \cap \overline{M} \neq \emptyset \quad$ a $\quad \mathcal{U}(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus \overline{M}) \neq \emptyset$

Chceme ukázat, že $\vec{x} \in \partial M$, tj.

(2) $\forall \mathcal{U}(\vec{x}) \quad \mathcal{U}(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset \quad$ a $\quad \mathcal{U}(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus M) \neq \emptyset$

Buď $\mathcal{U}(\vec{x})$ libovolné okolí $\vec{x} \in \partial\overline{M}$, pak z $\mathcal{U}(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus \overline{M}) \neq \emptyset$ plyne $\mathcal{U}(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus M) \neq \emptyset$ (neboť $\mathbb{R}^d \setminus \overline{M} \subset \mathbb{R}^d \setminus M$).

Dále z $\mathcal{U}(\vec{x}) \cap \overline{M} \neq \emptyset$ plyne existence $\vec{y} \in \mathcal{U}(\vec{x})$ takového, že buď $\vec{y} \in M$ nebo $\vec{y} \in \partial M$. Je-li $\vec{y} \in M$, pak $\mathcal{U}(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset$ a jsme hotovi. Je-li $\vec{y} \in \partial M$ (a také v $\mathcal{U}(\vec{x})$) pak určitě existuje $\mathcal{U}(\vec{y}) \subset \mathcal{U}(\vec{x})$ tak, že $\mathcal{U}(\vec{y}) \cap M \neq \emptyset$, pak ale i $\mathcal{U}(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset$ a jsme hotovi. ☒

Věta 8.5 Buď $M \subseteq \mathbb{R}^d$. Pak $\overline{M}$ je nejmenší uzavřená množina v $\mathbb{R}^d$ obsahující M.

Dk **Krok 1** Ukážeme nejdříve, že $\mathbb{R}^d \setminus \overline{M}$ je otevřená. Sporem. Kdyby $\mathbb{R}^d \setminus \overline{M}$ nebyla otevřená, tak existuje $\vec{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{M}$ takový, že pro jakékoliv okolí $\mathcal{U}(\vec{x}) \cap \overline{M} \neq \emptyset$. (negace definice otevřené množiny)

Pak ale $\vec{x} \in \partial\overline{M}$ a $\partial\overline{M} \subset \overline{(\overline{M})} = \overline{M}$ a máme spor neboť $\vec{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{M}$ ale také $\vec{x} \in \overline{M}$.

Krok 2 Nechť N je uzavřená množina obsahující M. Chceme ukázat, že $\overline{M} \subset N$ neboli $\partial M \subset N$ (neboť $M \subset N$).

Kdyby však existoval $\vec{x} \in \partial M$ a zároveň $\vec{x} \notin N$, pak

$$(\forall\, \mathcal{U}(\vec{x})) \qquad \mathcal{U}(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset \qquad \text{a} \qquad \mathcal{U}(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus M) \neq \emptyset$$

což však ale implikuje (neboť $M \subset N$ a $x \notin N$), že

(●) $$\forall\, \mathcal{U}(\vec{x}) \qquad \mathcal{U}(\vec{x}) \cap N \neq 0 \qquad \text{a} \qquad \mathcal{U}(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus N) \neq \emptyset,$$

což je spor, neboť N je uzavřená a tedy $\mathbb{R}^d \setminus N$ je otevřená a existuje tedy okolí $\hat{\mathcal{U}}(\vec{x})$, které je částí $\mathbb{R}^d \setminus N$ a tak $\underline{\mathcal{U}(\vec{x}) \cap N = \emptyset}$.

(a to je ve sporu s (●)) ▨

Def. (VNITŘEK MNOŽINY) Buď $M \subset \mathbb{R}^d$. Množina všech vnitřních bodů se nazývá vnitřek M a značí se M°.

Věta 8.6 Buď $M \subset \mathbb{R}^d$. Pak $(M^\circ)^\circ = M^\circ$ a M° je největší otevřená podmnožina M.

Dk [1] M° je otevřená dle definice vnitřku M a dle definice otevřené množiny.

[2] Kdyby W byla jiná otevřená podmnožina M, pak každý bod z W je vnitřní bod M a padne tedy do M°, tj. $W \subset M^\circ$.

[3] $(M^\circ)^\circ$ je největší otevřená podmnožina M°, ale M° je otevřená. Tedy $(M^\circ)^\circ = M^\circ$. ▨

Příklad Uvaž $\mathbb{Q}$ množinu racionální čísel. Pak $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$.

$\boxed{\text{Věta 8.7}}$ $\boxed{\text{"Hausdorffův oddělovací axiom"}}$

otevřená okolí

Buď $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^d$, $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$. Pak existují $\mathcal{U}(\vec{x}_1), \mathcal{U}(\vec{x}_2)$ tak, že $\mathcal{U}(\vec{x}_1) \cap \mathcal{U}(\vec{x}_2) = \emptyset$.

(Dk) Položme $\varepsilon := \frac{1}{4} |\vec{x}_2 - \vec{x}_1|_\infty > 0$ a $\mathcal{U}(\vec{x}_i) := \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_i)$, $i = 1,2$.

Kdyby existovalo $\vec{x} \in \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_1) \cap \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_2)$, pak

$$4\varepsilon = |\vec{x}_2 - \vec{x}_1|_\infty = |\vec{x}_2 - \vec{x} + \vec{x} - \vec{x}_1|_\infty \leq |\vec{x}_2 - \vec{x}|_\infty + |\vec{x} - \vec{x}_1|_\infty < 2\varepsilon$$

a máme spor. ↯ ▨

Důsledek $\forall \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^d$: $\{\vec{x}_0\}$ je uzavřená (BODY JSOU UZAVŘENÉ MNOŽINY)

(Dk) Buď $\vec{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\vec{x}_0\}$ libovolné, pak dle Věty 8.7 existují $\mathcal{U}(\vec{x}_0)$ a $\mathcal{U}(\vec{x})$ tak, že $\mathcal{U}(\vec{x}) \cap \mathcal{U}(\vec{x}_0) = \emptyset$. Tzn. $\mathcal{U}(\vec{x}) \subset \mathbb{R}^d \setminus \{\vec{x}_0\}$ a $\vec{x}$ je vnitřní bod $\mathbb{R}^d \setminus \{x_0\}$. Tedy $\mathbb{R}^d \setminus \{x_0\}$ je otevřená a dle definice $\{\vec{x}_0\}$ je uzavřená. ▨

Definice Buď $M \subset \mathbb{R}^d$. Bod $x_0 \in \mathbb{R}^d$ je hromadným bodem M pokud $\forall\, \mathcal{U}(\vec{x}_0)$ existuje nekonečně bodů z M patřících do $\mathcal{U}(\vec{x}_0)$.

$\boxed{\text{Věta 8.8}}$ (charakterizace uzavřených množin)

$M \subset \mathbb{R}^d$ je uzavřená $\iff$ M obsahuje všechny své hromadné body.

(Dk) $\boxed{\Rightarrow}$ Předpokládejme sporem, že M je uzavřená a $\exists \vec{x} \notin M$ tak, že libovolné $\mathcal{U}(\vec{x})$ obsahuje nekonečně bodů z M. Pak ale ihned dostáváme spor se skutečností, že $\mathbb{R}^d \setminus M$ je otevřená a pak pro $\vec{x}$ nutně musí existovat okolí tak, že $\mathcal{U}(\vec{x}) \cap M = \emptyset$, což je v rozporu s definicí hromadného bodu.

$\boxed{\Leftarrow}$ Chceme ukázat, že $\mathbb{R}^d \setminus M$ je otevřená. Nechť $\vec{x} \in \mathbb{R}^d \setminus M$ je libovolný bod. Protože, dle předpokladu M obsahuje všechny hromadné body a $\vec{x} \in M$, tak existuje $\mathcal{U}(\vec{x})$ tak, že $\mathcal{U}(\vec{x}) \cap M$ je nejvýš konečná, a tedy, dle Důsledku Věty 8.7, $\mathcal{U}(\vec{x}) \cap M$ je uzavřená. Neboli $\mathbb{R}^d \setminus (\mathcal{U}(x) \cap M) = (\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{U}(x)) \cup (\mathbb{R}^d \setminus M)$ je otevřená. Protože $\mathcal{U}(\vec{x})$ je otevřená, tak $\mathcal{U}(\vec{x}) \cap [(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{U}(x)) \cup (\mathbb{R}^d \setminus M)] = \mathcal{U}(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus M)$ je otevřená a podmnožinou $(\mathbb{R}^d \setminus M)$.
Tedy $(\mathbb{R}^d \setminus M)$ je otevřená. ▨

8.3. Konvergence posloupností, úplnost a kompaktnost v $\mathbb{R}^d$

Konvergenci posloupnosti lze definovat topologicky, metricky nebo v normě.

Def (topologická) Buď $(X,\mathcal{T})$ topologický prostor. Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ konverguje k $x \in X \overset{df}{\equiv} (\forall\, \mathcal{U}(x))(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ x_n \in \mathcal{U}(x)$

Píšeme: $\boxed{x_n \to x \text{ v } X.}$

Def. (metrická)[*] Buď (M,ρ) metrický prostor. Řekneme, že

$$x_n \to x \text{ v } M \overset{def.}{\equiv} (\forall \varepsilon > 0)(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ \rho(x_n,x) < \varepsilon$$

Tvrzení Je-li (M,ρ) metrický prostor a $x_n \to x$ v M, pak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje

(B-C) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall n,m \geq n_0)\ \rho(x_n,x_m) < \varepsilon$

Dk Pro dané $\varepsilon > 0$, uvažme definici $x_n \to x$ v M pro $\frac{\varepsilon}{2}$. Tzn. k $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ $(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ \rho(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Vezměme $n,m \geq n_0$ libovolně. Pomocí Δ-nerovnosti (M3):

$$\rho(x_n,x_m) \leq \rho(x_n,x) + \rho(x_m,x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

, což jsme chtěli ukázat. ▨

Def. (CAUCHYOVSKÁ POSLOUPNOST) Buď (M,ρ) metrický prostor. Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ je cauchyovská $\overset{df}{\equiv}$ platí (B-C).

Příklad Uvažujme racionální čísla $\mathbb{Q}$ s metrikou $\rho(x,y) = |y-x|$. Pak $(\mathbb{Q}, \rho(x,y))$ je metrický prostor. Definujme nyní $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ předpisem $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Pak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, neboť $x_n \to e$ v $\mathbb{R}$ a $x_n \in \mathbb{Q}$. Ale x_n nekonverguje v $\mathbb{Q}$, neboť $e \notin \mathbb{Q}$.

---

[*] Definice v normě: $x_n \to x$ v $(X, \|\cdot\|_X) \equiv (\forall \varepsilon > 0)(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ \|x_n - x\|_X < \varepsilon$

Def. **Úplný metrický prostor** Řekneme, že metrický prostor (M,ρ) je úplný pokud každá cauchyovská posloupnost má v M limitu.

Normovaný (vektorový/lineární) prostor, který je úplný se nazývá BANACHŮV.

Příklady ① Prostor $(\mathbb{R}, \rho(x,y)=|x-y|)$ je úplný, neboť (B-C) podmínka je ekvivalentní s konvergencí posloupnosti, což plyne z Weierstrassovy věty a je důsledkem axiomu úplnosti (∀ shora omezená množina má supremum (v $\mathbb{R}$)).

② • Prostor $(\mathbb{R}^d, |\vec{x}-\vec{y}|_\infty)$ je úplný (tedy i zde (B-C) podmínka je ekvivalentní "$x_n \to x$ v $\mathbb{R}^d$").

Dk Buď $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská v $\mathbb{R}^d$. Pak:

• pro $\forall \varepsilon>0$ $\quad |\vec{x}_n-\vec{x}_m|_\infty < \varepsilon \quad$ pro n, m dostatečně velké

$$\max_{i=1,\dots,d} |(x_n)_i-(x_m)_i| < \varepsilon \qquad \text{—||—}$$

tzn.
$$|(x_n)_i-(x_m)_i| < \varepsilon \qquad \text{—||—}$$
a pro každé $i=1,\dots,d$

Tedy $\{(x_n)_i\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská v $\mathbb{R}$ ale $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ je úplný a tak $\{(x_n)_i\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, tj. $(\exists\, x_i\in\mathbb{R})$ tak, že $(x_n)_i \to x_i$ v $\mathbb{R}$.

Polož $\vec{x} := (x_1,\dots,x_i,\dots,x_d)$. Pak $|\vec{x}_n-\vec{x}|_\infty := \max_{i=1,\dots,d}|(x_n)_i-x_i| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

▨

③ • Analogicky se ukáže, že $(\mathbb{R}^d, |\vec{x}-\vec{y}|_p)$ je úplný.

Kandidáta na limitu najdu stejně, neboť pro každé $i=1,2,\dots,d$ platí:

$$|x_i| \le \left(\sum_{i=1}^{d}|x_i|^p\right)^{1/p} \quad \text{resp.} \quad |(x_n)_i-(x_m)_i| \le \left\{\sum_{i=1}^{d}|(x_n)_i-(x_m)_i|^p\right\}^{1/p}$$

Tedy z cauchyovskosti $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ v $(\mathbb{R}^d, |\cdot|_p)$ plyne cauchyovskost $\{(x_n)_i\}_{n=1}^{\infty}$ v $\mathbb{R}$ a tedy existence $x_i\in\mathbb{R}$ tak, že

$$x_{n_i} \to x_i \text{ v } \mathbb{R}.$$

Pro $\vec{x}=(x_1,\dots,x_i,\dots,x_d)$ pak máme

$$|\vec{x}_n-\vec{x}|_p = \left(\sum_{i=1}^{d}|x_{n_i}-x_i|^p\right)^{1/p} \le d^{1/p}\max_{i=1,\dots,d}|x_{n_i}-x_i| \to 0$$

$\boxed{\text{Pozor! } d^{1/p}\to+\infty \text{ pro } d\to+\infty}$ Argument se dá zlepšit.

jako v Příkladu ②

④ Prostor $\left(C(\langle a,b\rangle),\ \varrho^{\infty}(f,g) = \|f-g\|_{\infty} := \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f(x)-g(x)|\right) =: X$

je úplný normovaný prostor (tedy Banachův).

„Náznak důkazu" Je-li $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská v X, tak

$(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})\ \forall n,m\ge n_0 \quad \max_{x\in\langle a,b\rangle}|f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon,$

což implikuje dvě věci:

(i) podobně jako v Př. ②: pro každé $x\in\langle a,b\rangle$

$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$

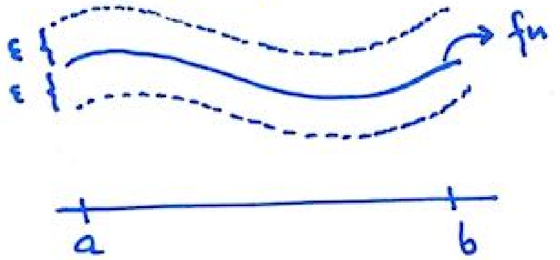
a tedy $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská v $\mathbb{R}$, a tedy konvergentní.

Existuje vlastní limita $f_n(x)$ pro $n\to\infty$, označme ji $f(x)$:

$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ bodová limita

Našli jsme kandidáta na limitu $\{f_n\}$

(ii) Od jistého n_0: všechny f_m leží v 2ε-ovém kanálku, viz obrázek:



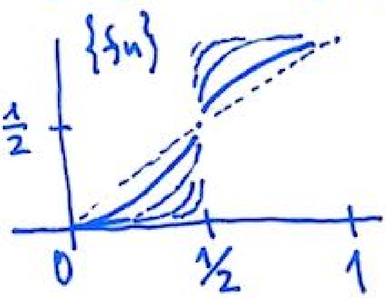
Odsud plyne, že f také musí ležet v ε-ovém kanálku, a navíc bude tato f spojitá, tzn. $f\in C(\langle a,b\rangle)$. ▨

Budeme umět později (ZS 2020/21), že $f_n\to f$ v X znamená, že f_n konvergují k f stejnoměrně na $\langle a,b\rangle$, píšeme $f_n \rightrightarrows f$ v $\langle a,b\rangle$.

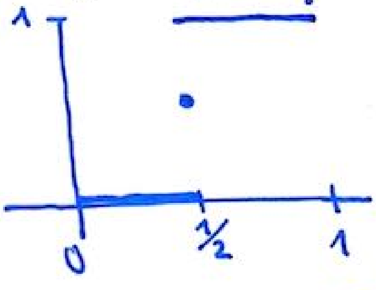
⑤ Prostor $\left(C(\langle a,b\rangle),\ \underbrace{\varrho^{1}(f,g)}_{\|f-g\|_1} := \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx\right) =: Y$

není úplný.

Řešení Uvažuj $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(\langle 0,1\rangle)$ jako na obrázku:



$\Rightarrow$



Pak:

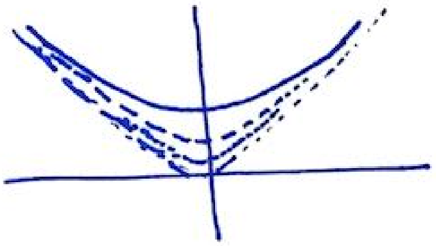
- $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská v Y
- $\varrho^{1}(f_n,f)\to 0$ $n\to\infty$
- ! $f\notin C(\langle 0,1\rangle)$.

[SROVNEJ s $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$]

Podobně jako neúplnost $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ vedla k "rozšíření"/zavedení $(\mathbb{R},|\cdot|)$, tak neúplnost $\left(C(\langle a,b\rangle), \|\cdot\|_1 := \int_a^b |\cdot|\,dx\right)$ vedla k "rozšíření"/zavedení prostorů $\left(L^1((a,b)), \|\cdot\|_1\right)$ a obecněji $\left(L^p((a,b)), \|f\|_p := \int_a^b |f(x)|\,dx\right)$. Tyto prostory jsou úplné, zavedeme je v ZS 2020/21. Pro $p=2$, mají, mj., uplatnění v kvantové fyzice.

⑥ Prostor $\left(C^1(\langle a,b\rangle), \|f-g\|_\infty = \max_{x\in\langle a,b\rangle}|f(x)-g(x)|\right)$ není úplný.

Řešení Uvažujme $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\langle a,b\rangle)$ jako na obrázku:



Pak f_n konvergují k $f(x)=|x|$ "stejnoměrně" (ve smyslu ε-ového tunýlku)

ale $|x| \notin C^1(\langle a,b\rangle)$. Proč? ▨

⑦ Prostory ℓ^p, $p\in\langle 1,\infty\rangle$, definovány

$\boxed{1\le p<\infty}$ $\ell^p := \left\{ x=\{x_i\}_{i=1}^\infty ; \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p\right)^{1/p} < +\infty \right\}$ s $\|x\|_{\ell^p} := \left(\sum_1^\infty |x_i|^p\right)^{1/p}$

$\boxed{p=\infty}$ $\ell^\infty := \left\{ x=\{x_i\}_{i=1}^\infty ; \sup_{i=1,2,\dots} |x_i| < +\infty \right\}$ s $\|x\|_\infty := \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$

jsou úplné normované (tedy Banachovy) prostory.

Ⓓk Viz cvičení. Návod: vyjdi z definice konvergence číselné řady. ▨
Užij výsledky pro $(\mathbb{R}^N, |\cdot|_p)$.

Směrem ke kompaktnosti

Definice Systém množin $\{U_i\}_{i\in J}$, J množina indexů, se nazývá pokrytí M (zde $M \subset (X,\mathcal{T})$) $\overset{\text{df.}}{\equiv}$ $\boxed{(\forall x\in M)(\exists i\in J)\quad x\in U_i}$.

Jsou-li U_i otevřené, mluvíme o otevřeném pokrytí.

Definice (topologická definice kompaktnosti) Množina $K\subset\mathbb{R}^d$ (v obecném případě topologického prostoru $(X,\mathcal{T})$) je kompaktní pokud z každého otevřeného pokrytí K lze vybrat pokrytí konečné.

Následující citace je přisuzována Hermannu WEYLovi (1885-1955):

„If a city is compact, it can be guarded by a finite number of arbitrarily near-sighted policemen."

zdroj: Edwin Hewitt „The rôle of compactness in analysis". The American Mathematical Montly, 1960.

Věta 8.9 Buď $A\subset M$, kde (M,ρ) je metrický prostor. Následující výroky jsou ekvivalentní:

(1) Z každého otevřeného pokrytí lze vybrat pokrytí konečné

(2) Každá posloupnost bodů z A obsahuje podposloupnost konvergentní v A

(3) (A,ρ) je úplný a pro každé $\varepsilon>0$ existuje konečné pokrytí ε-okolími (ε-ovými koulemi)

množina, která má tuto vlastnost, se nazývá totálně omezená

Dk $\boxed{(1)\Rightarrow(2)}$ Předpokládejme existenci $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A$, která neobsahuje konvergentní podposloupnost. Pak

$(\forall y\in A)(\exists\, r=r(y)>0)$ tak, že $N_y:=\{k;\ x_k\in \underbrace{B_{r(y)}(y)}_{\{z\in M;\ \rho(z,y)<r(y)\}}\cap A\}$ je konečná.

Potom $\bigcup_{y\in A} B_{r(y)}(y)$ je otevřené pokrytí A

a dle předpokladu (1) existuje konečně množin $B_{r(y_i)}(y_i)$, $i=1,\dots,m$, $A\subset\bigcup_{i=1}^{m} B_{r(y_i)}(y_i)$. Pak ale $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konečná, což dává spor. ↯

$\boxed{(2)\Rightarrow(3)}$ • Dle (2) má každá cauchyovská posloupnost v A limitu, tedy (A,ρ) je úplný.

• Kdyby existovalo $\varepsilon>0$ tak, že A nelze pokrýt konečným počtem ε-koulí, pak $\forall k\in\mathbb{N}\ \exists\, x_{k+1}\in A\setminus\bigcup_{i=1}^{k} B_\varepsilon(x_i)$. (iterativní proces)

Takto sestrojená posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ NEMÁ konvergentní podposloupnost, což je spor s (2).

$\boxed{(3)\Rightarrow(1)}$ Buď $\{U_i\}_{i\in J}$ otevřené pokrytí A.

Definujme

$$\mathcal{F} := \{B\subset M,\ B \text{ nelze pokrýt konečně mnoha } U_i\}$$

Chceme ukázat, že $A\notin\mathcal{F}$. Dle předpokladu (3) je však A totálně omezená. Tedy

[K $\varepsilon=1$ existuje konečně 1-okolí $B_1(x_i)$, $i=1,\dots,N$, tak, že $A\subset\bigcup_{i=1}^{N}B_1(x_i)$]

Pak však existuje $i_0\in\{1,\dots,N\}$ tak, že $C_1:=A\cap B_1(x_{i_0})\in\mathcal{F}$. Kdyby totiž takový index neexistoval tak $A\notin\mathcal{F}$ a jsme hotovi.

Mějme tedy $C_1\in\mathcal{F}$. Protože $C_1\subset A$, tak C_1 je totálně omezená.

[K $\varepsilon=\frac{1}{2}$ existuje konečně ½-okolí $B_{1/2}(\hat{x}_i)$, $i=1,\dots,N_1$, tak, že $C_1\subset\bigcup_{i=1}^{N_1}B_{1/2}(\hat{x}_i)$]

Opět musí existovat $\hat{i}_0\in\{1,\dots,N_1\}$ tak, že $C_2:=C_1\cap B_{1/2}(\hat{x}_{\hat{i}_0})\in\mathcal{F}$. V opačném případě by byl důkaz hotov.

Iterujeme .... dostaneme

$$C_0:=A\supset C_1\supset C_2\supset\dots\dots\supset C_k\supset\dots\quad,\text{kde } C_k:=C_{k-1}\cap B_{\frac{1}{k}}(\xi_k)$$

$$\text{kde } \xi_k\in B_{\frac{1}{k-1}}(\xi_{k-1})$$

Tedy $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská v A a (A,ρ) je úplný, dle předpokladu (3), tak existuje $x_0\in A$ tak, že $\xi_k\to x_0$ v A. Ale $x_0\in U_\ell$ pro jisté ℓ a U_ℓ je otevřená. Pak nutně existuje k_0 dostatečně velké tak, že

$$C_k\subset U_\ell \text{ pro všechna } k\geq k_0$$

což dává spor, neboť $C_k\in\mathcal{F}$ dle konstrukce. ☒

$\boxed{\text{Věta 8.10}}$ (Charakterizace uzavřených množin)

$$A\subset\mathbb{R}^d \text{ je uzavřená} \iff \left[(\forall\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A)\ \vec{x}_n\to\vec{x} \text{ v } \mathbb{R}^d\Rightarrow\vec{x}\in A\right]$$

(Dk) $\boxed{\Rightarrow}$ Kdyby pro A uzavřenou existovala $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A$ a $\vec{x}_n\to\vec{x}$ v $\mathbb{R}^d$ tak, že $\vec{x}\in\mathbb{R}^d\setminus A$, pak, protože $\mathbb{R}^d\setminus A$ otevřená existuje $U_\varepsilon(x)\subset\mathbb{R}^d\setminus A$ a máme ↯ neboť x_n pak nemohou konvergovat k x.

$\boxed{\Leftarrow}$ Vezměme $\vec{x}\in\mathbb{R}^d\setminus A$ libovolně.

Kdyby $U_{1/n}(\vec{x})\cap A\neq\emptyset$ pro každé $n\in\mathbb{N}$, pak existují $\vec{x}_n\in A$ tak, že $\vec{x}_n\to\vec{x}$ v $\mathbb{R}^d$. Pak ale nutně x padne do A, což dává spor s předpokladem. ☒

Def. • Buď (M,ρ) metrický prostor. Řekneme, že $A\subset M$ je omezená $\equiv^{df.}$ $(\exists R>0)$ $A\subset B_R(0):=\{x\in M;\ \rho(x,0)<R\}$.

• Buď $(X,\|\cdot\|_X)$ normovaný prostor. Množina $A\subset X$ je omezená $\equiv^{df.}$ $(\exists R>0)$ $A\subset B_R(0):=\{x\in M;\ \|x\|_X<R\}$.

Věta 8.11 (Charakterizace kompaktních množin v $\mathbb{R}^d$)

Množina $K\subset\mathbb{R}^d$ je kompaktní $\iff$ K je omezená a uzavřená

! Tato charakterizace platí jen v prostorech konečné dimenze. Neboli, je-li (M,ρ) úplný metrický prostor (nebo Banachův nebo Hilbertův prostor) a $K\subset M$ je kompaktní, pak vždy K je uzavřená a omezená. Avšak neplatí obrácená implikace. Platí totiž tato Heine-Borelova věta:

$$\overline{B_1(0)}:=\{x\in M;\ \rho(x,0)\le 1\} \text{ je v } (M,\rho) \text{ kompaktní} \iff \dim M<\infty.$$

„Náznak důkazu" Uvažujme nejpřirozenější zobecnění prostoru $\mathbb{R}^d$ směrem k prostoru ∞-dimenze. Dostaneme prostor

$$l_2:=\left\{x=\{x_i\}_{i=1}^{\infty};\ \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<\infty\right\} \text{ s normou } |x|_{l_2}:=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2\right)^{1/2}.$$

Uvažujme následující posloupnost $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ ležící v uzavřené jednotkové kouli v l_2:

$x^1:=(1,0,\dots,\dots$

$x^2:=(0,1,\dots,\dots$

$\vdots$

$x^n:=(0,0,\dots,\underset{\uparrow}{1},\dots$

n-tý prvek

$\vdots$

Pak: • $\forall n\in\mathbb{N}$ $|x^n|_{l_2}=1$

• $\forall n,m\in\mathbb{N}, m\neq n$, $|x^n-x^m|^2_{l_2}=2$

Tedy, NELZE Z $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ VYBRAT KONVERGENTNÍ PODPOSLOUPNOST $\Rightarrow$ $\overline{B_1(0)}$ v l_2 NENÍ KOMPAKTNÍ.

dle Věty 8.9

Dk Věty 8.11 Dle Věty 8.9, ekvivalence (1) a (3), máme

$K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní $\iff$ $(K, |x-y|_\infty)$ je úplný a K je totálně omezená

Ale dle Věty 8.10:

$(K, |x-y|_\infty)$ je úplný $\iff$ K je uzavřený

Tedy zbývá ukázat, že

K totálně omezená v $\mathbb{R}^d$ $\iff$ K je omezená v $\mathbb{R}^d$

$\boxed{\Rightarrow}$ Je-li K totálně omezená, tj. $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_\varepsilon(\vec{x}_i)$, pak definujme $R := \max\limits_{\substack{j=1,\dots,d \\ i=1,\dots,m}} |(\vec{x}_i)_j| + \varepsilon = \max\limits_{i=1,\dots,m} |\vec{x}_i|_\infty + \varepsilon$

Pak $K \subset B_R(\vec{0})$ a K je omezená.

$\boxed{\Leftarrow}$ Je-li K omezená, pak existuje $R>0$ tak, že $K \subset B_R(\vec{0})$, což je krychle v $\mathbb{R}^d$ o straně $2R$. Vezmi $k \in \mathbb{N}$ tak, že

$k := \left[\frac{R}{\varepsilon}\right] + 1$ k danému libovolnému $\varepsilon > 0$.

↖ celá část

Pak K pokryjí k^d krychliček o straně 2ε. Tedy K je totálně omezená. ∎

8.4 Limita, spojitost a derivace (vektorových) funkcí více proměnných

- Buď $f: M \to \mathbb{R}^m$, kde $M \subset \mathbb{R}^d$, $d, m \in \mathbb{N}$, typicky $d \geq 2$.

Úmluva přestaneme používat šipek, ale důsledně budeme psát, kam dané objekty patří. Tak

$f: M \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ znamená

$f(x) = (f_1(x_1,\dots,x_d),\dots,f_m(x_1,\dots,x_d))$ kde $\underset{(x_1,\dots,x_d)}{\overset{}{\underset{\shortparallel}{x}}} \in M$

- Je-li $m=1$, mluvíme o skalárních funkcích.

Def. (limity) Řekneme, že f má v $x_0 \in \mathbb{R}^d$ limitu $A \in \mathbb{R}^m$, (píšeme $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$), právě když,

$$\boxed{(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(0<|x-x_0|_{\infty,\mathbb{R}^d}<\delta)(|f(x)-A|_{\infty,\mathbb{R}^m}<\varepsilon)}$$

≡ neboli:

$$(\forall U_\varepsilon(A))(\exists P_\delta(x_0))(\underbrace{x\in P_\delta(x_0) \Rightarrow f(x)\in U_\varepsilon(A)})$$

$$\Updownarrow$$

$$f(P_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(A)$$

≡ neboli:

$$\boxed{(\forall U(A))(\exists P(x_0))(f(P(x_0))\subset U(A))}$$

topologická definice spojitosti

$U(A)$ ---- libovolná otevřená množina obsahující A

$P(x_0)$ .... libovolná otevřená množina obsahující x_0 mínus $\{x_0\}$. tj. $P(x_0) = U(x_0)\setminus\{x_0\}$.

Def. (spojitosti f v x_0) Řekneme, že f je v $x_0\in\mathbb{R}^d$ spojitá, právě když, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

≡ neboli

$$(\forall U(f(x_0)))(\exists U(x_0))\quad(f(U(x_0)) \subset U(f(x_0))).$$

Rozmyslete si, že i v $\mathbb{R}^d$ (a také v libovolném úplném vektorovém metrickém prostoru (M,ϱ)) platí následující tvrzení známá z teorie funkcí jedné reálné proměnné (viz ZS):

- o jednoznačnosti limity
- o aritmetice limit
  - ▶ $f,g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ a $x_0\in\mathbb{R}^d$ je hromadný bod $D_f\cap D_g$
  - ▶ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\in\mathbb{R}$ a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B\in\mathbb{R}$

    $\Longrightarrow$
    - $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big)=A+B$
    - $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)g(x)\big)=AB$
    - pokud $B\neq 0$, pak $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$

  o dvou strážnících:
  - ▶ je-li navíc $h:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ taková, že $P(x_0)\subset D_h\cap D_f\cap D_g$

    a $f(x)\le h(x)\le g(x)$ pro $x\in P(x_0)$

    a $A=B$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$
- o limitě složeného zobrazení

  (A)
  - ▶ Jsou-li (M,ϱ_1), (N,ϱ_2) a (P,ϱ_2) tři metrické prostory

    a $f: M\to N$ a $g: N\to P$ a $x_0\in M$
  - ▶ Pokud $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0\in N$ a $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=z_0\in P$

    a x_0 je hromadným bodem $D_{g\circ f}$
  - ▶ Pokud • buď $\exists P(x_0)$ tak, že $f(x)\neq y_0$ $\forall x\in P(x_0)$

    nebo g je spojitá v y_0

  Pak $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=z_0$.
- o spojitosti složeného zobrazení
  - ▶ Platí-li (A) a g je spojitá v $f(x_0)$ a f je spojitá v x_0,

    pak <u>$g\circ f$ je spojitá v x_0</u>, tj. $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=g(f(x_0))$.

- o existenci okolí, kde je ji funkce omezená
- Heineho věta (obě varianty)
  ▸ (M,ϱ_1), (N,ϱ_2) metrické a $x_0 \in M$ je hromadným bodem D_f
  $f:(M,\varrho_1)\to(N,\varrho_2)$ a $y_0 \in N$

Pak

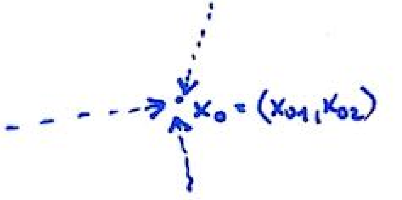
(i) $$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \iff \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_f\setminus\{x_0\} : \boxed{\begin{matrix} x_n \to x_0 \\ v\ (M,\varrho_1)\end{matrix}} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} f(x_n)\to y_0 \\ v\ (N,\varrho_2)\end{matrix}}$$

(ii) $$\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ existuje} \iff \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{—\|—} \qquad \text{existuje } \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Pro $d=1$ jsme měli větu o jednostranných limitách:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ existuje} \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{ existuje a } \lim_{x\to x_0^-} f(x) \text{ existuje}$$
a obě se rovnají.

! Následující příklad ukazuje, že i když limity po všech přímkách existují a rovnají se, tak existence $\lim_{x\to x_0} f(x)$ zaručena __není__ !



__Příklad__ ① Buď $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ definována vztahem

$$f(x) = f(x_1,x_2) = \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}$$

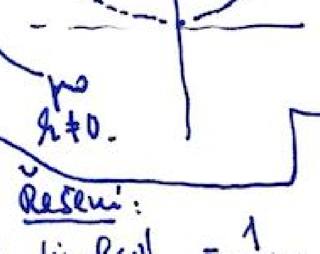
Pak $x_2 = kx_1$, $k\in\mathbb{R}$, popisují přímky procházející počátkem

Platí $$f(x_1, kx_1) = \frac{x_1^2 k x_1}{x_1^4 + k^2 x_1^2} = \frac{k x_1}{k^2 + x_1^2} \to 0 \quad \text{pro } x_1 \to 0.$$

Tedy kandidát na $\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2)$ je 0. Přesto $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje,

neboť vezmeme-li $x_2 = kx_1^2$ (tzn. jdeme do počátku po parabole)

pak
$$\lim_{x_1\to 0} f(x)\Big|_{x_2 = kx_1^2} = \lim_{x_1\to 0} \frac{k x_1^4}{x_1^4 + k^2 x_1^4} = \lim_{x_1\to 0} \frac{k}{k^2 + x_1^4} = \frac{1}{k}$$
pro $k \neq 0$.



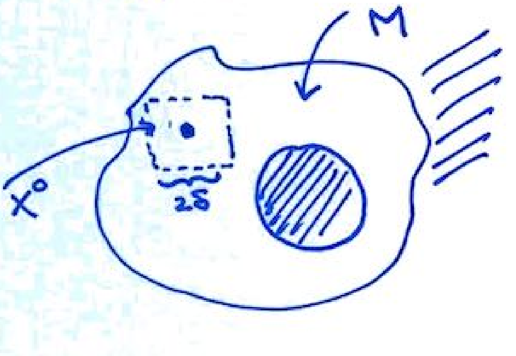
② Buď $f(x) = \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$. Pak $\lim_{x_1\to 0} f(x)\Big|_{x_2=0} = 0$

a $\lim_{x_2\to 0} f(x)\Big|_{x_1=0} = 0$, ale $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

__Řešení__: $\lim_{x_1\to 0} f(x)\Big|_{x_2 = x_1} = \frac{1}{2}$.

Definice ($\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_i f$) Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $x^0 \in M$. Pro $f: M \to \mathbb{R}$ definujme

$$\left.\begin{aligned} g_1(\xi) &= f(\xi, x_2^0, \dots, x_d^0) \\ g_2(\xi) &= f(x_1^0, \xi, \dots, x_d^0) \\ &\vdots \\ g_d(\xi) &= f(x_1^0, \dots\dots, x_{d-1}^0, \xi) \end{aligned}\right\} \quad \text{Pak } g_i : (x_i^0-\delta, x_i^0+\delta) \to \mathbb{R}$$



neboli g_i jsou funkce jedné reálné proměnné ($i=1,\dots,d$)

Předpokládejme, že $g_i'(x_i^0)$ existuje, tzn.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_1^0,\dots,x_1^0+t,\dots,x_d^0) - f(x_1^0,\dots,x_d^0)}{t} \quad \text{existuje,}$$

pak $g_i'(x_i^0)$ nazveme parciální derivace f podle proměnné x_i

a značíme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$. Tedy máme:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \lim_{\xi \to x_i^0} \frac{g_i(\xi) - g_i(x_i^0)}{\xi - x_i^0} = \lim_{\xi\to x_i^0} \frac{f(x_1^0,\dots,\xi,\dots,x_d^0) - f(x^0)}{\xi - x_i^0}$$

$$h := \xi - x_i^0 \quad \longrightarrow \quad = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^0,\dots,x_i^0+h,\dots) - f(x^0)}{h}$$

Jiná značení: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \partial_{x_i} f(x_0) = \partial_i f(x_0)$.

DEFINICE

Vektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(x^0)\right)$ se nazývá gradient f v x_0 a značí se $\nabla f(x^0)$, nebo $\mathrm{Grad}\, f(x^0)$.

Je-li $f: M \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, M otevřená, $x^0 \in M$, pak matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0), & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(x^0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0), & \dots, & \frac{\partial f_m}{\partial x_d}(x^0) \end{pmatrix}$$

m … řádků, d … sloupců

se nazývá JAKOBIÁN nebo JAKOBIho matice a značí se $Df(x^0)$ nebo $\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_d)}(x^0)$.

Definice Je-li $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, pak Jakobián je čtvercová matice a její stopa (součet prvků na diagonále) se nazývá divergence f v bodě x_0, tj.

$$\operatorname{div} f(x^0) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x^0) \underset{\uparrow}{=} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x^0) = \operatorname{tr} Df(x^0).$$

Einstein Σ konvence

FYZICI : $\operatorname{div} \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f}$

$\boxed{\text{Je-li } d = 3}$, pak

$$\operatorname{curl} f(x^0) = \operatorname{rot} f(x^0) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)$$

FYZICI : $\operatorname{curl} \vec{f} = \nabla \times \vec{f}$

rotace f v x^0

Také: pro $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

$$Df(x^0) = \frac{Df(x^0) + [Df(x^0)]^T}{2} + \frac{Df(x^0) - [Df(x^0)]^T}{2}$$

jen pro $d=3$ pro jednoduchost

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right] & \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right] \\ & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right] \\ & & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}(x^0) + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right] & \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right] \\ - & 0 & \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right] \\ - & - & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underset{\text{symetrická část}}{\mathbb{E}f(x^0)} + \underset{\text{antisymetrická část}}{\mathbb{W}f(x^0)}$$

POROVNEJ SLOŽKY $\mathbb{W}f(x^0)$ SE SLOŽKAMI $\operatorname{curl} f(x^0)$

$\boxed{\text{Je-li } d = 2}$ $f = (f_1, f_2)$

$$\operatorname{rot} f(x^0) = \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \qquad \operatorname{curl} f(x^0) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

VEKTOR SKALÁR

Definice (SMĚROVÁ DERIVACE resp. DERIVACE f V BODĚ x_0 VE SMĚRU $\vec{v}$)

$$\partial_v f(x^0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0+tv)-f(x^0)}{t}$$, pokud tato limita existuje.

[$x^0\in M$, $M\subset\mathbb{R}^d$ otevřená, $v=(v_1,\dots,v_d)$ tak, že $|\vec{v}|_2=1$]

Odsud a z definice $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ plyne: $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \partial_{e_i} f(x^0)}$

kde $e_i := (0,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{i-té místo.}}}{1},\dots,0)$

Definice (DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ) INDUKTIVNĚ.

např. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) = \frac{\partial h}{\partial x_i}(x^0)$ kde $h(z) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(z)$ pro $z\in U_\delta(x^0)$.

Příklady ① Buď $f(x)=\sin(x_1x_2) : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

Pak $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = x_2\cos(x_1x_2)$ a $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = x_1\cos(x_1x_2)$

Tedy $\nabla f(x) = (x_2\cos(x_1x_2), x_1\cos(x_1x_2))$

② Je-li $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ lineární (nebo afinní) funkce, tj.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{d} a_i x_i \quad \left(\text{resp. } f(x) = \sum_{i=1}^{d} a_i x_i + b\right)$$

pak $\nabla f(x) = (a_1,\dots,a_d)$ $\forall x\in\mathbb{R}^d$

③ Podobně, je-li $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m$ dáno předpisem

$$f(x) = \mathbb{A}x+b = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{md}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_d\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1\\ \vdots \\ b_m\end{pmatrix}$$

Pak

$D f(x) = \mathbb{A}$ pro $\forall x\in\mathbb{R}^d$.

[a $g(x^0)\neq 0$ pro derivování podílu]

Věta 8.12 Existují-li $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ a $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x^0)$, pak existují $\frac{\partial (f+g)}{\partial x_i}(x^0)$, $\frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_i}(x^0)$, $\frac{\partial(\frac{f}{g})}{\partial x_i}(x^0)$, $\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(x^0)$ a platí: $\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}$, $\frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_i} = \alpha\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}g + f\frac{\partial g}{\partial x_i}$.

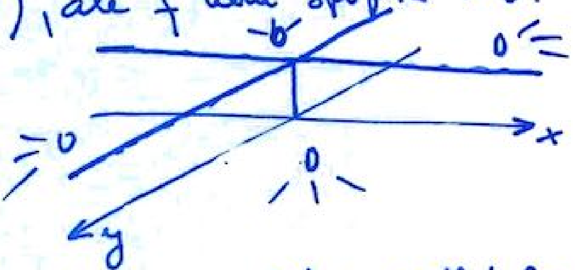
(Dk) Dle vět o derivování součtu, součinu, podílu pro funkce jedné reálné proměnné.

▨

WARNING! z Existence parciálních derivací v x^0 neplyne spojitost f v x_0, jak ukazuje následující jednoduchý příklad

(Př.) Buď
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x=0 \text{ nebo } y=0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Pak $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ (Ověřte!), ale f není spojitá v 0.



Věta 8.13 (O derivování složené funkce)

Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $g: M \to \mathbb{R}^m$ má v $x \in M$ parciální derivace

Buď $g(M) \subset N$ a $f: N \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace v N

Pak fce
$(f \circ g)(x) := f(g(x))$ je v M definována a má parciální derivace.

Navíc $\left[(f \circ g): M \to \mathbb{R} \right]$

(Ř1)
$$\boxed{\underbrace{\nabla(f\circ g)(x)}_{d\text{-vektor}} = \underbrace{(\nabla f)(g(x))}_{m\text{-vektor}} \underbrace{Dg(x)}_{\text{Matice } m\times d}}$$

$$\nabla(f\circ g)(x) = \nabla_y f(y)\Big|_{y=g(x)} Dg(x)$$

neboli
$$\left(\frac{\partial (f\circ g)}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial (f\circ g)}{\partial x_d}(x)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}(g(x)), \dots, \frac{\partial f}{\partial y_m}(g(x))\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_d} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_d} \end{pmatrix}.$$

Je-li $f: \overset{\subset \mathbb{R}^m}{N} \to \mathbb{R}^s$ $(s>1, s\in\mathbb{N})$, pak $f\circ g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^s$

a platí

(Ř2)
$$\boxed{\underbrace{[D(f\circ g)](x)}_{s\times d\text{-matice}} = \underbrace{[Df](g(x))}_{s\times m \text{ matice}} \underbrace{[Dg](x)}_{m\times d\text{-matice}}}$$

(Dk) Buď $e^i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots, \delta_{di})$ jednotkový vektor v i-tém směru.

Chceme ukázat, že pro $i = 1, 2, \dots, d$

$$\frac{f(g(x+he^i)) - f(g(x))}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_k}(g(x)) \frac{\partial g_\ell(x)}{\partial x_i}$$

Avšak:

$$\frac{f(g(x+he^i)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \frac{f(g_1(x+he^i), g_2(x+he^i), \dots, g_m(x+he^i)) - f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))}{h}$$

$$= \frac{f(g_1(x+he^i), g_2(x+he^i), \dots, g_m(x+he^i)) - f(g_1(x), g_2(x+he^i), \dots, g_m(x+he^i))}{h}$$

$$+ \frac{f(g_1(x), g_2(x+he^i), \dots, g_m(x+he^i)) - f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x+he^i))}{h}$$

$$+ \quad \dots$$

$$+ \frac{f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x+he^i)) - f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))}{h}$$

$$\overset{\text{Lagrange}}{\underset{\text{VOSH}}{=}} \frac{\partial f}{\partial y_1}(g_1(x+\theta_1 he^i), g_2(x+he^i), \dots, g_m(x+he^i)) \frac{g_1(x+he^i) - g_1(x)}{h}$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y_2}(g_1(x), g_2(x+\theta_2 he^i), \dots, g_m(x+he^i)) \frac{g_2(x+he^i) - g_2(x)}{h}$$

$$+ \quad \dots$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y_m}(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x+\theta_m he^i)) \frac{g_m(x+he^i) - g_m(x)}{h}$$

$$\xrightarrow{h\to 0} \frac{\partial f}{\partial y_1}(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)) \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(x) + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_m}(g_1(x), \dots, g_m(x)) \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(x)$$

kde jsme využili:

(•) skutečnost, že $g_\ell(x+he^i) \to g_\ell(x)$ pro $h \to 0$, což plyne z existence $\frac{\partial g_\ell}{\partial x_i}(x)$.

(••) skutečnost, že $\frac{g_\ell(x+he^i) - g_\ell(x)}{h} \to \frac{\partial g_\ell}{\partial x_i}(x)$ dle předpokladu věty

(•••) věta o limitě složeného zobrazení v případě, kdy vnější funkce je spojitá.

☒

Věta 8.14 (spojité $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ v x ⇒ existenci $\partial_{\vec{v}} f(x)$)

Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $f: M \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace (1. řádu) v M. Pak pro každé $x \in M$

$$\boxed{\partial_v f(x) = \nabla f(x) \cdot v = (\nabla f(x), v)_{\mathbb{R}^d}}$$

Dk. Víme, že pro $v = (v_1, \dots, v_d)$ s $|\vec{v}|_E = 1$ platí

$$\partial_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \frac{d}{dt} f(x+tv)\Big|_{t=0} \overset{\text{Věta 8.13}}{=} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} v_i$$

$$= (\nabla f(x), v) \quad ▨$$

Odsud a Cauchy-Schwartzovy nerovnosti plyne mimořádný důsledek. Víme, že (dle (C-S) ≤):

$$|\nabla f(x)| \le -|\nabla f(x)||v| \le (\nabla f(x), v) \le |\nabla f(x)|_E |v|_E \le |\nabla f(x)|_E$$

přičemž rovnost nastane jsou-li v a $\nabla f(x)$ kolineární, tzn. pro $v = \pm \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$. Tedy: směrová derivace, která udává v daném bodě a ve zvoleném směru směrnici tečny v daném směru tj. jak se funkce v daném směru v blízkosti x chová (roste, klesá a jak rychle),

je největší ve směru $\vec{v} = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|_E}$

a je nejmenší —″— $\vec{v} = -\frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|_E}$

Tedy, gradient fce f v bodě x určuje (tzn. je) směr největšího přírůstu/poklesu funkce f.

Zavedli jsme derivace vyšších řádů, a říkali jsme, že

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ znamená, že nejdříve derivuji podle proměnné x_j a poté podle proměnné x_i. Otázka zní, zda dostanu stejný výsledek, když budu nejdříve derivovat podle x_i, a poté podle x_j, tj. ptáme se, zda platí:

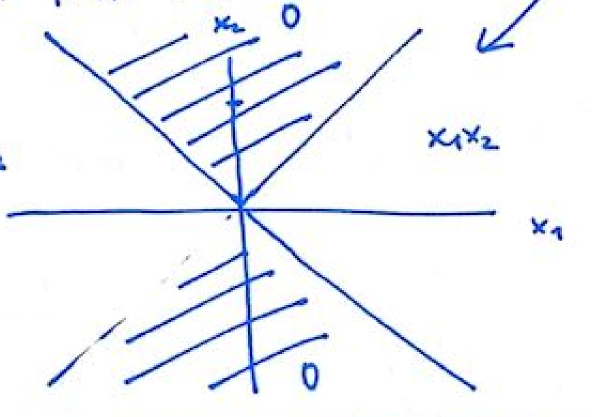
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \cdot \partial x_i}(x).$$

Následující příklad ukazuje, že tomu tak obecně není.

Příklad Buď

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } |x_1| \le |x_2| \\ x_1 x_2 & \text{pokud } |x_1| > |x_2| \end{cases}$$

viz obrázek



Spočítejme nejdříve

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,x_2) \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,0)$$

pro $x_2 \neq 0 \neq x_1$.

▶ $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,x_2) = \lim\limits_{x_1 \to 0} \frac{f(x_1,x_2) - f(0,x_2)}{x_1} = \underline{\underline{0}}$

neboť pro $x_1=0$ a $x_2 \neq 0$ je $f=0$ nejen v těchto bodech, ale i v "x_1"-okolí.

▶ $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,0) = \lim\limits_{x_2 \to 0} \frac{f(x_1,x_2) - f(x_1,0)}{x_2} = \lim\limits_{x_2 \to 0} \frac{x_1 x_2}{x_2} = \underline{\underline{x_1}}$

TAKÉ $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \lim\limits_{x_1 \to 0} \frac{f(x_1,0) - f(0,0)}{x_1} = \lim\limits_{x_1 \to 0} \frac{0}{x_1} = \underline{\underline{0}}$

$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = \lim\limits_{x_2 \to 0} \frac{f(0,x_2) - f(0,0)}{x_2} = 0$

Z těchto výsledků počítáme dále

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) = \lim_{x_2 \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,x_2) - \overset{=0}{\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)}}{x_2} = \lim_{x_2 \to 0} \frac{0}{x_2} = 0$$

a
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = \lim_{x_1 \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,0) - \overset{=0}{\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)}}{x_1} = \lim_{x_1 \to 0} \frac{x_1}{x_1} = 1$$

Tedy

$$1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) = 0$$

Věta 8.15 (O záměnnosti vyšších derivací) Nechť $M\subset\mathbb{R}^d$ je otevřená a nechť $f: M\to\mathbb{R}$ má spojité druhé parciální derivace v M. Pak pro každé $x\in M$, a pro každé $i,j\in\{1,2,\dots,d\}$:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)}$$

Dk [1] Označme

$$w(x):=\Delta_j^h f(x):=\frac{f(x+he^j)-f(x)}{h}$$

Pak

$$\to \quad \Delta_i^h\Delta_j^h f(x)=\Delta_i^h w(x)=\frac{w(x+he^i)-w(x)}{h}$$

$$=\frac{f(x+he^i+he^j)-f(x+he^i)-f(x+he^j)+f(x)}{h^2}$$

Ten samý výraz však dostanu pokud provedeme

$$\to \quad \Delta_j^h\Delta_i^h f(x)$$

Tedy na úrovni diferenčních podílů rovnost platí, neboť máme:

$$\boxed{\Delta_j^h\Delta_i^h f(x)=\Delta_i^h\Delta_j^h f(x)}\,.$$

[2] Zbývá ukázat, že

$$(*)\quad \underline{\Delta_i^h\Delta_j^h f(x)\longrightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)} \quad \text{pro } h\to 0. \quad \forall x\in M \ \forall\, i,j\in\{1,\dots,d\}.$$

Avšak:

$$\Delta_j^h f(x+he^i)=\frac{1}{h}\int_0^h\frac{\partial f}{\partial x_j}(x+te^j+he^i)\,dt \qquad =\frac{f(x+he^j+he^i)-f(x+he^i)}{h}$$

a

$$\Delta_j^h f(x)=\frac{1}{h}\int_0^h\frac{\partial f}{\partial x_j}(x+te^j)\,dt \qquad =\frac{f(x+he^j)-f(x)}{h}$$

a tedy

$$\Delta_i^h\Delta_j^h f(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h\Big[\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underbrace{x+te^j}_{z}+he^i)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underbrace{x+te^j}_{z})\Big]dt$$

$$=\frac{1}{h^2}\int_0^h\Big(\int_0^h\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x+te^j+se^i)\Big]ds\,dt$$

$$=\frac{1}{h^2}\int_0^h\Big(\int_0^h\underbrace{\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x+te^j+se^i)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)\Big]}_{\in(-\varepsilon,\varepsilon) \text{ pro } h \text{ dostatečně malé}}ds\,dt+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)}$$

Tedy

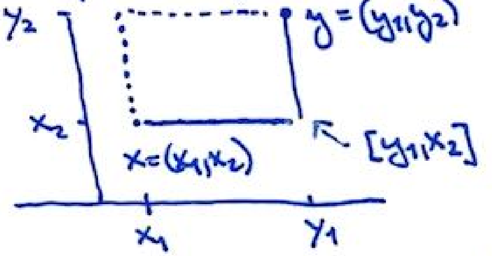
$$\Big|\Delta_i^h\Delta_j^h f(x)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\Big|<\varepsilon \quad \text{pro } h \text{ dostatečně malé}$$

(ε libovolné) ▨

8.5 Totální diferenciál a Taylorův rozvoj pro funkce více proměnných.

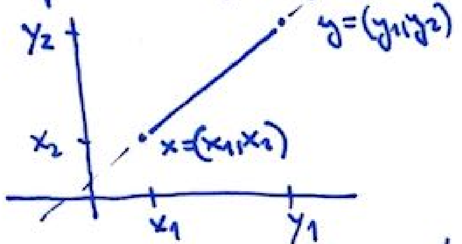
Často potřebujeme vyjádřit rozdíl $f(y)-f(x)$ pomocí derivace (jak jsme viděli například v důkazu předchozí věty). K tomu lze s úspěchem využít Langrangeovu větu o střední hodnotě. U fcí více proměnných máme dvě varianty jak postupovat:

(i) postupovat "po stěnách" (jako v předchozí větě).



NEVÝHODA:
dává d-různých bodů,
přesto užitečný postup v mnoha situacích

(ii) postupovat "po přímce spojující x a y"



O tom je následující věta.

Věta 8.16 (Lagrangeova věta o střední hodnotě) Nechť:

- $M\subset\mathbb{R}^d$ je otevřená
- f je spojitá v M a $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ jsou spojité v M pro $\forall i\in\{1,2,\dots,d\}$.
- pro $x,y\in M$ je úsečka $\{z;\ z=tx+(1-t)y,\ t\in\langle 0,1\rangle\}\subset M$

Pak existuje $\theta\in(0,1)$ tak, že

(L) $$\boxed{f(y)=f(x)+\nabla f(x+\theta(y-x))\cdot(y-x)}$$

zobecnění $f(y)-f(x)=f'(\xi)(y-x)$ kde $\xi\in(x,y)$ v $d=1$.
I zde lze psát: $\xi=\theta x+(1-\theta)y$

(Dk) Definujme
$$g(t):=f(x+t(y-x)),\quad t\in\langle 0,1\rangle.$$

Pak • $g\in C(\langle 0,1\rangle)$ a • $g'(t)$ existuje pro $\forall t\in(0,1)$

Navíc $g(1)-g(0)=f(y)-f(x)$.

Dle LVOSH (ZS 19/20):
$$f(y)-f(x)=g(1)-g(0)=g'(\theta)\overset{V\,8.13}{=}\nabla f(x+\theta(y-x))\cdot(y-x),$$

což jsme chtěli ukázat

Než si ukážeme aplikaci předchozí věty a její rozšíření, zavedeme následující pojem "souvislé" množiny.

<u>Definice</u> Řekneme, že $M \subset \mathbb{R}^d$ je <u>souvislá</u> (angl. "<u>path-connected</u>")
jestliže pro každé $x, y \in M$
existuje konečný počet bodů x^i, $i = 1, \dots, N$, tak, že
$x^1 = x$, $x^N = y$ a všechny $\{t x^i + (1-t) x^{i+1};\ t \in \langle 0,1 \rangle\} \subset M$ pro $i = 1, \dots, N-1$

Důsledek Věty 8.16 Buď $M \subseteq \mathbb{R}^d$ <u>otevřená</u> a <u>souvislá</u> ("path-connected).
Nechť $\nabla f(x) = 0$ pro $\forall x \in M$
Pak $f \equiv C$ $(C \in \mathbb{R})$ (f je konstantní)

Dk plyne z předchozí Věty 8.16 a ze skutečnosti, že M je otevřená a libovolné $x \in M$ lze najít "cestu" (lomenou čáru) spojující x s pevným bodem $y \in M$. Tak

$$\underset{\sim}{f(x)} = f(y) + \underbrace{\nabla f(\xi)}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} \cdot (y-x) = \underset{\sim}{f(y)} \quad \text{pro všechna } x \in M$$ ▨

V následující větě budou hrát významnou roli funkce spojité, jejichž první derivace je také spojitá. Zavedeme označení, které na konci přednášky rozšíříme.

Definice Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená. Pak $C^0(M) = C(M) = \{f : M \to \mathbb{R};\ f \text{ spojité v } M\}$,
a $C^1(M) := \{f : M \to \mathbb{R};\ f \in C(M), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C(M)\ \ i = 1, \dots, d\}$.

Také píšeme
$$C(M)^m := \{f : M \to \mathbb{R}^m;\ f = (f_1, \dots, f_m) \text{ a } f_i \in C(M) \text{ pro } i = 1, \dots, m\}$$
$$= \underbrace{C(M) \times \dots \times C(M)}_{m\text{-krát}}.$$

a podobně
$$C^1(M)^m := \{f : M \to \mathbb{R}^m;\ f_i \in C^1(M) \text{ pro } i = 1, \dots, m\}.$$

Poznámka:
$$C^1(M) = \{f : M \to \mathbb{R};\ f \in C(M) \wedge \nabla f \in C(M)^d\}.$$

Nyní začneme zkoumat podmínky, které zaručují (tedy jsou postačující) k tomu, aby ① existovaly parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

② f byla spojitá v uvažovaném bodě

③ existovaly směrové derivace

Důležitou roli zde bude hrát pojem totálního diferenciálu. Jeho definice (i existence) je motivována následujícím tvrzením.

$\boxed{\text{Věta } 8.17}$ Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $x, x^0 \in M$ takové, že úsečka spojující x a x^0 leží v M. Buď $f \in C^1(M)$ resp. $C^1(M)^m$. Pak

$$(*) \quad \frac{f(x)-f(x^0)-\nabla f(x^0)\cdot(x-x^0)}{|x-x_0|_{\infty,\mathbb{R}^d}} \longrightarrow 0 \quad \text{pro } x \to x^0$$

neboli

$\boxed{m=1}$ $$|f(x)-f(x^0)-\nabla f(x^0)\cdot(x-x^0)| = o(|x-x_0|_{\mathbb{R}^d}) \quad \text{pro } x \to x_0$$

resp.

$\boxed{m>1}$ $$|f(x)-f(x^0)-Df(x^0)(x-x^0)|_{\mathbb{R}^m} = o(|x-x_0|_{\mathbb{R}^d}) \quad \text{—||—}$$

(Dk) Jen pro $\boxed{m=1}$. Užijeme-li výsledek věty 8.16, tak máme

$$W := \frac{f(x)-f(x^0)-\nabla f(x^0)\cdot(x-x^0)}{|x-x_0|_{\mathbb{R}^d}} = \frac{(\nabla f(x^0+\theta(x-x^0))-\nabla f(x^0))\cdot(x-x^0)}{|x-x_0|_{\mathbb{R}^d}}$$

Odtud

$$|W| \overset{C-S}{\leq} |\nabla f(x^0+\theta(x-x^0))-\nabla f(x^0)|_{\mathbb{R}^d}|x-x_0|_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{|x-x_0|_{\mathbb{R}^d}}$$

$$= |\nabla f(x^0+\theta(x-x^0))-\nabla f(x^0)|_{\mathbb{R}^d} \longrightarrow 0 \quad \text{pro } x \to x_0$$

díky předpokladu $f \in C^1(M)$ ▨

Pozorování: Zobrazení: $L : \overset{\in\mathbb{R}^d}{z} \mapsto \nabla f(x_0)\cdot z \in \mathbb{R}$ je lineární

↑ Poznámka: Vidíme, že by stačilo předpokládat, že f je $C^1(O)$, kde O je otevřená množina obsahující úsečku spojující x a x_0.

Definice (totálního diferenciálu) Řekneme, že lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ je totální diferenciál funkce $f : M \to \mathbb{R}^m$ v $x^0 \in M$ pokud

$$(TD) \quad |f(x)-f(x^0)-L(x-x^0)|_{\mathbb{R}^m} = o(|x-x^0|_{\mathbb{R}^d}) \quad \text{pro } x \to x_0$$

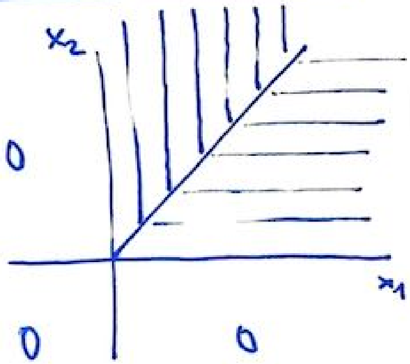
Věta 8.17 říká: $f \in C^1(M) \Rightarrow$ ① totální diferenciál L k. fci f v bodě $x^0 \in M$ existuje

a ② $L(x-x^0) = \nabla f(x^0)\cdot(x-x^0)$ $m=1$

$= Df(x^0)(x-x^0)$ $m>1$

WARNING! K existenci totálního diferenciálu NESTAČÍ $\boxed{\text{spojitost } f \text{ v } x^0}$ a $\boxed{\text{existence } \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \quad i=1,\dots,d}$

jak ukazuje následující příklad.



Příklad Buď $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definována vztahem

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1 & x_1>0,\ x_2>0,\ x_2 \geq x_1 \\ x_2 & x_1>0,\ x_2>0,\ x_1 \geq x_2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Vidíme, že $f \in C(\mathbb{R}^2)$, $f(0,0)=0$

a také $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0$.

Tedy $\boxed{Lx = (0,0)\cdot x}$ je kandidát na totální diferenciál fce f v bodě (0,0).

Avšak:

$$z := \frac{f(x_1,x_2) - \overset{=0}{f(0,0)} - \overset{=0}{Lx}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \frac{f(x_1,x_2)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \overset{\text{pro } x_2=x_1>0}{=} \frac{x_1}{\sqrt{2}\,x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

Tedy $\lim\limits_{x\to 0} z$ neexistuje a tak <u>f nemá v (0,0) totální diferenciál.</u>

∎

Často: (TD) ekvivalentně zapíšeme $\lim\limits_{h\in\mathbb{R}^d,\, h\to 0} \frac{f(x^0+h)-f(x^0)-L(x^0)h}{\|h\|_{\mathbb{R}^d}} = 0$

Obvykle: $\underline{L(x^0)h} = df(x^0)(h) = \underline{df(x^0)h}$

$\boxed{\text{Věta 8.18}}$ NUTNÉ PODMÍNKY EXISTENCE DIFERENCIÁLU

Nechť $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ má v x^0 totální diferenciál. Pak

(1) Existují $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x^0)$ pro $\forall\, i \in \{1,\dots,d\}$ a $\forall\, j \in \{1,\dots,m\}$

a platí:

$$[df(x^0)]_{ji} = L_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x^0)$$

neboli

$$df(x^0)h = Df(x^0)h \qquad \forall h \in \mathbb{R}^d$$

(2) Existují směrové derivace $\partial_v f(x^0)$ pro $\forall\, v = (v_1,\dots,v_d)$

a platí:

$$\boxed{\partial_v f(x^0) = df(x^0)v = Df(x^0)v}$$

(3) f je v bodě x^0 spojitá. ! (SPOJITOST NEPLYNE Z EXISTENCE $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x^0)$)

Dk $\boxed{\text{Ad (2)}}$ Máme

$$\partial_v f(x^0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x^0+tv)-f(x^0)}{t} = \lim_{t\to 0}\underbrace{\frac{f(x^0+tv)-f(x^0)-df(x^0)(tv)}{|t|\,\underset{1}{\overset{\shortparallel}{\|v\|_{\mathbb{R}^d}}}}\,\frac{|t|}{t}}_{\to 0}$$

$$+ \lim_{t\to 0}\frac{df(x^0)(tv)}{t} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{linearita}\\ \text{diferenciálu}}}{=} df(x^0)v$$

dle definice diferenciálu

$\boxed{\text{Ad (1)}}$ plyne z dokázaného volbou $v = e^j$, $j = 1,\dots,d$.

$\boxed{\text{Ad (3)}}$

$$f(x^0+h) - f(x^0) = \underbrace{\frac{f(x^0+h)-f(x^0)-df(x^0)h}{\|h\|_{\mathbb{R}^d}}}_{\substack{\downarrow\, h\to 0\\ 0\ \text{z definice diferenciálu.}}}\|h\|_{\mathbb{R}^d} + \underset{\substack{\downarrow\, h\to 0\\ 0\ \text{z linearity}}}{df(x^0)h}$$

Tedy $\lim\limits_{h\to 0}\left(f(x^0+h)-f(x^0)\right) = 0 \iff \lim\limits_{h\to 0} f(x^0+h) = f(x^0)$. ▨

Shrňme si situaci graficky

$f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$

A Existence $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ v $U(x^0)$ $i=1,2,\dots,d$
a jejich spojitost v x^0

$\Downarrow$ Věta 8.17

B1 Existence $df(x^0)$
tj. existence totálního diferenciálu

a také
Věta 8.18
část (1)

B2 $df(x^0)h = \begin{cases} Df(x^0)\cdot h & m=1 \\ Df(x^0)h & m>1 \end{cases}$

$\Downarrow$ Věta 8.18 $\qquad \Downarrow$ Věta 8.18 $\qquad \Downarrow$ Věta 8.18

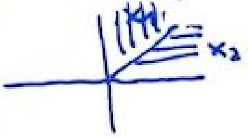
C1 Existence $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$
a platí $\boxed{\text{B2} \ \dots}$

C2 Existence $\partial_v f(x^0)$
pro $\forall v \in \mathbb{R}^d$ $|v|=1$:
$\partial_v f(x^0) = df(x^0)v \overset{(B2)}{=} \dots$

C3 f je v x^0 spojitá

Pozorování, příklady

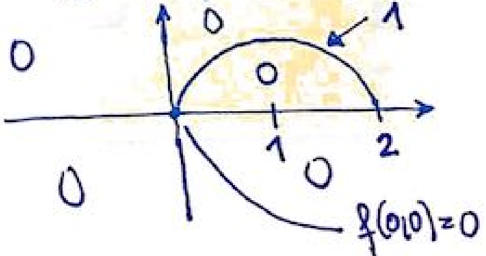
① Víme (viz Příklad pod Větou 8.18), že $\boxed{C1}+\boxed{C3} \not\Rightarrow [B1]$



ANI [C1]+[C2]+[C3] NEIMPLIKUJE $\boxed{B1}$

②

Příklad $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nulová až na polokružnici $(x^2-1)^2+y^2=1$ a $y>0$, kde $f=1$



Pak $\partial_v f(0,0)=0$ $\forall v \in \mathbb{R}^2$ $|v|_E=1$,

ale $df(0,0)$ neexistuje, neboť by muselo

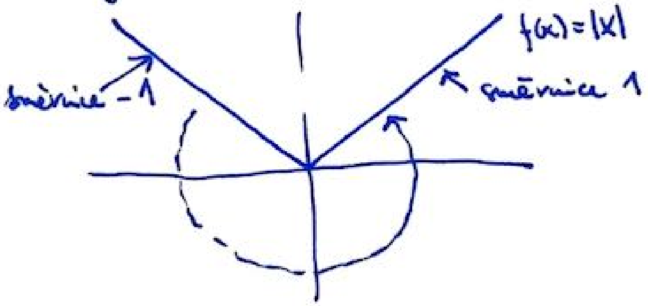
$g(h_1,h_2) := \frac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$ konvergovat k 0 pro $|h| \to 0$

ale pro $(h_1-1)^2+h_2^2=1$, $h_2>0$, $g(h_1,h_2) = \frac{1}{\sqrt{2h_1}} \to +\infty$ pro $h_1 \to 0$.

Tedy $\boxed{C2}$ (a ani [C1] a [C2] neimplikují [B1])

Zkuste si promyslet příklad (modifikaci tohoto příkladu), který by ukazoval, že $[C1]+[C2]+[C3] \not\Rightarrow [B1]$.

③ Funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definovaná předpisem $f(x)=|x|$ nemá v 0 diferenciál, ačkoliv f je spojitá. Kandidátem by mohlo být jakékoliv $a\in\langle -1,1\rangle$. Ale:



$$\frac{|h|-0-ah}{|h|}=\begin{cases} 1-a\neq 0 \quad \text{vyjma } a=-1 & h>0\\ 1+a\neq 0 \quad \text{vyjma } a=-1 & h<0\end{cases}$$

Tedy: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|-0-ah}{|h|}$ neexistuje

a f v bodě $x=0$ diferenciál nemá.

> v $\mathbb{R}$ pojmy $f'(x_0)$ a $df(x_0)$ splývají: $df(x_0)h=f'(x_0)h$ pokud obojí na levé nebo pravé straně existuje.

④ Geometrická interpretace diferenciálu

Mějme $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ takovou, že f má v $x^0=(x^0_1,\dots,x^0_d)$ diferenciál. Pak z definice diferenciálu a nutné podmínky (1) Věty 8.18, (která říká, jaký má diferenciál nutně tvar,) víme, že afinní zobrazení $A:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ definované předpisem

$$(*)\qquad A(x)=f(x^0)+\nabla f(x^0)\cdot(x-x^0)$$

aproximuje funkci f v bodě x^0.

V prostoru $\mathbb{R}^{d+1}$ toto zobrazení vytváří tečnou nadrovinu k funkci f v x^0 a (*) lze charakterizovat jako množinu všech bodů $y=(x_1,\dots,x_d,x_{d+1})$ takových, že

$$(**)\qquad \nabla f(x^0)\cdot(x-x^0)-(x_{d+1}-f(x^0))=0$$

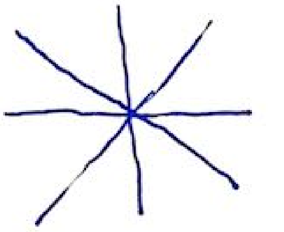
neboli, s $y^0:=(x^0,f(x^0))$ jako množinu všech bodů $y=(x_1,\dots,x_{d+1})$ takových, že

$$(***)\qquad \underbrace{(y-y^0)}_{(d+1)\text{-vektor}}\cdot\underbrace{(\overset{d\text{-vektor}}{\nabla f(x^0)},-1)}_{(d+1)\text{-vektor}}=0$$

Vektor $\vec{n}=(\nabla f(x^0),-1)$ se nazývá normála k tečné nadrovině fce f v x^0.

- Máme-li najít tečnou nadrovinu k f v x^0, tak: sestrojím $\vec{n}$ dle $\nabla f(x^0)$ a užiji (***).

Uvedeme si ještě dva příklady, které ukazují, jak je možné studovat limitu $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ v okolí nějakého bodu (x_1^0,x_2^0) pomocí polárních souřadnic a jejich zobecnění.



Příklad 1 Nechť $f(x,y)=\dfrac{x^6+y^6}{x^2-y^2}$. Pak $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ y\neq\pm x\}$.

Máme rozhodnout, zda existuje $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Řešení (i) (bez použití polárních souřadnic)

Volme dva speciální směry: $y=0$ a $y(x)=x+x^5$.

Pro $y=0$: $\quad f(x,0)=\dfrac{x^6}{x^2}\to 0$ pro $x\to0$

Pro $y=y(x)=x+x^5$:

$$f(x,x+x^5)=\frac{x^6+(x+x^5)^6}{-2x^6-x^{10}}=\frac{1+(1+x^4)^6}{-2-x^4}\to-1 \text{ pro } x\to0.$$

Našli jsme dva směry (dvě trajektorie), po kterých dostáváme různé limitní hodnoty pro $x\to0$. Tedy limita neexistuje.

Řešení (ii) Pro $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ dostáváme

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)=r^4\,\frac{\cos^6\varphi+\sin^6\varphi}{\cos2\varphi}\to0 \text{ pro } \varphi\in\langle0,2\pi)\setminus\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$$

tedy po všech paprscích je limita rovna 0

v definičním oboru

φ je však obecně závislé na r. Uvažme

$$\boxed{\varphi(r)=\frac{\pi}{4}+r^k} \qquad (k\in\mathbb{N}\text{ libovolné})$$

Pak

$$\cos\varphi(r)\to\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt2}{2} \text{ pro } r\to0 \quad\text{a}\quad \sin\varphi(r)\to\frac{\sqrt2}{2} \text{ pro } r\to0$$

ale

$$\cos2\varphi(r)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2r^k\right)=-\sin2r^k\underset{\uparrow}{=}-2r^k+o(r^{2k})$$

Taylorův rozvoj

$$\text{Tak}\quad f(r\cos\varphi(r), r\sin\varphi(r))\approx\frac{2\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^6r^4}{-2r^k+o(r^{2k})}\to-\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^6 \text{ pro } r\to0$$

zvolíme-li $\underline{k=4}$

Tedy, opět máme různé trajektorie dávající různé výsledky pro $r\to0$.

Příklad 2 $\boxed{\text{Určete } \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2+xy}{|x|+|y|}}$. Limitu lze určit bez použití polárních souřadnic. Ukážeme si správný postup, když se rozhodneme polární souřadnice použít. Položíme-li $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, pak

$$\frac{x^2-y^2+xy}{|x|+|y|}=\frac{r\left(\cos2\varphi+\frac12\sin2\varphi\right)}{|\sin\varphi|+|\cos\varphi|}$$

I když $\varphi = \varphi(r)$, tak vždy

$$\cdot \quad \left|\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right| \leq \frac{3}{2}$$

a

$$\cdot \quad |\sin\varphi| + |\cos\varphi| \geq 1 .$$

Tedy

$$0 \leq \left|\frac{x^2-y^2+xy}{|x|+|y|}\right| \leq \frac{3}{2}r \longrightarrow 0 \quad \text{pro } r\to 0$$

Tedy jsme dokázali, že $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2+xy}{|x|+|y|} = 0$ ▨

Věta 8.20 (Taylorův vzorec)

Buď $M \subseteq \mathbb{R}^d$ otevřená, $x\in M$, $h\in\mathbb{R}^d$ tak, že $\{x+th;\ t\in\langle 0,1\rangle\}\subset M$.

Buď $f: M\to\mathbb{R}$ taková, že všechny parciální derivace až do řádu $N+1$ jsou spojité (zavedeme značení $f\in C^{N+1}(M)$).

Pak existuje $\theta\in(0,1)$ tak, že

$$(\text{Taylor})\left\{\begin{aligned} f(x+h) = f(x) &+ \nabla f(x)\cdot h + \frac{1}{2} h\cdot\nabla^{(2)}f(x)\,h \\ &+ \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1} \frac{\partial^{(3)}f(x)}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k} h_i h_j h_k \\ &+ \dots \\ &+ \frac{1}{N!}\sum_{i_1,\dots,i_N=1}^{d} \frac{\partial^{(N)}f(x)}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_N}} h_{i_1}\cdots h_{i_N} \\ &+ \frac{1}{(N+1)!}\sum_{i_1,i_2,\dots,i_{N+1}=1}^{d} \frac{\partial^{(N+1)}f(x+\theta h)}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_{N+1}}} h_{i_1}\cdots h_{i_{N+1}} \end{aligned}\right.$$

neboli (následují "Definice" diferenciálů vyšších řádů)

$$f(x+h) = f(x) + \underset{\substack{\downarrow\\ \text{lineární zobrazení}}}{df(x)}\,h + \frac{1}{2}\underset{\substack{\downarrow\\ \text{bilineární zobr.}\\ \text{(kvadratická forma)}}}{d^{(2)}f(x)}(h,h) + \frac{1}{3!}\underset{\substack{\downarrow\\ \text{trilineární}}}{d^{(3)}f(x)}(h,h,h)$$

$$+ \dots + \frac{1}{N!}d^{(N)}f(x)(\underbrace{h,\dots,h}_{N\text{-krát}}) + \frac{1}{(N+1)!}d^{(N+1)}f(x+\theta h)(\underbrace{h,\dots,h}_{(N+1)\text{-krát}}).$$

(Dk) Podobně jako v důkazu Lagrangeovy věty o střední hodnotě (viz Věta 8.16) položíme

$$g(t) := f(x+th) \qquad \left(x \in M \subset \mathbb{R}^d,\ h \in \mathbb{R}^d,\ x+th \in M \ \forall t \in \langle 0,1 \rangle \right)$$

Pak

$$f(x+h) - f(x) = g(1) - g(0)$$

Taylorův polynom $\xrightarrow{N\text{-tého stupně}}$ pro funkci g v bodě 0 s Lagrangeovým tvarem zbytku.

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \frac{1}{(N+1)!} g^{(N+1)}(\theta)$$

kde $\theta \in (0,1)$

$$= (\text{Taylor}),$$

neboť

$$g^{(k)}(t) = \frac{\partial^{(k)} f(x+th)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} h_{i_1} \cdots h_{i_k}.$$

▨

Značení • Buď $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ kde $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ – multiindex.

Definujeme $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ ... řád multiindexu α.

Příklad

$\lvert\alpha\rvert = 0$	jen pro $(0,0,\dots,0)$	1
$\lvert\alpha\rvert = 1$	pro $(1,0,\dots,0), (0,1,\dots), \dots, (0,0,\dots,1)$	d
$\lvert\alpha\rvert = 2$		$\binom{d}{2}$
$\vdots$		

• Buď $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ multiindex a $f: M \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, M otevřená.

Pak

$$\boxed{D^\alpha f(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}}$$

• $$\boxed{C^k(M) := \left\{ f: M \to \mathbb{R};\ D^\alpha f \in C(M) \text{ pro } \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d),\ 0 \le |\alpha| \le k \right\}}$$

Příklad $M \subset \mathbb{R}^2$. $|\alpha| = 2$ $(2,0), (1,1), (0,2)$

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}, \quad D^\alpha f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x \partial y}, \quad D^\alpha f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial y^2}.$$

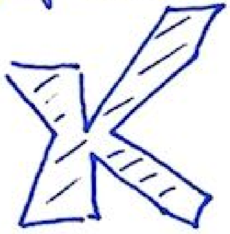
8.6 Věty o spojitém zobrazení na kompaktu, extrémy funkcí více proměnných

Připomeňme si vlastnosti spojitých fcí jedné reálné proměnné uvažovaných na UZAVŘENÉM intervalu $\langle a,b\rangle$:

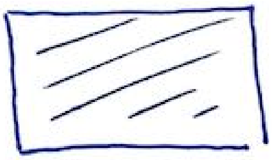
$f\in C(\langle a,b\rangle) \Rightarrow$

- f je na $\langle a,b\rangle$ omezená
- f nabývá všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$
- f nabývá v $\langle a,b\rangle$ maxima / minima
- f je stejnoměrně spojitá (Cantorova věta)

Nyní si uvedeme podobné věty pro funkce více proměnných. Uzavřený interval bude nahrazen obecnější množinou – <u>množinou kompaktní</u>



vs.



<u>v $\mathbb{R}^d$</u>: K je kompaktní $\Leftrightarrow$ K uzavřená a omezená

Věta 8.21 Buď $f\in C(K)$, $K\subset\mathbb{R}^d$ kompaktní.

Pak $\underline{L := f[K]}$ (obraz množiny K při spojitém zobrazení) <u>je kompakt</u> (v $\mathbb{R}$) (resp. v $\mathbb{R}^m$)

Speciálně: $\underline{f|_K \text{ je omezená}}$ (f je omezená na K)

Dk: Využijeme následující charakterizaci kompaktnosti (viz Věta 8.9 (1)$\Leftrightarrow$(2))

$$f[K] \text{ je kompaktní} \Leftrightarrow \left(\forall \{y^n\}_{n=1}^\infty \subset f[K]\right)\left(\exists \{y^{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{y^n\}_{n=1}^\infty\right)$$
$$\text{a } \left(\exists y\in f[K]\right) \quad y^{n_k}\to y \text{ v } \mathbb{R}\ (k\to\infty)$$

Vezměme tedy $\{y^n\}_{n=1}^\infty\subset f[K]$ libovolně. Pak dle definice obrazu množiny existují $x^n\in K$ tak, že $f(x^n)=y^n$

Ale <u>K</u> je <u>kompaktní</u>, existují tedy $x\in K$ a $\{x^{n_k}\}_{k=1}^\infty\subset\{x^n\}_{n=1}^\infty$

tak, že $x^{n_k}\to x$ v $\mathbb{R}^d$ pro $k\to\infty$

Dle Heineho charakterizace spojitosti $f(x^{n_k})\to f(x)$ v $\mathbb{R}$ $(k\to\infty)$.

Ale $f(x^{n_k}) = y^{n_k}$ a $f(x)$ je hledané $y\in f[K]$.

POZOROVÁNÍ Předchozí i následující tvrzení (Věta 8.22) platí i v situacích

(i) $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m$, $K\subset\mathbb{R}^d$ kompaktní

(ii) $f:(X,\rho_X)\to(Y,\rho_Y)$ kde (X,ρ_X) a (Y,ρ_Y) jsou úplné metrické prostory.

Věta 8.22 Buď $f\in C(K)^m$, $K\subset\mathbb{R}^d$ kompaktní, $m\in\mathbb{N}$. Pak f je stejnoměrně spojitá v K.

Dk Vyjdeme z definice stejnoměrné spojitosti f v K:

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0)\,(\forall x,y\in K)\ \boxed{|x-y|_{\mathbb{R}^d}<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|_{\mathbb{R}^m}<\varepsilon}$$

a tvrzení dokážeme sporem. Předpokládáme tedy

$$\boxed{f\in C(K)\wedge f \text{ není stejnoměrně spojitá na } K,\ K\subset\mathbb{R}^d \text{ kompaktní}}$$

$$\exists\varepsilon_0>0\ \forall n\in\mathbb{N}\ \exists\{x^n\},\{y^n\}\subset K$$

$$(*)\qquad |x^n-y^n|_{\mathbb{R}^d}<\frac{1}{n}\ \wedge\ |f(x^n)-f(y^n)|_{\mathbb{R}^m}\geq\varepsilon_0$$

Protože K je kompaktní,

existují: $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\subset\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\subset\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$

a $x,y\in K$:

$$x^{n_k}\to x \quad \text{a} \quad y^{n_k}\to y \quad \text{v } \mathbb{R}^d\ (k\to\infty)$$

Avšak dle první části $(*)$: $\boxed{x=y}$

a dle spojitosti

$$f(x^{n_k})\to f(x)\underset{x=y}{=}f(y)\leftarrow f(y^{n_k})$$

neboli $f(x^{n_k})-f(y^{n_k})\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ což dává spor s druhou částí $(*)$.

▨

Následující věta je první větou zaručující existenci minimizéru (maximizéru), tj. bodu, ve kterém funkce nabývá svého minima (resp. maxima). Důkaz věty je "blízký" důkazu základní věty moderní teorie variačního počtu.

Věta 8.23 Buď $f \in C(K)$, $\boxed{f : \mathbb{R}^d \to \boxed{\mathbb{R}\ !}}$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní.
Pak f nabývá v K minima a maxima.

Dk • Buď $m := \inf\limits_{x \in K} f(x)$. Z Věty 8.21 plyne, že
f je omezené a tedy $m > -\infty$.
Z definice m plyne existence $\{x^n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ tak, že

(1) $$f(x^n) \searrow m$$

- Protože K je kompaktní: existuje $x \in K$ a $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $$x^{n_k} \to x \text{ v } \mathbb{R}^d \quad (k \to \infty)$$
- Protože $f \in C(K)$ $$f(x^{n_k}) \to f(x)$$ a porovnáním s (1): $\underline{f(x) = m}$ Tedy infimum se v K nabývá.

Podobně postupujeme v případě $M := \sup\limits_{x \in K} f(x)$. ▨

Nadále uvažujeme $f : \mathbb{R}^d \to \underline{\underline{\mathbb{R}}}$. Pojem globální (lokální) minimum/maximum (extrém) je definován stejně jako pro f jedné reálné proměnné. Uvedeme si nyní nutnou a postačující podmínku existence (lokálního) minima (maxima).

Věta 8.24 (Nutná podmínka existence extrému) Nechť

- $M \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená;
- $f : M \to \mathbb{R}$ má v $x_0 \in M$ lokální extrém;
- f má v $U_\delta(x_0) \subset M$ první parciální derivace;

Pak
$$\underline{\nabla f(x_0) = 0} \qquad (d \text{ podmínek})$$

Dk Pro $i = 1, 2, \dots, d$ uvažuj fce

$g^i(t) : (-\delta, \delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ definované $g^i(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{e}^i)$
$= f(x_0 + te^i)$

Pak g^i mají v 0 lokální extrém

a dle Věty 4.1 (ZS): $(g^i)'(0) = 0$

Avšak

$$(g^i)'(t)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te^i) - f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$ a tvrzení plyne. ▨

definice parciální derivace

$\boxed{\text{Věta } 8.25}$ (Postačující podmínka k existenci minima/maxima)

Nechť

(i) • $f \in C^2(U_\delta(x_0))$

(ii) • $\nabla f(x_0) = 0$

(iii) • $d^{(2)}f(x_0)(h,h)$ $\begin{cases} \text{pozitivně definitivní, tzn.} \\ \text{negativně definitivní,} \end{cases}$

tzn. $\boxed{d^{(2)}f(x_0)(h,h) > 0 \quad \forall h \neq 0}$
$\Updownarrow$
tzn. $\boxed{\exists \alpha > 0 \;\; d^{(2)}f(x_0)(h,h) \geq \alpha |h|^2_{\mathbb{R}^d}}$

Pak f má v bodě x_0 ostré lokální $\begin{cases} \text{minimum} \\ \text{maximum} \end{cases}$

Dk Dle Taylorova rozvoje (s využitím (ii)):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} d^{(2)}f(x_0 + \theta h)(h,h) \qquad x = x_0 + h$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2} d^{(2)}f(x_0)(h,h) + \underbrace{\frac{1}{2}\left[d^{(2)}f(x_0+\theta h) - d^{(2)}f(x_0)\right](h,h)}_{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0+\theta h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right] h_i h_j}$$

Ze spojitosti druhých derivací: $\left| \quad \vdots \quad \right| \leq \frac{\alpha}{2}|h|^2$

pro $|h|$ dostatečně malé

Tedy

$$f(x) \geq f(x_0) + \underbrace{\alpha |h|^2 - \frac{\alpha}{2}|h|^2}_{>0} > f(x_0) \qquad \forall x \in U_\delta(x_0)$$

což jsme chtěli ověřit. !! ▨

$h \neq 0$

$$\boxed{\mathbb{A} = \mathbb{A}^T}$$

Druhý diferenciál $d^{(2)}f(x)(h,h)$ je kvadratická forma.

Řekneme, že kvadratická forma $Q(h,h) := h\cdot \mathbb{A}h = \sum_{i,j=1}^{d} A_{ij}h_ih_j : \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je

- positivně definitivní $\overset{df.}{\equiv}$ $Q(h,h)>0 \quad \forall h\neq 0$ $\Big\}\, h\in\mathbb{R}^d$ (PD)
- negativně definitivní $\equiv$ $Q(h,h)<0 \quad \forall h\neq 0$ (PN)
- indefinitní $\equiv$ $\exists h^1\in\mathbb{R}^d \quad Q(h^1,h^1)>0$ (IN)
  $\exists h^2\in\mathbb{R}^d \quad Q(h^2,h^2)<0$

Pozor! $Q(h,h)$ je

- positivně semidefinitní $\equiv$ $Q(h,h)\geq 0 \quad \forall h\in\mathbb{R}^d$
- negativně —‖— $\equiv$ $Q(h,h)\leq 0$ —‖—.

Platí:

$$Q(h,h)>0 \quad \forall h\neq 0,\ h\in\mathbb{R}^d \iff (\exists\alpha>0)\left(Q(h,h)\geq\alpha|h|^2 \quad \forall h\in\mathbb{R}^d\right)$$

Dk $\boxed{\Leftarrow}$ přímo.

$\boxed{\Rightarrow}$ Množina $\{h\in\mathbb{R}^d;|h|_2=1\}$ je kompaktní v $\mathbb{R}^d$, $Q(h,h)\in C^\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$, a $Q(h,h)$ nabývá na $\{h\in\mathbb{R}^d;|h|_2=1\}$ minima, označme jej $\alpha>0$.

Pak pro $h\neq 0$ libovolné

$$\frac{1}{|h|_2^2}Q(h,h) = Q\left(\frac{h}{|h|_2},\frac{h}{|h|_2}\right)\geq\alpha>0,$$

což implikuje $Q(h,h)\geq\alpha|h|_2^2 \quad \forall h\neq 0.$ ▨

$\boxed{\text{POZOROVÁNÍ}}$ Pro $\boxed{d=2}$ je podmínka $d^{(2)}f(x)(h,h)>0$ ekvivalentní zápisu

$$(\bullet) \qquad (h_1,h_2)\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix} > 0 \qquad \left[x=\vec{x}=(x,y)\in\mathbb{R}^2\right]$$

Označme $A := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x)$ $\quad B := \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x)$ $\quad C := \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x)$

Pak $(\bullet)$ je ekvivalentní s

$$Ah_1^2+2Bh_1h_2+Ch_2^2>0 \qquad \forall (h_1,h_2)\neq(0,0)$$

$\overset{h_1\neq 0}{\Longleftrightarrow}$ $\quad A+2B\left(\frac{h_2}{h_1}\right)+C\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2>0$

$\overset{h_2\neq 0}{\Longleftrightarrow}$ $\quad C+2B\left(\frac{h_1}{h_2}\right)+A\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2>0$

nastane pokud

$\boxed{A>0 \wedge B^2-AC<0}$ nebo $\boxed{C>0 \wedge B^2-AC<0}$

Obecněji, pro $\boxed{d \geq 2}$ ⊡ $d^{(2)}f(x)(h,h) > 0 \iff \underbrace{\lambda_1,\dots,\lambda_d}_{\text{vlastní čísla „}D^{(2)}f(x)\text{"}} > 0$

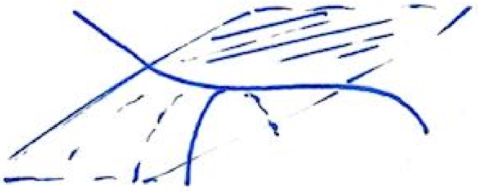
⊡ $< 0 \iff \lambda_1,\dots,\lambda_d < 0$

⊡, indefinitní $\iff \lambda_1 > 0,\ \lambda_d < 0$

Def. Řekneme, že $x^0 = (x^0_1,\dots,x^0_d) \in \mathbb{R}^d$ je sedlový bod funkce $f \in C^2(U_\delta(x^0))$ pokud

- $\nabla f(x^0) = 0$
- $\exists\, h^1, h^2 \in \mathbb{R}^d$ tak, že $d^2f(x^0)(h^1,h^1) > 0$ a $d^2f(x^0)(h^2,h^2) < 0$

v $\boxed{d=2}$ nastane pokud $B^2 - AC > 0$ (viz str. 8/48)



Pozorování $\boxed{d=1}$ · $f'(x)=0,\ f''(x) > 0 \Rightarrow$ v x lokální minimum $[f(x) = x^2]$

· $f'(x)=0,\ f''(x) < 0 \Rightarrow$ v x lok. maximum $[f(x) = -x^2]$

$\boxed{d=2}$ · $f(x,y) = x^2+y^2$ $\quad \nabla f(x)\big|_{(x,y)=(0,0)} = (2x,2y)\big|_{(x,y)=(0,0)} = (0,0)$

$Hf(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad d^{(2)}f(0,0)(h,h) = 2h_1^2 + 2h_2^2$

$\Rightarrow \boxed{\text{v } (0,0) \text{ lokální minimum}}$

· $f(x,y) = -x^2-y^2$ $\quad Hf(x)\big|_{x=(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{v } (0,0) \text{ lokální maximum}}$

· $f(x,y) = x^2-y^2$ $\quad \nabla f(x) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$

$Hf(x)\big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$h^{I} = (1,0) \Rightarrow d^2f(0,0)(h^{I},h^{I}) > 0$

$h^{II} = (0,1) = d^2f(0,0)(h^{II},h^{II}) < 0.$

$\Rightarrow d^2f(0,0)(\underset{(h_1,h_2)}{h},h) = 2h_1^2 - 2h_2^2$

$\boxed{\text{v } (0,0) \text{ SEDLOVÝ BOD}}$

Pokud $d^2f(x^0)(h,h) = 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^d$, nelze nic říci o chování fce v okolí x^0, jak ukazují následující příklady:

(a) $f(x,y) = x^4 + y^4$ v $(0,0)$ minimum

(b) $f(x,y) = -(x^4 + y^4)$ v $(0,0)$ maximum

(c) $f(x,y) = x^4 - y^4$ v $(0,0)$ sedlový bod.

Příklady ① Najděte a klasifikujte extrémy funkce

$$f(x,y) = \frac{x}{y^2} + xy.$$

Řešení $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \neq 0\}$

v D_f: $\nabla f(x,y) = \left(y + \frac{1}{y^2},\ x - 2\frac{x}{y^3}\right) = (0,0) \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} y^3 + 1 = 0\ \& \\ x(y^3 - 2) = 0 \end{matrix}}$

$\Leftrightarrow (y = -1) \wedge \boxed{x = 0}$ $\qquad y^3 + 1 = (y+1)(y^2 + y + 1)$

Podezřelý bod: $\boxed{x^0 = (0,-1)}$

$$\text{Hessián } f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 - 2y^{-3} \\ 1 - 2y^{-3} & 6xy^{-4} \end{pmatrix} \xRightarrow{(x,y) = x^0} Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ⓘ $\boxed{\begin{matrix} B^2 - AC = 9 > 0 \\ \Rightarrow \text{v } (0,-1) \\ \text{je sedlový bod} \end{matrix}}$

Také, ⓘⓘ $d^2f(0,0)(h,h) = 3(h_1,h_2)\cdot(h_2,h_1) = 6h_1h_2$

$$\left.\begin{matrix} h^I = (1,1) \Rightarrow d^2f(0,0)(h^I,h^I) > 0 \\ h^{II} = (1,-1) \Rightarrow d^2f(0,0)(h^{II},h^{II}) < 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$$

ⓘⓘⓘ $(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ charakteristická rovnice $+\lambda^2 - 1 = 0$ $\quad \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}}$ $\Rightarrow$

$A := Hf(0,0)$

② Najděte a klasifikujte extrémy $f(x,y) = -xye^{-\frac{(x^2+y^3)}{2}}$

Řešení: (cvičení) $\boxed{D_f = \mathbb{R}^2}$ neboť
- $(x,y) \mapsto -\frac{x^2+y^2}{2} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$
- $(x,y) \mapsto -xy \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$
- $t \mapsto e^t \in C^\infty(\mathbb{R})$

(a užiji věty o derivování, spojitosti součinu, složeného zobrazení.)

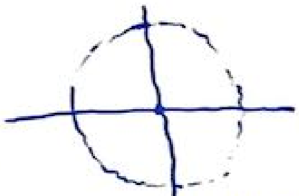
Nutná podmínka na extrémy

$$0 = \nabla f(x,y) = \left(e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\left[-y+x^2y\right], e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\left[-x+xy^2\right]\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y(x^2-1)=0} \wedge \boxed{x(y^2-1)=0}$$

$$\left[y=0 \vee x=1 \vee x=-1\right] \wedge \left[x=0 \vee y=1 \vee y=-1\right]$$

Podezřelé body $[0,0], [1,1], [1,-1], [-1,-1], [-1,1]$



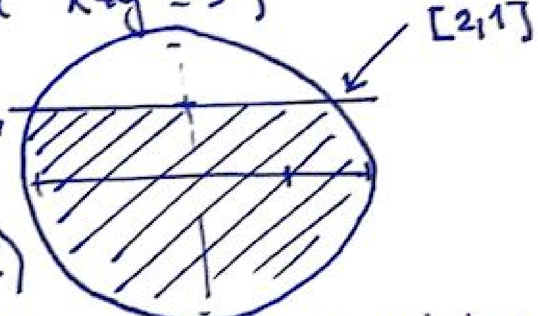
Hessián

$$H_f(x,y) := e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \begin{pmatrix} 2xy+yx-x^3y & x^2-1+y^2-x^2y^2 \\ y^2-1+x^2-x^2y^2 & 2xy+xy-xy^3 \end{pmatrix} = e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} \begin{bmatrix} 3xy-x^3y & x^2+y^2-1-x^2y^2 \\ x^2+y^2-1-x^2y^2 & 3xy-xy^3 \end{bmatrix}$$

- $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ <u>$(0,0)$ je sedlový bod</u> (neb $\underbrace{B^2-4AC}_{=1} > 0$) | $f(0,0)=0$
- $H_f(1,1) = e^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (1,1)$ je lokální minimum $f(1,1) = -\frac{1}{e}$
- $H_f(1,-1) = e^{-1}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (1,-1)$ je bod lok. maxima $f(1,-1) = \frac{1}{e}$
- $H_f(1,-1) = e^{-1}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1,1)$ –〃– $f(-1,1) = \frac{1}{e}$
- $H_f(-1,-1) = H_f(1,1) \Rightarrow (-1,-1)$ je lokální minimum $f(-1,-1) = \frac{1}{e}$

<u>Globální extrémy</u> v $[-1,-1]$ a $[1,1]$ jsou globální minima
v $[1,-1]$ a $[-1,1]$ jsou globální maxima
neboť $|f(x,y)| \longrightarrow 0$ pro $\|(x,y)\| \geq r$ a $r \to \infty$

③ Najděte globální extrémy funkce $f(x,y) = x-y$ na množině $K := \{(x,y);\ y \le 1 \ \text{a}\ x^2+y^2 \le 5\}$



Řešení
- K je uzavřená, omezená v $\mathbb{R}^2$ tedy kompaktní
- $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ speciálně $f \in C(K)$

Tedy dle Věty 8.21 f nabývá na K maxima a minima.

Dále $\nabla f(x,y) = (1,-1) \neq (0,0)$ v $\mathbb{R}^2$

a tedy f nabývá maxima a minima na ∂K, kde

$$\partial K = \underbrace{\{(x,y);\ x \in (-2,2),\ y=1\}}_{\partial K_1} \cup \{[2,1],[-2,1]\} \cup \underbrace{\{(x,y);\ x^2+y^2=5 \wedge y<1\}}_{\partial K_2}$$

$\boxed{\text{Na } \partial K_1}$ $\left.\begin{aligned} f(x,y) &= x-1 =: g(x) \\ g'(x) &= 1 \neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ podezřelé body $[2,1]$ a $[-2,1]$

3 podezřelé body

$\boxed{\text{Na } \partial K_2}$ $x = \sqrt{5}\cos\varphi$

$y = \sqrt{5}\sin\varphi \quad (<1)$

$h(\varphi) = \sqrt{5}(\cos\varphi - \sin\varphi)$

$h'(\varphi) = -\sqrt{5}(\sin\varphi + \cos\varphi) = 0 \iff \operatorname{tg}\varphi = -1$

$\varphi = -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \Longrightarrow x = \sqrt{5}\frac{\sqrt{2}}{2},\ y = -\sqrt{5}\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \overset{\text{\& } y<1}{\left[\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right]}$

$\to x = -\frac{\sqrt{10}}{2},\ y = \frac{\sqrt{10}}{2} > 1,$

VIZ DOKONČENÍ NA STRANĚ 8/54. ▨

Vidíme, že výpočet není jednoduchý ani pro snadné funkce: potřebuji znát popis a parametrizaci hranice a vypočítat intervaly parametrizace.

> Úkol: $\min\limits_{(x,y)\in A} f(x,y)$ kde $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ g(x,y)=0\}$ .... vazba

je tzv. úloha na vázané extrémy. K řešení takovýchto úloh lze využít s úspěchem metodu tzv. Lagrangeových multiplikátorů (značených λ ... Lagrange).

Věta 8.26 (Lagrangeova věta o multiplikátorech o vázaných extrémech)

Buď $f, g \in C^1(M)$, $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $d \geq 2$.

Buď $A := \{x \in M ;\ g(x) = 0\}$. (VAZEBNÍ PODMÍNKA)

Buď $z^0 \in M$ takový, že $f(z^0) = \min\limits_{z \in A} f(z)$ nebo $f(z^0) = \max\limits_{z \in A} f(z)$

Buď $\nabla g(z^0) \neq 0$

Pak existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že $\nabla f(z^0) = \lambda \nabla g(z^0)$.

„(Dk)" Dnes jen pro $\boxed{d=2}$

V okolí $z^0 = (x^0, y^0)$ si parametrizujme body vazební podmínky parametrizací: $t \longmapsto (x(t), y(t))$ pro $t \in (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$.

tak, že $(x(0), y(0)) = (x^0, y^0)$.

Máme tedy

(*) $$g(x(t), y(t)) = 0 \qquad \text{pro } t \in (-\delta, \delta)$$

Derivováním (*) dostáváme:

$$\nabla g(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0$$

Speciálně pro $t = 0$:

(1) $$\nabla g(x^0, y^0) \cdot (x'(0), y'(0)) = 0$$

Avšak (x^0, y^0) je extrém funkce f vzhledem k vazbě respektive její parametrizaci. Tedy

$h(t) := f(x(t), y(t))$ má v $t = 0$ extrém,

což implikuje

(2) $$0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \Big|_{t=0} = \nabla f(x^0, y^0) \cdot (x'(0), y'(0))$$

Porovnáním (1) a (2) dostáváme

$$\nabla f(x^0, y^0) \parallel \nabla g(x^0, y^0)$$

Oba vektory jsou kolmé na $(x'(0), y'(0))$ a jsou tedy kolineární

Tedy $\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $\nabla f(x^0, y^0) = \lambda \nabla g(x^0, y^0)$.

Ad Příklad ③ $\quad f(x,y) = x - y$ $\quad \Longrightarrow$

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 5$

$\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \neq (0,0)$ na $g(x,y) = 0$.

Nutné podmínky optimality:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \Rightarrow$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \Rightarrow$
- $g(x,y) = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{c} 1 = 2\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 5 \end{array}}$$

systém rovnic pro x, y, λ.

což implikují $\quad 2\lambda(x+y) = 0 \quad \lambda = 0 \vee \boxed{y = -x}$

$x^2 + y^2 = 5 \quad \boxed{x^2 + y^2 = 5} \Big\} \Rightarrow 2x^2 = 5$

$x_{12} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \quad \wedge \quad y_{12} = \mp\sqrt{\frac{5}{2}} \qquad y < 1$ jen pro $y_1 = -\sqrt{\frac{5}{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{2}$

Podmínku $y = -x$ a $y < 1$ splňuje jen bod $\left[\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right]$.

Tedy celkově porovnáním hodnot v podezřelých bodech získáme odpověď na náš úkol:

$$f\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = \sqrt{10} > 3 \quad , \quad f(2,1) = 1 \quad , \quad f(-2,1) = -3$$

Tedy f nabývá globálního minima v bodě $[-2,1]$

a globálního maxima v bodě $\left[\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right]$.

$\boxed{8.7}$ O čtyřech hlubších (krásných) větách

(1) Banachova věta o pevném bodě

(2) Věta o implicitních funkcích

(3) Věta o inverzním zobrazení

(4) Lagrangeova věta o vázaných extrémech

$\boxed{8.7.1}$ BANACHOVA VĚTA O PEVNÉM BODĚ A JEJÍ DŮSLEDKY.

Připomenutí: X je Banachův ≡ úplný normovaný vektorový prostor

$(X, \|\cdot\|_X)$

∀ cauchyovská $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní v $(X, \|\cdot\|_X)$.

Definice Buď X množina. Řekneme, že zobrazení $T: X \to X$ má pevný bod pokud existuje $x_0 \in X$: $\boxed{Tx_0 = x_0}$

$\boxed{\text{Věta } 8.27}$ (BANACHOVA)

Buď $(X, \|\cdot\|_X)$ Banachův prostor a $T: X \to X$ kontrakce,

tzn. (K) $\boxed{\exists\ \theta \in (0,1) \text{ tak, že } \|Tx - Ty\|_X \leq \theta \|x-y\| \text{ pro } \forall x,y \in X}$

Pak T má právě jeden pevný bod.

Pozorování
- Kontraktivní zobrazení je lipschitzovské zobrazení s konstantou lipschitzovsti menší než 1.
- Lipschitzovské zobrazení je lipschitzovsky spojité zobrazení, tedy spojité.
- Tedy kontrakce nebo kontraktivní zobrazení je spojité zobrazení.

POZNÁMKA Věta platí v úplném metrickém prostoru (X, ϱ).
Tvrzení sami přeformulujte !!

Dk Banachovy věty

[1] $T : X \to X$ je spojité (neboť je kontraktivní)

[2] Jednoznačnost Kdyby T měl dva různé pevné body $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in X$, pak $Tx_1 = x_1$ a $Tx_2 = x_2$ a z podmínky (K) plyne

$$\underline{\|x_1-x_2\|_X} = \|Tx_1-Tx_2\|_X \le \theta \underline{\|x_1-x_2\|}$$

což implikuje

$$(1-\theta)\|x_1-x_2\|_X \le 0.$$

[3] Existence Volme $x_1 \in X$ libovolně a definujme

$$\boxed{x_n := Tx_{n-1}} \qquad n \geq 2.$$

Ukážeme, že takto definovaná posloupnost je cauchyovská. Protože X je úplný, tak existuje $x_0 \in X$ tak, že

$$x_n \to x_0 \quad v\ X$$

Ze spojitosti:

$$\boxed{Tx_n \to Tx_0 \quad v\ X} \qquad (*)$$

Ale

$$\boxed{Tx_n = x_{n+1} \to x_0 \quad v\ X} \qquad (**)$$

Z jednoznačnosti limity $Tx_0 = x_0$, což jsme chtěli ukázat.

[4] Zbývá ověřit, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská.

Avšak:

$$\|x_{n+1}-x_n\|_X = \|Tx_n - Tx_{n-1}\| \overset{(K)}{\le} \theta \|x_n - x_{n-1}\|_X$$

$$\text{------} \le \theta^{n-1} \|x_2 - x_1\|_X$$

Odsud: pro $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$:

$$\|x_n - x_m\|_X = \|x_n \overbrace{- x_{n-1} + x_{n-1}} - x_{n-2} + \dots + x_{m+1} - x_m\|$$

(Δ-nerovnost) $$\le \|x_n - x_{n-1}\|_X + \|x_{n-1} - x_{n-2}\|_X + \dots + \|x_{m+1} - x_m\|_X$$

$$\le \underbrace{(\theta^{n-1} + \dots + \theta^{m-1})}\|x_2 - x_1\|$$

B-C podmínka pro geom. řadu

část konvergentní geometrické řady

$$\le \varepsilon \|x_2 - x_1\| \Rightarrow \{x_n\} \text{ je cauchyovská.}$$

$\boxed{\text{Banachova věta v úplném metrickém prostoru}}$ • Buď (X,ρ) <u>úplný</u> metrický prostor se vzdáleností (metrikou) $\rho : X\times X \mapsto \mathbb{R}_0^+$.

• Buď $T: X \to X$ <u>kontrakce</u> (respektive kontraktivní zobrazení) tj.

$$\boxed{\exists\, \theta\in(0,1): \quad \rho(Tx,Ty) \leq \theta\,\rho(x,y) \qquad \text{pro všechna } x,y\in X.}$$

Pak T má <u>právě jeden</u> pevný bod $\overline{x}\in X$, tj. $\boxed{T\overline{x}=\overline{x}}$

Navíc: je-li $x_0\in X$ zvoleno libovolně, pak posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaná $\quad x_{n+1} := Tx_n \quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

konvergují k $\overline{x}$ exponenenciálně a platí tyto odhady:

$$(🌷)\quad \left\{\begin{aligned} \rho(x_n,\overline{x}) &\leq \frac{\theta^n}{1-\theta}\,\rho(x_1,x_0)\\ \rho(x_{n+1},\overline{x}) &\leq \frac{\theta}{1-\theta}\,\rho(x_{n+1},x_n)\\ \rho(x_{n+1},\overline{x}) &\leq \theta\,\rho(x_n,\overline{x}). \end{aligned}\right.$$

(Dk) [i] Jednoznačnost. Kdyby x a y byly dva <u>různé</u> pevné body, ↯ pak splňují $Tx=x$ a $Ty=y$ a máme:

$$\rho(x,y) = \rho(Tx,Ty) \leq \theta\,\rho(x,y) \Rightarrow \underbrace{(1-\theta)}_{>0}\,\rho(x,y) \leq 0 \Rightarrow \rho(x,y)=0 \Rightarrow x=y. \;\square$$

[ii] Existence. Buď $x_0\in X$. Pro $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ položme $x_{n+1} := Tx_n$.

Pak $(n\in\mathbb{N})$

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+1},x_n) &= \rho(Tx_n,Tx_{n-1}) \leq \theta\,\rho(x_n,x_{n-1})\\ &= \rho(Tx_{n-1},Tx_{n-2}) \leq \theta^2\rho(x_{n-1},x_{n-2})\\ &\;\vdots\\ &\;\ldots\ldots \leq \theta^n\rho(x_1,x_0) = \theta^n\rho(Tx_0,x_0), \end{aligned}$$

což implikuje

$$\boxed{p>n} \quad \rho(x_p,x_n) \leq \sum_{j=n}^{p-1}\rho(x_{j+1},x_j) \leq \sum_{j=n}^{p-1}\theta^j\rho(x_1,x_0) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta}\,\rho(x_1,x_0)$$

$$\sum_{j=n}^{p-1}\theta^j \leq \sum_{j=n}^{\infty}\theta^j = \theta^n\sum_{j=0}^{\infty}\theta^j = \frac{\theta^n}{1-\theta}$$

Tedy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská a protože (X,ρ) je úplný, existuje $\overline{x}\in X$ takové, že $x_n \to \overline{x}$ v (X,ρ) tj. $\boxed{\rho(x_n,\overline{x}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

Limitním přechodem v $x_{n+1} = Tx_n$ dostáváme

$$\boxed{\overline{x} = T\overline{x}}$$

[iii] Odhady (🌷) si odvodíte sami postupy jako výše.

Pomocí Banachovy věty o pevném bodě (věta 8.27) nyní dokážeme Picard-Lindelöfovu větu 7.3. Připomeňme si její znění.

$\boxed{\text{Věta 7.3}}$ (Picard-Lindelöfova věta o existenci a jednoznačnosti)

Nechť

(P1) $\vec{f}: E \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je spojitá na otevřené množině $E \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$

(P2) $\vec{f}: E \to \mathbb{R}^N$ je na E lokálně lipschitzovsky spojitá vzhledem k $\vec{y}$

tzn. $\forall K \subset E$ kompaktní $\exists \lambda = \lambda_K$ tak, že

$\forall (t,\vec{y}_1), (t,\vec{y}_2) \in K \quad |\vec{f}(t,\vec{y}_1) - \vec{f}(t,\vec{y}_2)|_{\mathbb{R}^N} \le \lambda |\vec{y}_1 - \vec{y}_2|_{\mathbb{R}^N}$

Pak (pro $\forall (t_0,\vec{y}_0) \in E$) $\exists!$ (existuje právě jedno) $\vec{y}: (t_0-\delta, t_0+\delta) \to \mathbb{R}^N$ splňující

$$(P_d)\ \boxed{\vec{y}\,' = f(t,\vec{y}) \text{ a } \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0} \iff \boxed{\vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(s,\vec{y}(s))\,ds}\ (P_i)$$

Dk [1] K důkazu využijeme integrální formulaci (P_i), která je ekvivalentní v našem kontextu formulaci (P_d).

[2] Buď $(t_0,\vec{y}_0) \in E$ libovolné, pevné. Buď $K := \{(t,\vec{z});\ t \in \langle t_0-a, t_0+a\rangle \text{ a } |\vec{z}-\vec{y}_0|_{\mathbb{R}^N} \le b\}$ takové, že $K \subset E$. Protože K je kompaktní a f splňuje (P1), tak existuje $M>0$: $|f(t,\vec{z})| \le M \quad \forall (t,\vec{z}) \in K$.

[3] Definujeme $X := \{\vec{y} \in C(\langle t_0-\delta, t_0+\delta\rangle)^N;\ |\vec{y}(t) - \vec{y}_0|_{\mathbb{R}^N} \le b \text{ pro } t \in \langle t_0-\delta, t_0+\delta\rangle\}$

s normou $\|\vec{y}\|_X := \max_{t\in\langle t_0-\delta, t_0+\delta\rangle} |\vec{y}(t)|_{\mathbb{R}^N}$.

Víme, že $(X, \|\cdot\|_X)$ je úplný.

[4] Definujeme $\boxed{T: X \to X \text{ předpisem } T\vec{y} := \vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(s,\vec{y}(s))\,ds.}$

Potřebujeme ukázat, že

a) T zobrazuje $\vec{y} \in X$ do X

b) T je kontrakce.

} Tyto dva požadavky dají restrikci na δ.

$\boxed{\text{Ad a)}}$ $$|T\vec{y} - \vec{y}_0|_{\mathbb{R}^N} \le \int_{t_0}^{t} |\vec{f}(s,\vec{y}(s))|\,ds \le M|t-t_0| \le M\delta \underset{\uparrow}{\le} b$$

pokud $\boxed{\delta \le \frac{b}{M}}$

$\boxed{\text{Ad b)}}$

$$|T\vec{y}_1(t) - T\vec{y}_2(t)| \le \int_{t_0}^{t} |\vec{f}(s,\vec{y}_1(s)) - \vec{f}(s,\vec{y}_2(s))|\,ds$$

$$\underset{(P2)}{\le} \lambda_K \int_{t_0}^{t} |\vec{y}_1(s)-\vec{y}_2(s)|_{\mathbb{R}^N} ds$$

$$\le \lambda_K \delta \max_{s\in\langle t_0-\delta, t_0+\delta\rangle} |\vec{y}_1(s)-\vec{y}_2(s)|_{\mathbb{R}^N}$$

Tedy, pokud $\underset{\theta:=}{\lambda_K \delta} < 1$, pak T je kontrakce, neboť přechodem k maximu přes $t \in \langle t_0-\delta, t_0+\delta\rangle$ na levé straně dostáváme

$$\| T\vec{y}_1 - T\vec{y}_2 \|_X \le \theta \| \vec{y}_1 - \vec{y}_2 \|_X$$

Je-li tedy $\delta < \min\left\{\frac{1}{\lambda_K}, \frac{b}{M}, a\right\}$, pak T splňuje a) a b), tj. zobrazuje $(X, \|\cdot\|_X)$ do $(X, \|\cdot\|)$ a navíc je T kontrakce. Dle Banachovy věty $\exists!\ \vec{y} \in X$ splňující $T\vec{y} = \vec{y}$. To však znamená, že platí (P_1). Důkaz je hotov.

Věta o existenci řešení počáteční úlohy (P_1) platí i za slabších (obecnějších) předpokladů, než vyžaduje Peanova věta 7.2 (které zatím nebudeme dokazovat). Řešení (P_1) existují pokud

(i) $\vec{y} \mapsto f(t, \vec{y})$ je spojité pro <u>skoro všechna</u> $t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$

(ii) $t \mapsto f(t, \vec{y})$ je <u>měřitelné</u> pro všechna $\vec{y}$

Pojmy skoro všude a měřitelná funkce si objasníme v kapitole o Lebesgueově integrálu v ZS 2020/21.

Věta 8.28 (Ještě jedna varianta Banachovy věty)

Buď $T: B_R(0) \to \mathbb{R}^m$ spojité, $B_R(0) \subset \mathbb{R}^m$. Nechť existují $q \in (0,1)$ a $\delta > 0$ tak, že $B_\delta(0) \subset B_R(0)$ a platí:

$$\boxed{(\alpha)\ |T(y) - T(z)|_{\mathbb{R}^m} \le q\, |y - z|_{\mathbb{R}^m} \text{ pro každé } y, z \in B_\delta(0)} \ \& \ \boxed{(\beta)\ T(0) \le \delta(1-q)}$$

Pak $\exists!\ y_0 \in \overline{B_\delta(0)}$ tak, že $Ty_0 = y_0$.

Dk: Volme $q \in (0,1)$ libovolně, pevně a Nechť (α) a (β) platí. Pro posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$\boxed{x_n = T^n(0) = Tx_{n-1}} \quad |x^n|_{\mathbb{R}^m} = |T^n(0)| \le \sum_{i=0}^{n-1} |T^{i+1}(0) - T^i(0)| \le \sum_{i=0}^{n-1} q^i |T(0) - 0|$$

$$\le \frac{1}{1-q} |T(0)| \underset{(\beta)}{\le} \delta. \quad ▨$$

[OSTATNÍ KROKY JAKO V. 8.27]

8.7.2 Věta o implicitních funkcích

V této sérii se budeme zabývat rovnicemi tvaru

(1) $$F(x,y)=0$$

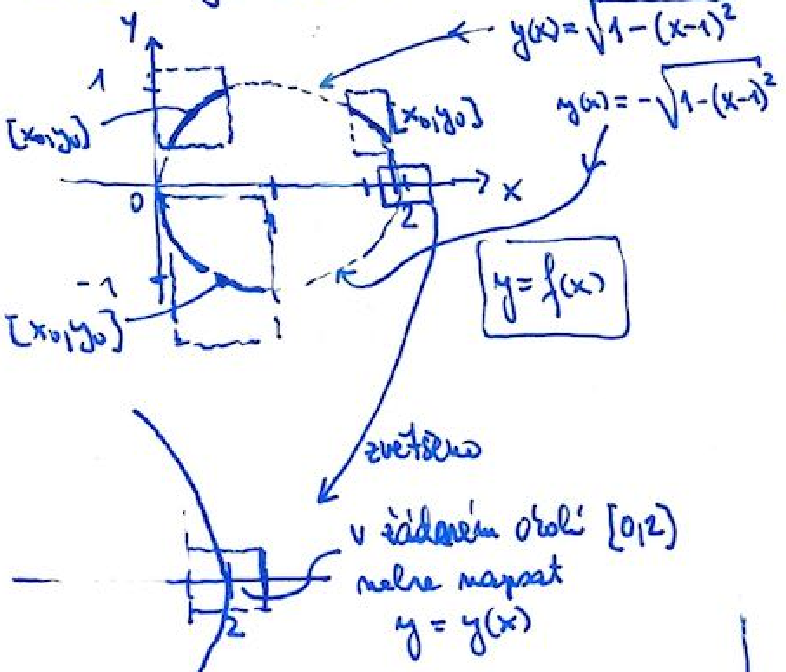
Úkolem je rozhodnout, zda a kde tato rovnice určuje y jako fci x, resp. x jako funkci y, tj.

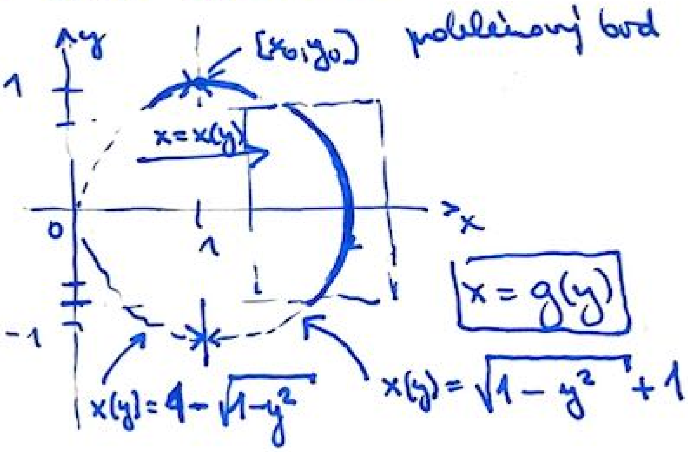
(2) $$\underline{y=f(x)} \quad \text{resp.} \quad \underline{x=g(y)}$$

Explicitní funkční zápis

Pokud to lze, tak říkáme, že funkce f resp. g je dána rovnicí (1) implicitně.

Příklad ① Buď $F(x,y)=(x-1)^2+y^2-1$. Pak (1) určuje body jednotkové kružnice se středem v [1,0]. Obecně nelze napsat body kružnice "globálně" jako funkci typu (2). "Lokálně" to však možné je až na dvě výjimky v obou situacích. Viz obr. 1 a 2.





! V okolí (libovolně malém) bodů [0,0] a [2,0] NELZE psát y jako funkci x

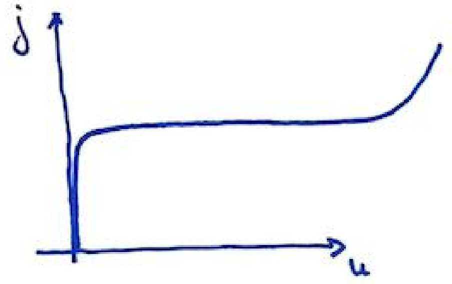
Ostatní body kružnice mají vždy okolí, na kterém lze y vnímat jako funkci x.

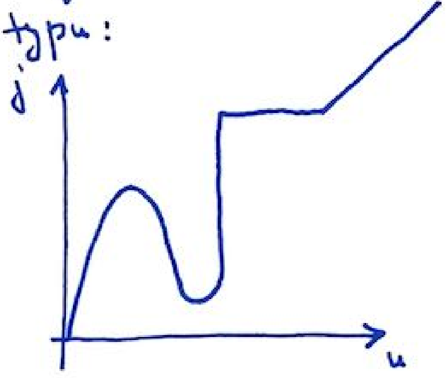
V libovolně malém okolí bodů [1,1] a [1,-1] NELZE psát x jako funkci y

V ostatních bodech to však udělat lze

OTÁZKA: JAKÁ VLASTNOST CHARAKTERIZUJE "ŠPATNÉ" BODY?

Ve fyzikálních experimentech mohu získat pozoruhodné závislosti mezi veličinami j a u. Tato data mohu proložit křivkou a výsledkem mohou být obrázky typu:





Ačkoliv historicky/tradicí můžeme být vedeni k hledání závislosti j na u, tj. $j=\tilde{j}(u)$, může být vhodnější sledovat u jako fci j, tj. $u=\tilde{u}(j)$ nebo obecněji $g(j,u)=0$.

Skalární (implicitní) rovnici (1) lze zobecnit následujícím způsobem. Uvažujme

(3) $$\vec{F}(\vec{x},\vec{y})=\vec{0},$$

kde $\vec{F}=(F_1,\dots,F_m)$, $\vec{y}=(y_1,\dots,y_m)$ a $\vec{x}=(x_1,\dots,x_k)$

a ptáme se, zda (3) lze lokálně chápat tak, že

(4) $$\vec{y}=\vec{g}(\vec{x}), \quad \text{kde} \quad \vec{g}=(g_1,\dots,g_m).$$

Rozepišme si (3) po složkách:

(3') $$\left.\begin{aligned} F_1(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_m)&=0\\ F_2(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_m)&=0\\ \vdots\qquad\qquad&\ \ \vdots\\ F_m(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_m)&=0 \end{aligned}\right\}$$

Vidíme, že (3) představují m-rovnic o (m+k)-neznámých, z kterých chceme m-složek vyjádřit pomocí ostatních (zbylých) k-složek.

Otázka zní: Máme m rovnic o (m+k)-neznámých $x_1,x_2,\dots,x_k,y_1,\dots,y_m$. Je možné, alespoň v okolí nějakého bodu $\vec{a}=(a_1,\dots,a_k,a_{k+1},\dots,a_{k+m})$ takového, že $\vec{F}(\vec{a})=\vec{0}$ vyjádřit m-souřadnic (proměnných), např. $y_1,\dots,y_m$ jako funkce zbylých proměnných $x_1,\dots,x_k$.

Pozorování Posunutím souřadného systému do bodu $\vec{a}$ vidíme, že stačí uvažovat jen případ $\vec{a}=\vec{0}$.

Speciálním, ale důležitým příkladem systému rovnic (3) resp. (3'), je známý problém lineární algebry:

- hledáme-li řešení soustavy $\underline{m}$-lineárních rovnic o $\underline{m}$ neznámých

$$(3'') \qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j = x_i \quad i=1,\dots,m \iff A\vec{y} = \vec{x},$$

pak víme, že (3'') má jediné řešení (∃!) právě když $\det A \neq 0$.

- Všimněme si, že (3'') lze psát ve tvaru (3) či (3'), kde

$$F_i(\vec{x},\vec{y}) := \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j - x_i \qquad \text{a tedy } m=k.$$

Také pozorujme, že

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_j} = a_{ij} \qquad \text{pro } i=1,\dots,m \quad \text{a} \quad j=1,\dots,m$$

a tedy Jacobiho matice se shoduje s maticí A, o které víme, že $\det A$ musí být nenulový, aby (3'') bylo řešitelné.

Protože libovolnou hladkou funkci lze lokálně aproximovat lineární funkcí (diferenciálem), nepřekvapí nás, že v řešení naší úlohy bude hrát klíčovou roli

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^{m}.$$

Věta 8.29 (O implicitních funkcích)

Buď $\vec{F} = (F_1,\dots,F_m): U\times V \to \mathbb{R}^m$, kde $U\subset\mathbb{R}^k$ a $V\subset\mathbb{R}^m$ jsou otevřené. Nechť $\vec{F}\in C^1(U\times V)^m$. Nechť $\vec{x}_0\in U$ a $\vec{y}_0\in V$ tak, že

- $\vec{F}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)=\vec{0}$
- $\det\left[\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)(x_0,y_0)\right]_{i,j=1}^{m} \neq 0$

Pak existují $\vec{x}_0 \in U_\theta\subset U$ a existuje právě jedna $\vec{g}: U_\theta\to V$ tak, že

- $\vec{g}\in C^1(U_\theta)^m$
- $\vec{F}(\vec{x},\vec{g}(\vec{x})) = 0 \qquad \forall \vec{x}\in U_\theta.$

<u>Pozorování</u> Pokud platí poslední rovnost, lze ji derivovat dle proměnných x_i, $i=1,\dots,k$ a odsud mohu spočítat tyto derivace explicitně.

Speciálně: je-li $m = k = 1$. Pak z rovnosti

$$F(x,g(x)) = 0$$

plyne

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} g'(x) = 0,$$

což implikuje

(*)
$$\boxed{g'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x))}} \neq 0$$

<u>Aplikace</u> K implicitně zadané funkci $F(x,y)=0$ můžeme spočítat tečnu. Její rovnice je dána vztahem $y(x) = y_0 + g'(x_0)(x-x_0)$ neboli

$(y(x)-y_0, x-x_0)\cdot(1,-g'(x_0)) = 0$. Odsud plyne, že

$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+[g'(x_0)]^2}}(-g'(x_0),1)$ je normálový vektor k $F(x,y)=0$ v bodě (x_0,y_0).

Dosazením (*) dostáváme

$$\vec{n} = \frac{1}{\|\nabla F\|_2}\left(\frac{\partial F}{\partial F}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)\Bigg|_{\{x_0,y_0\}} = \frac{\nabla F(x_0,y_0)}{\|\nabla F(x_0,y_0)\|_2}$$

▨

<u>Příklad</u> Buď $F(x,y) = (x-1)^2+y^2-1$. Určete, ve kterých bodech rovnice $F(x,y)=0$ lokálně popisuje y jako funkci x. V těchto bodech spočtěte $y'(x)$.

<u>Řešení</u>: $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2y = 0$ právě když $y=0$. Po dosazení do $F(x,y)=0$ vidíme, že v bodech $[0,0]$ a $[2,0]$ nelze aplikovat větu o implicitních funkcích. V ostatních bodech „<u>lokálně</u>" y je fcí x. V těchto bodech

$$y'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))} = - \frac{2(x-1)}{2y} = - \frac{x-1}{y}$$

Hodnota udává směrnici tečny v bodě $[x,y]$ ležící na $F(x,y)=0$.

▨

Dk Věty 8.29 Transformací počátku souřadného systému lze zajistit, že $(\vec x_0,\vec y_0) = (\vec 0,\vec 0)$. Protože matice $\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\vec 0,\vec 0)\right)_{i,j=1}^{m}$ má nenulový determinant, existuje matice inverzní, kterou označíme $\Gamma(\vec 0,\vec 0)$.

$$\text{tj. } \underset{\overset{\uparrow}{\text{GAMMA}}}{\Gamma(\vec 0,\vec 0)} := \left[\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\vec 0,\vec 0)\right)\right]^{-1}.$$

Pro každé $\vec x \in U$ definujme

$T_{\vec x} : V \to \mathbb{R}^m$ předpisem $\boxed{T_{\vec x}(\vec y) := \vec y - \Gamma(\vec 0,\vec 0)\vec F(\vec x,\vec y)}$

Cílem je ukázat, že T má jediný pevný bod. Důvod/motivace pro násobení $\vec F$ zleva maticí Γ plyne z diskuse před větou 8.29 resp. z nahrazení $\vec F(\vec x,\vec y)$ "linearizací" $\underbrace{F(\vec 0,\vec 0)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)\Big|_{(\vec 0,\vec 0)} y_j$

Zbývá ověřit dva předpoklady (α) a (β) modifikované Banachovy věty 8.28.

Ad (α)

$$|T_{\vec x}(\vec y^1) - T_{\vec x}(\vec y^2)|_{\mathbb{R}^m} = |(\vec y^1 - \vec y^2) - \Gamma(0,0)\left[\vec F(\vec x,\vec y^1) - \vec F(\vec x,\vec y^2)\right]|_{\mathbb{R}^m}$$

$$= \left|\Gamma(0,0)\left\{\left(\vec F(\vec x,\vec y^1) - \vec F(\vec x,\vec y^2)\right) - \left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0,0)\right](y^1-y^2)_j\right|_{\mathbb{R}^m}$$

$$\overset{\text{LVOSH}}{\leq} \underbrace{\|\Gamma(0,0)\|}_{\overset{!!}{C}} \underbrace{\left|\left(\frac{\partial \vec F_i}{\partial y_j}(x,\vec y^*) - \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0,0)\right)(y^1_j - y^2_j)\right|_{\mathbb{R}^m}}_{\text{ze spojitosti lze udělat malé}}$$

Tedy:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall \vec y^1, \vec y^2 \in V_\delta(0) \text{ a } \forall x \in U_\delta(0)$$

$$|T_{\vec x}(\vec y^1) - T_{\vec x}(\vec y^2)|_{\mathbb{R}^m} \leq C\varepsilon|\vec y^1 - \vec y^2|_{\mathbb{R}^m}$$

Speciálně, pro $\varepsilon = \frac{q}{C}$ s $q \in (0,1)$ dostáváme, že $T_{\vec x}$ je kontrakce.

Ad (β)

$$|T_{\vec x}(\vec 0)| = \|\Gamma(0,0)\|\,|\vec F(\vec x,0)| = \|\Gamma(0,0)\|\,|\vec F(\vec x,\vec 0) - F(\vec 0,\vec 0)| \leq \hat C|\vec x| < \tilde\varepsilon$$

Tak pro $\tilde\varepsilon = \delta(1-q)$ $\exists \underset{(\theta<\delta)}{\theta}$ tak, že $|T_{\vec x}(0)| \leq \delta(1-q)$ $\forall \vec x \in U_\theta(\vec 0)$.

speciálně

Pak dle Věty 8.28: $\forall \vec x \in U_\theta(0)\ \exists!\, \vec y \in \overline{V_\delta(0)}$ splňující $T_{\vec x}\vec y = \vec y$, tj. $\vec F(\vec x,\vec g(x)) = 0$.

Označme $\vec g$ zobrazení: $x \mapsto !\,y$

Hladkost $\vec g$ plyne z hladkosti $\vec F$ a z věty o střední hodnotě 8.16:

$$0 = \vec F(\vec x + t\vec e_j, g(\vec x + t\vec e_j)) - \vec F(\vec x, g(\vec x)) = \frac{\partial F}{\partial x_j}(\bar x,\bar y)\,t + \frac{\partial F}{\partial y}(\bar x,\bar y)\left[g(\vec x + t\vec e_j) - g(\vec x)\right],$$

které umožňují vyjádřit $\frac{g(x+te_j) - g(x)}{t}$

▶ S implicitními funkcemi úzce souvisí <u>ODR 1. řádu ve tvaru totálního diferenciálu</u>. Nechť

(5) $$f(x,y)=0 \quad \text{v} \quad U\subset\mathbb{R}^2 \text{ otevřené}$$

a nechť má f v libovolném bodě $(x,y)\in U$ totální diferenciál. Pak plyne z (5):

(6) $$df(x,y)(h_1,h_2)=0 \qquad \forall\, \vec{h}=(h_1,h_2)$$

resp.

(6') $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,h_1+\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,h_2=0$$

Označíme-li "přírůstky" (h_1,h_2) symboly (dx,dy), tak máme

(6'') $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy=0$$

což mohu ztotožnit s ODR 1. řádu

(7) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,y'(x)=0$$

a to buď formálně, podělíme-li (6'') nenulovým přírůstkem dx a ztotožníme $\frac{dy}{dx}$ s y', nebo s využitím věty o implicitních funkcích (v bodech, kde ji použít mohu*).

Toto pozorování můžeme využít k řešení rovnic typu

(8) $$\underline{M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0} \quad \begin{array}{l} \nearrow\ \underline{M(x,y)+N(x,y)\,y'(x)=0} \\ \searrow\ \underline{M(x,y)\,x'(y)+N(x,y)=0} \end{array}$$

Pokud bychom věděli, že k vektorovému poli $(M(x,y),N(x,y))$ existuje skalární funkce (<u>potenciál</u>) f tak, že $\boxed{\nabla f(x,y)=(M(x,y),N(x,y))}$ pak <u>$f(x,y)=0$ je řešení</u> rovnice (8) zapsané v implicitním tvaru.

<u>Příklad</u> ① Rovnice ve tvaru separovaných proměnných: $\frac{dy}{dx}=h(x)g(y)$

<u>Řešení</u> Na intervalech, kde $g\neq 0$:

$$y'=\frac{dy}{dx}=h(x)g(y)\iff \frac{1}{g(y)}\,dy=h(x)\,dx\iff h(x)\,dx-\frac{1}{g(y)}\,dy=0$$

H je P.F. k h
G je P.F. k $\frac{1}{g}$

$$\iff \boxed{H(x)-G(y)+C=0}$$

kde $\boxed{f(x,y):=H(x)-G(y)+C}$ je hledaný potenciál. ☐

---

*) Tam, kde ji využít nemohu lze však obecně nahlédnout $x=x(y)$.

② Najděte řešení rovnice

(PÚ) $$5x^4y + 2x^3y^2 + (x^5 + x^4y + 2y)\,y' = 0 \quad \text{s} \quad y(0) = 1$$

__Řešení__ Jedná se o počáteční úlohu pro nelineární obyč. dif. rovnici 1. řádu.

Rovnice má tvar (8), kde

$$M(x,y) = 5x^4y + 2x^3y^2 \quad \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$
$$N(x,y) = x^5 + x^4y + 2y \quad \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

Hledáme potenciál $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tak, aby $\nabla f = (M, N)$ tj.

(9₁) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 5x^4y + 2x^3y^2$$

(9₂) $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^5 + x^4y + 2y$$

obecná funkce závislá na proměnné y.

Odsud, resp. z (9₁), dostáváme

(10) $$f(x,y) = x^5y + \frac{1}{2}x^4y^2 + C(y)$$

Po dosazení (10) do (9₂) máme:

$$x^5 + x^4y + C'(y) = x^5 + x^4y + 2y,$$

což implikuje

$$C'(y) = 2y$$

a tedy

$$C(y) = y^2 + C$$ kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolné.

Odsud a z (10) plyne, že potenciál

$$f(x,y) = x^5y + \frac{1}{2}x^4y^2 + y^2 + C$$

splňuje $\boxed{f(x,y) = 0}$ a dává obecný tvar řešení zadané ODR.

Počáteční podmínka $y(0)=1$ vede k rovnici

$$f(0,1) = 1 + C = 0 \implies C = -1$$

Tedy řešení počáteční úlohy lze psát ve tvaru

(11) $$\boxed{\left(\frac{1}{2}x^4 + 1\right)y^2 + x^5y - 1 = 0}$$

což mohu dále analyzovat přes ⊡ větu o implicitní funkci a ⊡ řešením kvadratické rovnice. To druhé dává

$$y(x) = \frac{-x^5 \pm \sqrt{x^{10} + 2(x^4+2)}}{x^4 + 2}$$

přičemž $y(0)=1$ je splněna jen pokud $$\underline{\underline{y(x) = \frac{-x^5 + \sqrt{x^{10} + 2(x^4+2)}}{x^4+2}}}$$

Z Věty o implicitní funkci a z (11) plyne, že y lze psát jako funkci x pokud $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$. Avšak z (11):

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^4+2)y + x^5 = 0 \iff y = -\frac{x^5}{x^4+2}$$

což po dosazení do (11) dává $\frac{1}{2}\frac{x^{10}}{x^4+2} - \frac{x^{10}}{x^4+2} - 1 = 0 \iff \frac{1}{2}\frac{x^{10}}{x^4+2} + 1 = 0$

což nikdy nenastane.

Tedy vždy lze lokálně psát $y = y(x)$.

Předchozí úvahy nás vedou k jedné otázce a jednomu rozšíření.

Není pravda, že k danému vektorovému poli (M,N) existuje vždy potenciál f (tak, aby $\nabla f = (M,N)$). Otázka zní:

- Za jakých podmínek existuje potenciál k danému vektorovému poli? Tuto otázku lze řešit i pro vícerozměrné pole $(T_1,\dots,T_N): \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$.

Rozšíření metody totálního diferenciálu pro řešení rovnic typu (8) spočívá ve vynásobení rovnice (8) vhodným integračním faktorem $\mu = \mu(x,y)$, který obvykle volíme ve tvaru

$$\mu(x,y) = m(\phi(x,y))$$

kde $\phi(x,y)$ je zvolena na základě naší intuice, pokusů a omylů. Např. $\phi(x,y) = x$, $\phi(x,y) = y$, $\phi(x,y) = xy$, $\phi(x,y) = x + y$.

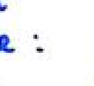
- Otázka zní: jak nalézt m?

Obě tyto otázky spolu souvisí a odpověď (byť částečnou) dává následující tvrzení.

Tvrzení (NUTNÁ PODMÍNKA EXISTENCE POTENCIÁLU) Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ otevřená a $\vec{T} \in [C^1(\Omega)]^N$. Pokud má $T = (T_1,\dots,T_N)$ potenciál, pak platí

$$(*) \quad \frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \quad \text{v } \Omega \quad (\text{pro všechna } i,j = 1,\dots,N).$$

Dk: Z existence potenciálu plyne: $\nabla U = \vec{T} \in [C^1(\Omega)]^N$ a tedy $U \in C^2(\Omega)$ a dle Věty o záměně derivací platí $\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i}$ v Ω.

Což však dává tvrzení. .

Pozoruhodné je, že podmínka (*) je za <u>některých</u> situacích také podmínka postačující. Platí:

Tvrzení (POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA EXISTENCE POTENCIÁLU).

Nechť (i) $\Omega = (a_1,b_1)\times\dots\times(a_N,b_N)$ $\left(\begin{matrix}-\infty\le a_i < b_i \le +\infty \\ i=1,\dots,N\end{matrix}\right)$

(ii) $\vec{T} = (T_1,\dots,T_N) \in \left[C^1(\Omega)\right]^N$

(iii) $\dfrac{\partial T_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial T_j}{\partial x_i}$ v Ω

Pak $\vec{T}$ má potenciál, tzn. $\exists\, U: \Omega \to \mathbb{R}$ $\nabla U = \vec{T}$ v Ω.

(Dk) Skripta Černý, Pokorný. str. 166, 167. ▨

Příklad (který ukazuje, že (*) není obecně postačující.)

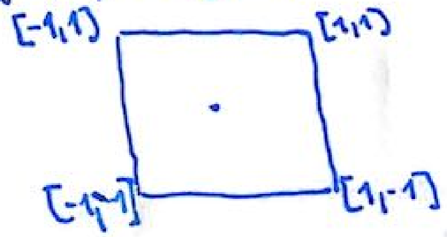
Buď $\vec{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definováno $\overset{\text{jen}}{}$ v $\underline{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ předpisem

$$(⊛)\qquad \vec{T}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Pak $\vec{T} \in \left[C^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\})\right]^2$ splňuje $\dfrac{\partial T_1}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)} = \dfrac{\partial T_2}{\partial x}(x,y)$

Kdyby existoval potenciál U na $\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$ tak, by mělo platit

$$0 = U(1,1) - U(-1,1) + \underbrace{U(-1,1) - U(-1,-1)} + U(-1,-1) - U(1,-1)$$
$$+ U(1,-1) - U(1,1)$$



$$\overset{\text{Newtonův vzorec}}{=} \int_{-1}^{1} \frac{\partial U}{\partial x_1}(s,1)\,ds + \int_{-1}^{1} \frac{\partial U}{\partial x_2}(-1,s)\,ds$$
$$+ \int_{-1}^{1} \frac{\partial U}{\partial x_1}(s,-1)\,ds + \int_{-1}^{1} \frac{\partial U}{\partial x_2}(1,s)\,ds$$

dosadím (⊛) a provedu integraci $= -2\pi$. ↯ potenciál neexistuje. ▨

Z pohledu druhé otázky (jak nalézt m u metody integračního faktoru) nám předchozí tvrzení říká, že m musí splňovat

$$(12)\qquad \boxed{\frac{\partial}{\partial y}\Big(m(\phi(x,y))\,M(x,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(m(\phi(x,y))\,N(x,y)\Big)}$$

kde M, N jsou funkce v rovnici (8).

Z (12) dostáváme derivováním ODR pro m ve tvaru:

$$m'(\phi(\cdot\cdot))\frac{\partial\phi}{\partial y}(\cdot\cdot)M(\cdot\cdot) + m(\phi(\cdot\cdot))\frac{\partial M}{\partial y}(\cdot\cdot) = m'(\phi(\cdot\cdot))\frac{\partial\phi}{\partial x}(\cdot\cdot)N(\cdot\cdot) + m(\phi(\cdot\cdot))\frac{\partial N}{\partial x}(\cdot\cdot),$$

která implikuje

$$(13)\qquad \frac{m'(\phi(\cdot\cdot))}{m(\phi(\cdot\cdot))} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x}(\cdot\cdot) - \frac{\partial M}{\partial y}(\cdot\cdot)}{\frac{\partial\phi}{\partial y}(\cdot\cdot)M(\cdot\cdot) - \frac{\partial\phi}{\partial x}(\cdot\cdot)N(\cdot\cdot)}.$$

Pokud lze pravou stranu této rovnici zapsat ve tvaru $h(\phi(\cdot\cdot))$, pro vhodně nalezené ϕ, tak (13) implikuje

$$m(\phi(\cdot\cdot)) = e^{H(\phi(\cdot\cdot))} \qquad \text{kde } H(z) \text{ je primitivní fce k } h(z).$$

Ilustrujme si tuto metodu na příkladě.

<u>Příklad</u> ③ Najděte obecné řešení rovnice $(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}) + (x^2+y^2)y' = 0$.

<u>Řešení</u>: Označíme-li $M(x,y) = 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}$ a $N(x,y) = x^2+y^2$, vidíme, že

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 2x + x^2 + y^2 \neq 2x = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$ a potenciál neexistuje.

Zkusíme tedy metodu integračního faktoru a po dosazení do (13) dostáváme:

$$\frac{m'(\phi(x,y))}{m(\phi(x,y))} = \frac{-(x^2+y^2)}{\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y)\left[2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right] - \frac{\partial\phi}{\partial x}\left[x^2+y^2\right]}$$

Pravá strana se výrazně zjednoduší zvolíme-li $\phi(x,y) = x$. Pak

$$\frac{m'(x)}{m(x)} = 1 \quad \text{a tedy} \quad m(x) = e^x.$$

Nyní víme, že k poli $\left(e^x M(x,y), e^x N(x,y)\right)$ existuje potenciál U.

Platí

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = e^x\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right) \quad \text{a} \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = e^x(x^2+y^2)$$

Z druhé rovnice ihned plyne $U(x,y) = e^x\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right) + C(x)$.

Zderivováním podle x a porovnáním s první rovnicí pak máme:

$$e^x\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right) = e^x\left(x^2y+\frac{y^3}{3}+2xy\right) + C'(x),$$

což implikuje $C'(x) = 0$ a tedy $C(x) = C$.

Hledané <u>řešení má tedy tvar</u>:

$$\boxed{e^x\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right) + C = 0}$$

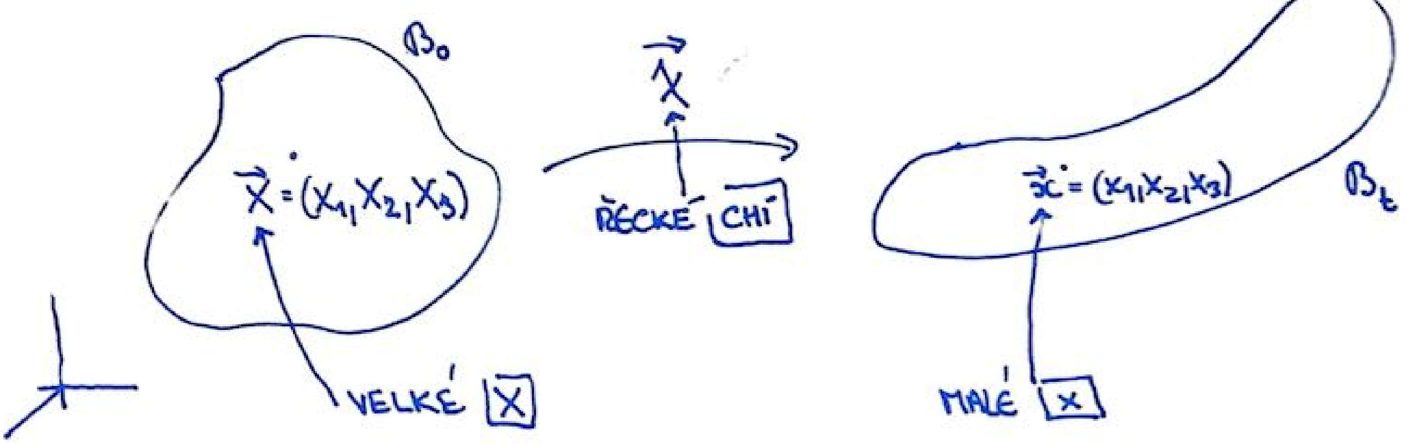
Dle věty o implicitních funkcích $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 0 \Leftrightarrow [x,y] = (0,0)$.
C je třeba volit různé od 0. ■ 8/69

$\boxed{8.7.3}$ Věta o inverzním zobrazení

V mechanice pevných látek se zkoumají deformace těles. Pokud mě zajímá výchozí a koncový stav tohoto procesu, lze jej popsat zobrazením

$$\vec{\chi} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

které otevřené množině $B_0 \subset \mathbb{R}^d$ přiřadí $\vec{\chi}(B_0) =: B_t$



Předpokládá se, že při popisu (elastických) deformací těles nedochází k trhlinám, rozdělení těles, atd. Naopak se požaduje, že (alespoň lokálně) existuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi $\vec{X}$ a $\vec{x}$, tedy zobrazení $\vec{\chi}$ má inverzní zobrazení.

[Protože písmena $\vec{X}$, $\vec{x}$ a $\vec{\chi}$ mohou vést k záměně, budeme dále psát $\vec{f}$ místo $\vec{\chi}$.

Definice Buď $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $M \subset \mathbb{R}^d$. Řekneme, že f je regulární zobrazení v M $\overset{df.}{\equiv}$
(i) M je otevřená
(ii) $f \in C^1(M)^d$
(iii) $\det Df(x) \neq 0 \quad \forall x \in M$

Zde:

$$Df(x) := \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x), & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_d(x)}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial f_d}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix}}_{\text{Jakobiho matice}}, \quad \det Df(x) \text{ ... Jakobián.}$$

$\| \leftarrow$ také

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_d)}{\partial(x_1, \dots, x_d)}(x)$$

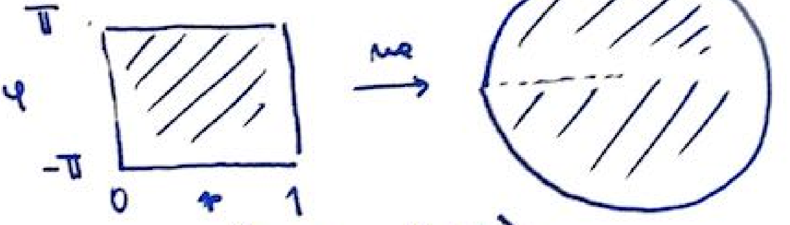
Příklady ① Polární souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$\boxed{f : (r,\varphi) \to (x,y)}$$

$$(0,+\infty)\times(-\pi,\pi) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0);\ x\in(-\infty,0)\}$$

nebo

$$(0,1)\times(-\pi,\pi) \xrightarrow{\text{na}} B_1(0) \setminus \{(x,0);\ x\in(-1,0)\}$$



$$\det\left[Df(r,\varphi)\right] = \det\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix} = r > 0$$

[Tedy f je regulární zobrazení na $(0,+\infty)\times(-\pi,\pi)$]

② Sférické souřadnice: $f : (r,\psi,\varphi) \longmapsto (x,y,z)$ je dáno předpisem

$x = r\cos\psi\cos\varphi$
$y = r\cos\psi\sin\varphi$
$z = r\sin\psi$

$$: \overbrace{(0,\infty)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\times(-\pi,\pi)}^{M} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z);\ x\le 0\}$$

$$\det\left[Df(r,\psi,\varphi)\right] = \det\begin{pmatrix}\cos\psi\cos\varphi & -r\sin\psi\cos\varphi & -r\cos\psi\sin\varphi\\ \cos\psi\sin\varphi & -r\sin\psi\sin\varphi & r\cos\psi\cos\varphi\\ \sin\psi & r\cos\psi & 0\end{pmatrix}^{T}$$

$= -r^2\cos\psi \neq 0$ na M $\Rightarrow$ f je regulární na M.

③ Válcové (cylindrické) souřadnice $f : (r,\varphi,h) = (x,y,z)$ definujeme předpisem $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = h$

$$: \underbrace{(0,+\infty)\times(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}}_{M} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z);\ x\le 0\}$$

$$\det\left[Df(r,\varphi,h)\right] \overset{\det}{=} \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = r > 0$$

Tedy opět f je regulární na M.

$\boxed{\text{Věta 8.30}}$ (o inverzním zobrazení – lokální verze)

Buď $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ regulární zobrazení na $\mathcal{U}(a)$ pro $a \in \mathbb{R}^d$.

Pak $\exists\, \mathcal{U}_\delta(a) \subset \mathcal{U}(a)$ tak, že

(i) f je prosté na $\mathcal{U}_\delta(a)$

(ii) $f(\mathcal{U}_\delta(a))$ je otevřená v $\mathbb{R}^d$

(iii) Označíme-li g inverzní zobrazení k $f|_{\mathcal{U}_\delta(a)}$

$$\text{pak} \quad g \in C^1(f[\mathcal{U}_\delta(a)])^d$$

(iv) Platí $\det(Df(x)) \det(Df^{-1}(f(x))) = 1$ neboli

$$\det(Dg(f(x))) = \frac{1}{\det(Df(x))}$$

(v) Pokud $f \in C^k(\mathcal{U}(a))^d$, pak $g = f^{-1} \in C^k(f[\mathcal{U}_\delta(a)])^d$

Ⓓⓚ Je založen na větě o implicitní funkci, kde definujeme

$F_i(x,y) := y_i - f_i(x) \quad i = 1, \dots, d$

[„Máme" ekvivalenci pro inverzní zobr. $f(x) = y \iff \cancel{y} = f^{-1}(y)$]

$\Rightarrow$
- $F_i(a, f(a)) = 0_d$
- $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{d}(a, f(a)) = \det(Df(a)) \neq 0$ dle předp.

Dle věty o implicitní funkci dostáváme na okolí vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi y a x (pro $\forall y \in \mathcal{U}_\delta(f(a))$ $\exists!\, x \in \mathcal{U}_\Delta(a)$)

tak, že $\boxed{0 = F_i(x,y) = y_i - f_i(x) \quad i = 1, \dots, d}$

Označme toto x buď $g(y)$ nebo $f^{-1}(y)$. Pak $g \in C^1(\mathcal{U}_\delta(f(a)))^d$.

Protože f je spojité v a, $\exists\, \delta \in (0, \Delta)$ tak, že

$$f(x) \in \mathcal{U}_\delta(f(a))$$

Nyní již f je prosté na $\mathcal{U}_\delta(a)$ a zobrazuje do $\mathcal{U}_\delta(f(a))$

[a víme, že $\forall y \in \mathcal{U}_\delta(f(a))$ $\exists!\, x \in \mathcal{U}_\Delta(a)$]

Tedy f zobrazuje prostě $\mathcal{U}_\delta(a)$ na $f[\mathcal{U}_\delta(a)]$

Máme tedy $\underbrace{g := f^{-1}.}$

- Dokažme, že $f[U_\delta(a)]$ je otevřená.

Je-li $y \in f[U_\delta(a)]$ a $x \in U_\delta(a)$ takový, že $f(x) = y$ tj.
$y = f^{-1}(x) = g(x)$

~~[illegible]~~

tedy $y \in U_\delta(f(a))$ a protože $g = f^{-1}$ je spojité na $f(U_\delta(a))$

plyne $\exists\, U_\eta(y) \subset U_\delta(f(a))$

tak, že $\underset{\overset{\shortparallel}{f^{-1}}}{g}(U_\eta(y)) \subset U_\delta(a)$.

Tedy $U_\eta(y) \subset f[U_\delta(a)]$ a $f[U_\delta(a)]$ je otevřená.

- Tvrzení (iv) plyne z řetízkového pravidla:

Protože $f^{-1}(f(x)) = x$ v $U_\delta(a)$

tak

$$\underset{x}{D}\left(f^{-1}(f(x))\right) = \mathbb{I}_d$$

$$\shortparallel$$

$$D_y f^{-1}(y)\big|_{y=f(x)} D_x f(x) = \mathbb{I}$$

dostávám (iv) ▨

Aplikací determinant

$\boxed{\text{Věta 8.31}}$ (O inverzním zobrazení – globální verze)

Buď $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ regulární na $M \subset \mathbb{R}^d$. Pak

(i) $f(M)$ je otevřená

(ii) f je lokálně prosté; $\forall\, x \in M\ \exists\, U(x)$ $f|_{U(x)}$ je prosté.

Je-li navíc <u>f prosté na M</u>, odpovídající inverzní zobrazení je regulární na $f(M)$ a platí

- $Df^{-1}(y)\big|_{y=f(x)} Df(x) = \mathbb{I}$ Matice jsou navzájem inverzní
- vztah (iv) předchozí věty
- $f \in C^k(M)^d \Rightarrow f^{-1} \in C^k(f(M))^d$.

(Dk) Plyne z předchozí věty a důkazu.

8.7.4 Lagrangeova věta o vázaných extrémech (či o multiplikátorech) podruhé.

Věta 8.31 Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $f : \Omega \to \mathbb{R}$ a $\vec{g} = (g_1, \dots, g_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ takové, že

$$(21) \qquad f \in C^1(\Omega), \ \vec{g} \in [C^1(\Omega)]^m \ \text{a} \ 1 \leq m < d.$$

Označme $A := \{x \in \Omega;\ \vec{g}(x) = \vec{0}\}$. Buď $x^0 \in \Omega$ extremální bod f vzhledem k vazbám $\vec{g}(x) = \vec{0}$, tzn.,

$$(22) \qquad f(x^0) = \max_{x \in A} f(x) \quad \text{resp.} \quad f(x^0) = \min_{x \in A} f(x).$$

Nechť existuje m sloupců Jacobiho matice $Dg(x^0)$, která je typu $m \times d$, tak, že determinant takto vybrané matice $D^* g(x^0)$ typu $m \times m$ je nenulový. Jinými slovy, předpokládáme, že

$$(23) \qquad \frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(x_1, \dots, x_d)}(x^0) \ \text{má hodnost } m.$$

Pak existuje $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ (vektor Lagrangeových multiplikátorů) tak, že

$$\nabla f(x^0) - (\vec{\lambda}, \nabla \vec{g}(x^0)) = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \frac{\partial g_l(x^0)}{\partial x_i} = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

__Poznámka__ Je-li $x^0_* = (x^0_1, \dots, x^0_d)$ a $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ vázaný extrém, pak lze uvažovat kvadratickou formu

$$(24) \qquad d^2 f(x^0)(h,h) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l d^{(2)} g_l(x^0)(h,h) \qquad \text{pro každé } h \in \mathbb{R}^d.$$

Ze vztahu

$$\nabla g_l(x^0) \cdot h = 0 \qquad \text{platí pro každé } h \in \mathbb{R}^d$$

spočteme $h_1, \dots, h_m$ v závislosti na $h_{m+1}, \dots, h_d$ a dosadíme tyto vazby do (24). Ze znaménka takto upravené kvadratické formy zjistíme zda f má v x^0 minimum resp. maximum vzhledem k vazební podmínce dané množinou A.

(DŮ) Již dříve pro $d=2$ a $m=1$. Nyní $d>1$ a $m=1$ pro jednoduchost. Protože $m=1$, z (2.3) plyne existence alespoň jedné nenulové složky $\nabla g(x^0)$. Nechť je to d-tá složka, tj. $\frac{\partial g}{\partial x_d}(x^0) \neq 0$. Pak z věty o implicitních funkcích plyne existence $U((x^0)')$, kde $(x^0)' = (x_1^0, \dots, x_{d-1}^0)$, taková, že $\forall x' = (x_1, \dots, x_{d-1}) \in U((x^0)')$ existuje právě jedno x_d: $g(x', x_d(x')) = 0$.

Definujme λ vztahem: $\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_d}(x^0)}{\frac{\partial g}{\partial x_d}(x^0)}$. Chceme ukázat, že i pro $i = 1, \dots, d-1$ platí

(25) $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(x^0) = 0.$$

Protože však $f(x', x_d(x'))$ má v $(x^0)'$ extrém, tak platí

(26) $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) + \frac{\partial f}{\partial x_d}(x^0)\frac{\partial x_d}{\partial x_i}(x^0) = 0 \qquad (i = 1, \dots, d-1).$$

(po dosazení $(x_d^0)'$ za x')

Derivací vztahu $g(x', x_d(x')) = 0$ pak máme

(2.7) $$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x^0) + \frac{\partial g}{\partial x_d}(x^0)\frac{\partial x_d}{\partial x_i}((x^0)'). \qquad (i = 1, \dots, d-1).$$

Porovnáním (26) a (27) dostáváme (25). ▨.

Příklad Uvažujme $f(x) = (\mathbb{A}x, x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, kde $\mathbb{A}$ je symetrická, a hledejme maximum a minimum f na jednotkové sféře S, dané pomocí

$$S = \{x \in \mathbb{R}^d ; |x|^2_{E,\mathbb{R}^d} - 1 = 0 \iff \sum_{i=1}^d x_i^2 - 1 = 0\}.$$

Řešení Označme $g(\vec{x}) := \sum_{i=1}^d x_i^2 - 1$. Pak $g, f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Nutná podmínka na extrém má pak tvar $\nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) = 0$

$$2(\mathbb{A}\vec{x} - \lambda\vec{x}) = 0 \iff (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})\vec{x} = 0$$

neboli podezřelé body jsou vlastní vektory matice $\mathbb{A}$. Protože v těchto bodech (tj. ve vlastních vektorech)

$$f(x) = (\mathbb{A}x, x) = \lambda(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda|\vec{x}|^2_{E,\mathbb{R}^d} = \lambda,$$

tak vidíme:

- f nabývá maxima v vlastním vektoru matice $\mathbb{A}$ odpovídající největšímu vlastnímu číslu.
- f nabývá minima v vlastním vektoru matice $\mathbb{A}$ odpovídající nejmenšímu vlastnímu číslu.

$\boxed{\text{ÚVOD DO VARIAČNÍHO POČTU}}$

$\boxed{\text{Klasická (reálná) analýza}}$ (real analysis, differential calculus – diferenciální počet)

- zkoumá vlastnosti (reálných) $\boxed{\text{funkcí}}$
- objekt studia $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $\quad d \geq 1$ $\quad$ FUNKCE
  $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$
  $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^s$
- mimojiné zkoumá $\boxed{\text{extrémy funkcí}}$ (lokální minima/max.)

Víme z 1. roč.:

(1) Je-li $f \in C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní,
pak f nabývá v K minimum/maximum

(2)
$$\left.\begin{array}{l} \text{Je-li } f: U(x_0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ f \text{ má v } x_0 \text{ extrém} \\ \text{a } f'(x_0) \text{ existuje} \end{array}\right\} \text{ pak } f'(x_0) = 0$$

(3)
$$\left.\begin{array}{l} \text{Je-li } f: U(x_0) \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ d > 1, \\ f \text{ má v } x_0 \text{ extrém}, \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \text{ existují pro } i = 1,\dots,d \end{array}\right\} \text{ pak } \begin{array}{l} \nabla f(x_0) = 0 \\ \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = 0 \\ \forall\ |\vec{v}| = 1 \end{array}$$

Derivace f v $\vec{x}_0$ ve směru $\vec{v}$, $\qquad \partial_{\vec{v}} f(x_0)$,
(směrová derivace f v x_0)
definovaná vztahem

$$\partial_{\vec{v}} f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

je koncept, který bude vhodný pro derivování v prostorech ∞-dimenze, tedy ve variačním počtu.

[Variační počet] Calculus of variations

kritické body

- zkoumá minima/maxima neboli [extremály funkcionálů]
- objekt studia [funkcionál] zobrazení z normovaného prostoru funkcí do $\mathbb{R}$

$$\mathcal{L} : \left(X, \|\cdot\|_X\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

[Příklady prostorů X]
- $C(\langle a,b\rangle)$, $C^k(\langle a,b\rangle)$, ..., $C(\Omega)$, $C^k(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$
- $L^2((a,b))$, $L^p((a,b))$ Lebesgueovy prostory
- $W^{1,2}((a,b))$, $W^{k,p}((a,b))$ Sobolevovy prostory

Příklady funkcionálů a úloh variačního počtu

① Buď $\vec{\gamma}: [0,T] \to \mathbb{R}^s$ (křivka, trajektorie, pohyb, funkce)

↑ geometr ↑ fyzik ↑ inženýr ↑ matemati

(Funkcionál) [délka křivky]

$$\mathcal{L}[\vec{\gamma}] := \int_0^T \sqrt{\sum_{i=1}^s [\gamma_i'(t)]^2}\, dt$$

Speciálně $(s=2)$

- $\vec{\gamma}(\varphi) = (r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)$, $\varphi \in \langle\alpha,\beta\rangle$ zobecněné polární souřadnice

$$\mathcal{L}[\vec{\gamma}] = \mathcal{L}[r] = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2}\, d\varphi$$

- Křivka daná grafem funkce $\langle\vec{\gamma}\rangle = \{(x, y(x));\ x \in (a,b)\}$

$$\mathcal{L}[\vec{\gamma}] = \boxed{\mathcal{L}[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx}$$

Uvažujme na chvíli jen tento funkcionál ↑. Zformulujme tři minimalizační úlohy.

$$\boxed{(R)\int_a^b f(x)\,dx \text{ existuje}}$$

$$\Updownarrow$$

DOLNÍ Riemannův ∫ existuje & HORNÍ Riemannův ∫ existuje

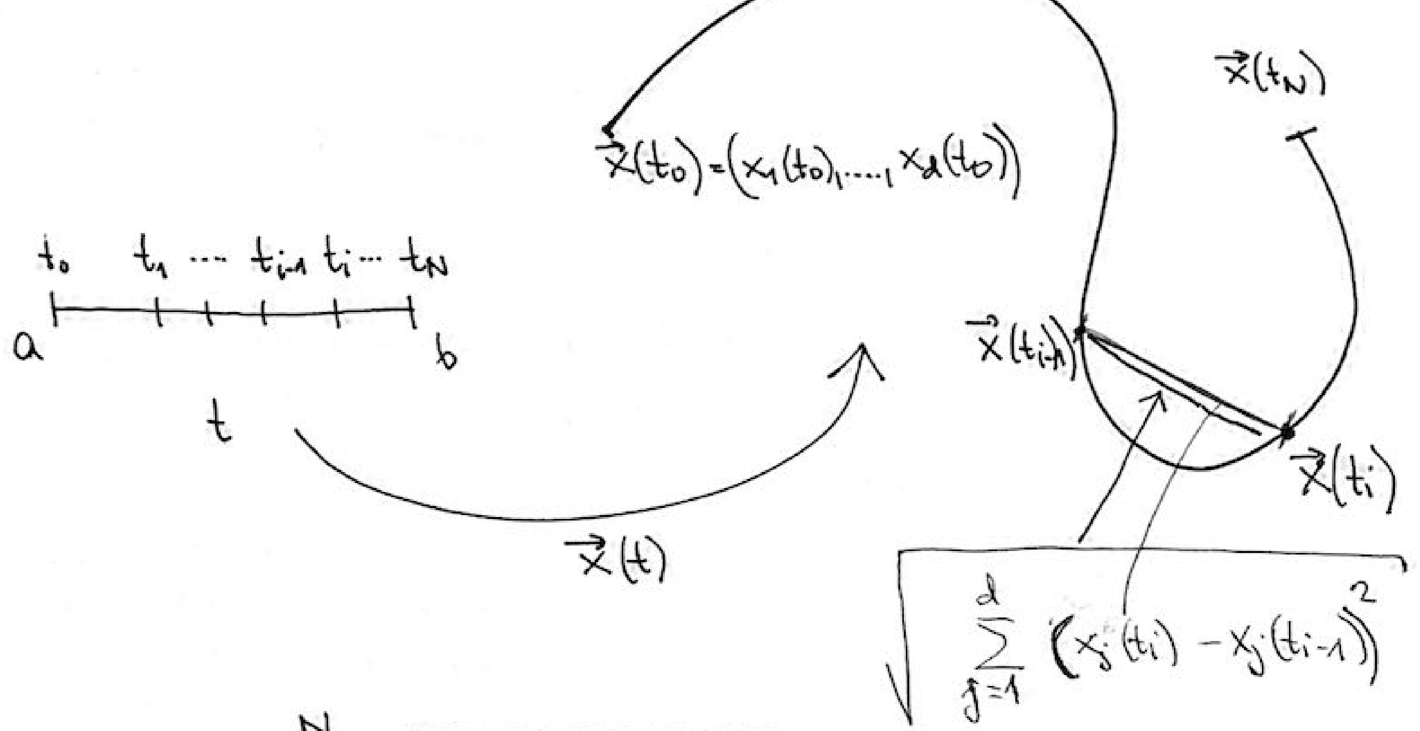
$$\begin{tikzcd}
\sup\limits_{D} \underbrace{s(D,f)} & & \inf S(D,f) \\
\sum\limits_{i=1}^{N} m_i (x_i - x_{i-1}) \arrow[u] & & \sum\limits_{i=1}^{N} M_i (x_i - x_{i-1}) \arrow[u] \\
\inf\limits_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) \arrow[u] & & \sup\limits_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) \arrow[u, bend right]
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}$$

approximace Riemannova integrálu

$$\boxed{(R)\int_a^b f(x)\,dx} \approx \boxed{\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})}$$

FUNKCIONÁLY DÉLKY KŘIVKY



$$\sqrt{\sum_{j=1}^{d}\left(x_j(t_i)-x_j(t_{i-1})\right)^2}$$

$$L[\vec{x}] \approx \sum_{i=1}^{N}\sqrt{\sum_{j=1}^{d}\left(x_j(t_i)-x_j(t_{i-1})\right)^2}$$

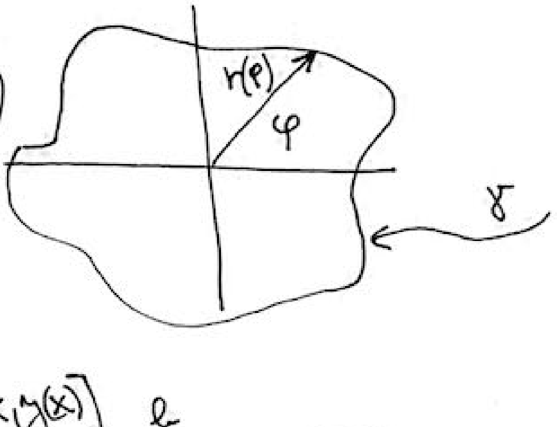
$$\overset{\text{LVOSH}}{=} \sum_{i=1}^{N}\sqrt{\sum_{j=1}^{d}\left(x_j'(\xi_j)\right)^2}\,(t_i-t_{i-1}) \approx \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^{d}\left(x_j'(t)\right)^2}\,dt$$

$$= \int_a^b \|\vec{x}'(t)\|_E\,dt$$

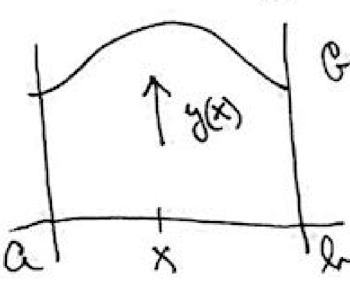
Speciálně

ⓘ $\varphi\in[a,b] \longmapsto \big(\overbrace{r(\varphi)\cos\varphi}^{x_1(\varphi)},\overbrace{r(\varphi)\sin\varphi}^{x_2(\varphi)}\big)$

$$\Rightarrow\quad L[\gamma] = \int_a^b \sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi$$



(ii)



Graf funkce

$$x\in[a,b] \longmapsto [x,y(x)]$$

$$L[y] = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$$

Tři úlohy (variačního počtu)

(i) Nalézt $\boxed{\min_{y \in X^1} \mathcal{L}[y]}$, kde $X^1 = \{y \in \overbrace{C^1((a,b)) \cap C(\langle a,b \rangle)}^{Z}$

$y(a) = A,\ y(b) = B\}$

Úloha: nalézt nejkratší křivku spojující dva body $[a,A]$ a $[b,B]$

(ii) Nalézt $\min_{y \in X^2} \mathcal{L}[y]$ $\quad X^2 = \{y \in Z\ ;\ y(a) = A\}$

Úloha: nalézt křivku, která realizuje nejmenší vzdálenost $[a,A]$ od přímky procházející body $[b,0]$ a $[b,B]$, $B \neq 0$.

(iii) Nalézt $\min_{y \in X^3} \mathcal{L}[y]$ $\quad X^3 = \{y \in Z\}$

Úloha: nalézt křivku, která realizuje nejkratší vzdálenost mezi dvěma přímkami danými body $[a,0]$, $[a,A]$ resp. $[b,0]$, $[b,B]$.

$V[y] := \pi \int_a^b y^2(x)\,dx$ - - -

$P[y] := 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx$ - - >

Funkcionály plochy, objemu rotačních těles ; „ $f \longmapsto \int_a^b f(x)\,dx$ "

② Klasická teoretická mechanika. Jedním z důležitých principů je HAMILTONŮV PRINCIP NEJMENŠÍ AKCE:

pohyb $(\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)))$ Newtonova potenciálního systému daného rovnicemi

$$\frac{d}{dt}\left(m \frac{d\vec{x}}{dt}\right) + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = 0 \iff (m\dot{\vec{x}})^{\cdot} + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = \vec{0}$$

se shoduje s kritickými body (extremálami) funkcionálu

$$\Phi[\vec{x}] = \int_{t_0}^{t_1} L\left(t, \vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}\right) dt, \text{ kde}$$

$$L(t, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)) \overset{df}{=} T(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) - U(\vec{x})$$

③ Problém minimální plochy $u(x,y): \overset{\subset \mathbb{R}^2}{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$S[u] := \int_\Omega \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\, dx\,dy$$

$$\min_{\substack{u\in C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega}) \\ u|_{\partial\Omega} = u_0}} S[u]$$

u_0 je daná funkce na hranici „bublifuk".

④

Úloha: nalézt maximální plochu, kterou lze „uzavřít" provázkem dané délky, tj:

$$\boxed{\begin{aligned} &\max \mathcal{S}[y] \\ &y \in X \\ &\& \\ &\mathcal{L}[y] = l > 0 \end{aligned}}$$

$l>0$ dáno

$\boxed{\text{Úlohy ①}}$ zapadají do obecnější úlohy: nalézt $y\in X$ tak, že y je extremála (kritický bod) funkcionálu

$$\Phi[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\, dx$$

$$L: (a,b)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Úlohy ②}}$ jsou úlohy typu: nalézt $\vec{y}\in X^s$ (tzn. $y_i\in X$, $i=1,\dots,s$) tak, že $\vec{y}$ je extremála funkcionálu

$$\phi[\vec{y}] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \vec{y}(t), \dot{\vec{y}}(t))\, dt$$

$$L: (t_1,t_2)\times\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Úloha ③}}$ patří mezi úlohy: nalézt $u\in X$ tak, že u je extremála

$$\Psi[u] = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

$$L: \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, \quad \Omega\subset\mathbb{R}^d.$$

$\boxed{\text{Úloha ④}}$ je úloha typu ① s podmínkou, že jiný funkcionál $\Xi[y]=0$ (omezení).
vazba

Teorie

Buď $(X, \|\cdot\|_X)$ lineární (vektorový) ~~pro~~ prostor, který je normovaný a úplný $\equiv$ X je Banachův

$\ulcorner$
- dim X, kde X je prostor funkcí, je nekonečná.
- $C^\infty((a,b)) \subset C^2((a,b)) \subset C((a,b))$ a C^∞ obsahuje polynomy libovolného stupně $\{1, x, x^2, \dots, x^k \dots\}$ $\Rightarrow$ dimenze těchto prostorů je ∞. $\lrcorner$

Def. Řekneme, že ϕ nabývá v x_0 lokální $\left\{\begin{matrix}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{matrix}\right\}$

$$\overset{df}{\equiv} \exists\, U_\delta(x_0) := \{x \in X;\ \|x - x_0\|_X < \delta\} \text{ tak, že } \phi(x_0) \left\{\begin{matrix}\geq\\ \leq\end{matrix}\right\} \phi(x) \quad \forall x \in U_\delta(x_0).$$

Řekneme, že ϕ nabývá v x_0 ostré lokální $\left\{\begin{matrix}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{matrix}\right\}$

$$\overset{df}{\equiv} \exists\, U_\delta(x_0) \text{ tak, že } \phi(x_0) \left\{\begin{matrix}>\\ <\end{matrix}\right\} \phi(x) \text{ pro všechna } x \in P_\delta(x_0)$$

$$P_\delta(x_0) := \{x \in X;\ 0 < \|x - x_0\|_X < \delta\}$$

Def. Řekneme, že $\phi : X \to \mathbb{R}$ má v x_0 derivaci Gateaux ve směru $h \in X$ (neboli ϕ je v x_0 Gateauxovsky diferencovatelná v $h \in X$) pokud existuje

$$\lim_{t \to 0} \frac{\phi[x_0 + th] - \phi[x_0]}{t}.$$ Tuto limitu značíme $\delta\phi[x_0](h)$.

$\ulcorner$ Poznamenejme, že pro $g(t) := \phi(x_0 + th)$ lze $\delta\phi[x_0](h)$ zapsat ekvivalentně ve tvaru

$$\delta\phi[x_0](h) = \lim \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0) = \frac{d}{dt} g(t)\Big|_{t=0}$$

Tedy derivování v X ∞-dimenze je redukováno na derivování funkce jedné reálné proměnné.

Věta 1 (Nutná podmínka existence extremály)

Nechť $\Phi : X \to \mathbb{R}$ má v x_0 extremálu a nechť $\delta\Phi[x_0](h)$ existuje pro každé $h \in X$.
Pak

$$\boxed{\delta\Phi[x_0](h) = 0 \qquad \forall\, h \in X}$$

(Dk) Buď $h \in X$ libovolné, ale pevné. Zadefinujme fci $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jako výše, tedy

$$g(t) := \Phi(x_0 + th)$$

[Všimněme si, že $x_0 + th \in X$ díky linearity prostoru X]

Pak z předpokladu plyne, že

- g má v 0 extrém
- $g'(0)$ existuje.

Tedy dle věty z 1. roč. (nutná podmínka existence extrému fce reálné proměnné) je však $g'(0) = 0$, což však znamená, že

$$\delta\Phi[x_0](h) = 0.$$

Protože h bylo zvoleno libovolně, tvrzení je dokázáno. ▨

Uvažujme dále

$$\Phi[y] := \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,dx$$

a řešme úlohu variačního počtu:

$$\boxed{\text{Nalézt } y_{min} \in X^i \text{ tak, že } \Phi[y_{min}] = \min_{Y\in X^i} \Phi[Y]}$$

$i = 1,2,3$

kde pro $Z = C^1((a,b)) \cap C(\langle a,b\rangle)$: $X^1 = \{z\in Z;\ z(a) = A,\ z(b) = B\}$

$X^2 = \{z \in Z;\ z(a) = A\}$

$X^3 = \{z \in Z\} = Z.$

$\boxed{\text{Příklady}}$ ⓐ Úlohy v Příkladu ① s funkcionálem délky křivky, kde

$$L(x,y,y') = \sqrt{1+(y')^2}$$

ⓑ V Příkladu ① také

$$L(\varphi, r, r') = \sqrt{r^2+(r')^2}$$

ⓒ <u>Úloha o brachystochroně</u>

χρονος – čas
βραχιστος – nejkratší

Natáhnout drátek mezi dvěma body (např. [0,0] a [a,b], a,b>0) tak, aby korálek navlečený na drátek v bodě [a,b] dorazil do počátku v nejkratším čase

Galileo Galilei (1637): otázka, zda lze najít natažení, po kterém se korálek dostane do počátku rychleji než po "přímce" spojující [0,0] a [a,b].

Johann Bernoulli (1.1.1697) předložil vědecké komunitě výzvu formou následujícího oznámení:

„Já, Johann Bernoulli, si dovoluji pozdravit nejchytřejší matematiky z celého světa. Nic nemůže být přitažlivější inteligentním lidem než čestný, vyzývavý a podnětný problém, jehož řešení přinese věhlas a slávu a zůstane navždy trvalým monumentálním dílem.
Následujíce příklady položené Pascalem, Fermatem a jinými, doufám, že získám ocenění celé vědecké komunity tím, že před ty nejlepší matematiky naší doby položím problém, který prověří jejich metody a sílu jejich intelektu. Pokud mi někdo předloží řešení navrženého problému, veřejně ho prohlásím za hodna výtečného ocenění a chvály.“

Minimalizovat $T[y]$ přes $y \in C^1((0,a)) \cap C(\langle 0,a \rangle)$

$y(0)=0\,,\ y(a)=b$

kde

$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{b-y(x)}}\,dx \qquad (\text{DÚ, cvičení})$$

Tedy

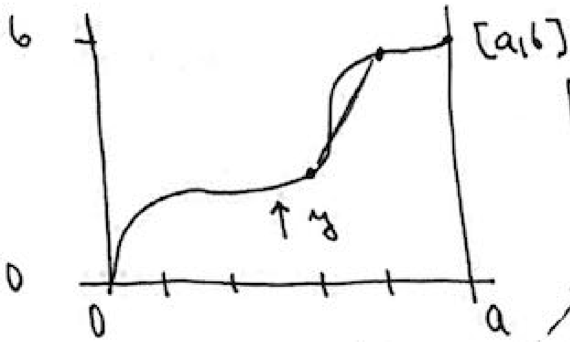
$$L(x,y,y') = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(b-y)}}$$

Úloha o brachystochroně je podobná jiné úloze z optiky:
V dokonale průhledném prostředí s proměnným indexem lomu jsou dány dva body A a B.
Cíl: určit trajektorii světelného paprsku jdoucího z A do B.
Fermatův princip říká, že ze všech křivek spojujících A a B je trajektorie světelného paprsku ta, po které dospěje světlo z A do B v nejkratším čase.

Úloha o brachistochroně

χρονος ... čas
βραχιστος .... nejkratší

Cíl: Natáhnout drátek mezi počátkem [0,0] a bodem [a,b] tak, aby korálek navlečený v bodě [a,b] na drátek se dostal do počátku v nejkratším čase.



Drátek popsán funkcí $y:[0,a]\to\mathbb{R}$
$y(0)=0$, $y(a)=b$.

čas, délka, rychlost přiřazené intervalu (t_{i-1},t_i).

$$T[y] \approx \sum_{i=1}^{N} t_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{s_i}{v_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\sqrt{(y(x_i)-y(x_{i-1}))^2+(x_i-x_{i-1})^2}}{v_i}$$

$$\overset{\text{LVOSH}}{=} \sum_{i=1}^{N} \frac{\sqrt{1+(y'(\xi_i))^2}}{v(\xi_i)}(x_i-x_{i-1})$$

Předpokládáme, že platí, že SOUČET KINETICKÉ A POTENCIÁLNÍ ENERGIE SE ZACHOVÁVÁ:

$$\frac{1}{2} m v^2(\xi_i) + mgy(\xi_i) = mgb$$

$$\Downarrow$$

$$v(\xi_i) = \sqrt{2g\,(b-y(\xi_i)}$$

Tedy

$$T[y] \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{\sqrt{1+(y'(\xi_i))^2}}{\sqrt{2g}\,\sqrt{b-y(\xi_i)}}(x_i-x_{i-1}) \approx \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{b-y(x)}}\,dx$$

$$T[y] = \int_a^b L(y(x),y'(x))\,dx$$

ÚVOD DO VARIAČNÍHO POČTU

Klasická (reálná) analýza (real analysis
differential calculus – diferenciální počet)

- zkoumá vlastnosti (reálných) **funkcí**
- objekt studia $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $\quad d \geq 1$ **FUNKCE**
  $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$
  $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^s$
- mimojiné zkoumá **extrémy funkcí** (lokální minima/max.)

Víme z 1. roč.:

(1) Je-li $f \in C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní,
pak f nabývá v K minimum/maximum

(2) Je-li $f: U(x_0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
f má v x_0 extrém
a $f'(x_0)$ existuje
} pak $f'(x_0) = 0$

(3) Je-li $f: U(x_0) \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $d > 1$,
f má v x_0 extrém,
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ existují pro $i = 1, \dots, d$
} pak $\nabla f(x_0) = 0$

$\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = 0$
$\forall \, |\vec{v}| = 1$

Derivace f v $\vec{x}_0$ ve směru $\vec{v}$, $\quad \partial_{\vec{v}} f(x_0)$,
(směrová derivace f v x_0)
definovaná vztahem

$$\partial_{\vec{v}} f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

je koncept, který bude vhodný pro derivování v prostorech ∞-dimenze, tedy ve variačním počtu.

Variační počet Calculus of variations

- zkoumá minima/maxima neboli $\boxed{\text{extremály funkcionálů}}$ ← kritické body
- objekt studia **funkcionál** zobrazení z normovaného prostoru funkcí do $\mathbb{R}$

$$\mathcal{L} : \left(X, \|\cdot\|_X\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Příklady prostorů X
- $C(\langle a,b\rangle)$, $C^k(\langle a,b\rangle)$, ..., $C(\Omega)$, $C^k(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$
- $L^2((a,b))$, $L^p((a,b))$ Lebesgueovy prostory
- $W^{1,2}((a,b))$, $W^{k,p}((a,b))$ Sobolevovy prostory

Příklady funkcionálů a úloh variačního počtu

① Buď $\vec{\gamma} : [0,T] \to \mathbb{R}^s$ (křivka, trajektorie, pohyb, funkce)
geometr fyzik inženýr matematik

(Funkcionál) **délka křivky**

$$\mathcal{L}[\vec{\gamma}] := \int_0^T \sqrt{\sum_{i=1}^{s} [\gamma_i'(t)]^2}\, dt$$

Speciálně $(s=2)$

- $\vec{\gamma}(\varphi) = (r(\varphi)\cos\varphi,\ r(\varphi)\sin\varphi)$ zobecněné polární souřadnice
  $\varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle$

$$\mathcal{L}[\vec{\gamma}] = \mathcal{L}[r] = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2}\, d\varphi$$

- Křivka daná grafem funkce $\langle \vec{\gamma} \rangle = \{(x, y(x));\ x \in (a,b)\}$

$$\mathcal{L}[\vec{\gamma}] = \boxed{\mathcal{L}[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx}$$

Uvažujme na chvíli jen tento funkcionál ↑.
Zformulujme tři minimalizační úlohy.

$$\boxed{(R)\int_a^b f(x)\,dx \ \text{existuje}}$$

$$\Updownarrow$$

DOLNÍ Riemannův $\int$ existuje & HORNÍ Riemannův $\int$ existuje

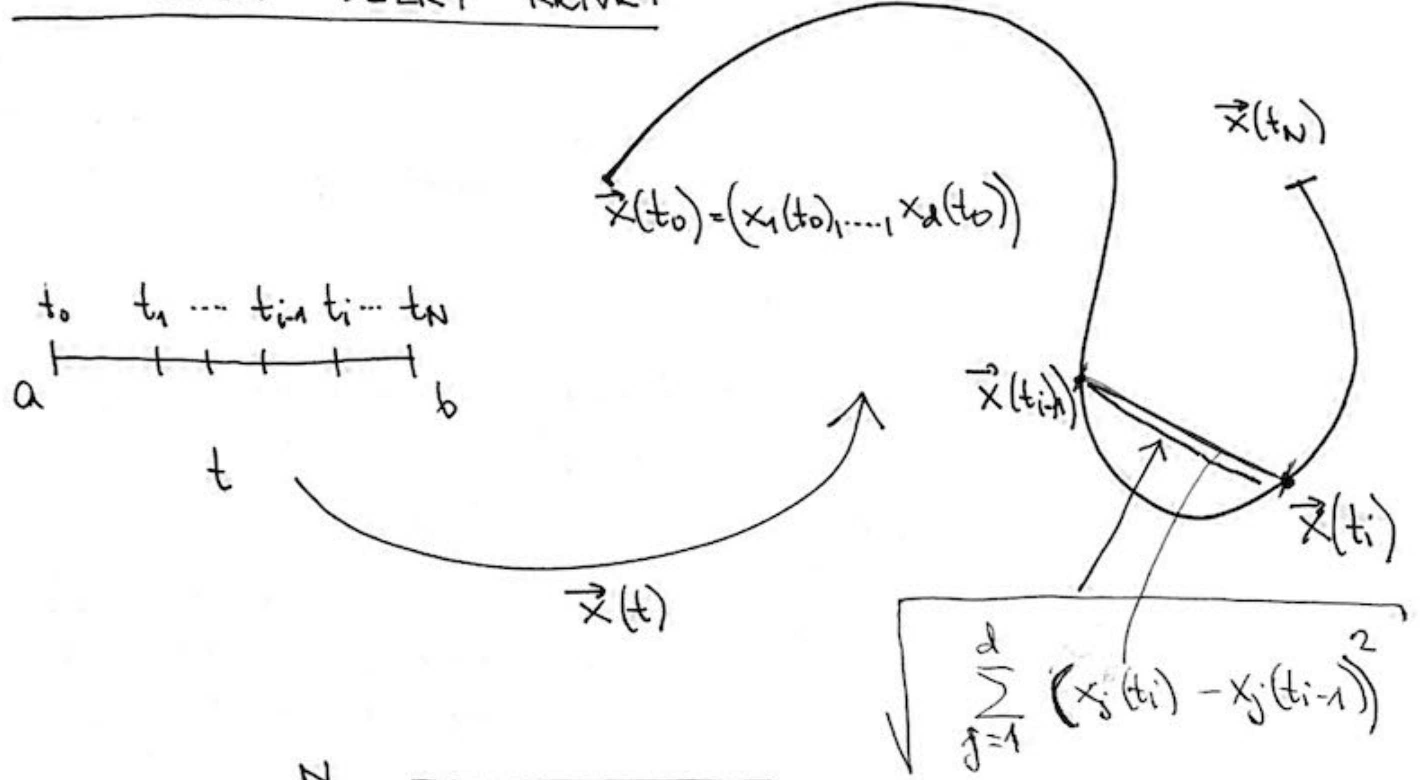
$$\begin{tikzcd}
\sup\limits_D \underbrace{s(D,f)} & \inf S(D,f) \\
\sum\limits_{i=1}^N m_i (x_i - x_{i-1}) \arrow[u] & \sum\limits_{i=1}^N M_i (x_i - x_{i-1}) \arrow[u] \\
\inf\limits_{x\in\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x) \arrow[u] & \sup\limits_{x\in\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x) \arrow[u, bend right]
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}$$

approximace Riemannova integrálu

$$\boxed{(R)\int_a^b f(x)\,dx} \approx \boxed{\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})}$$

FUNKCIONÁLY DÉLKY KŘIVKY



$$\sqrt{\sum_{j=1}^{d} \left(x_j(t_i) - x_j(t_{i-1})\right)^2}$$

$$L[\vec{x}] \approx \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (x_j(t_i) - x_j(t_{i-1}))^2}$$

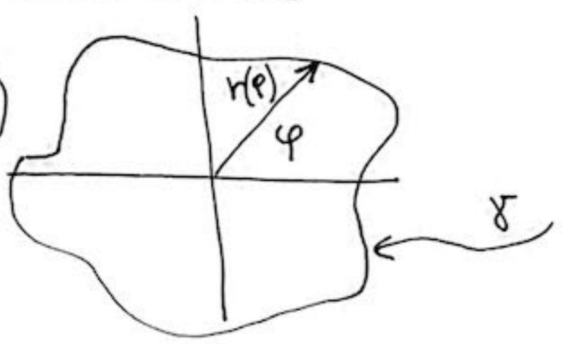
$$\overset{\text{LVOSH}}{=} \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \left(x_j'(\xi_j)\right)^2}\ (t_i - t_{i-1}) \approx \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (x_j'(t))^2}\,dt$$

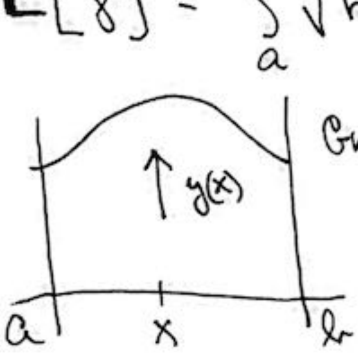
$$= \int_a^b \|\vec{x}\,'(t)\|_E\,dt$$

Speciálně

① $\varphi \in [a,b] \longmapsto \left(\overbrace{r(\varphi)\cos\varphi}^{x_1(\varphi)}, \overbrace{r(\varphi)\sin\varphi}^{x_2(\varphi)}\right)$

$$\Rightarrow L[\gamma] = \int_a^b \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi$$





ⓘⓘ Graf funkce

$$x \in [a,b] \longmapsto [x, y(x)]$$

$$L[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$$

Tři úlohy (variačního počtu)

(i) Nalézt $\boxed{\min_{y\in X^1} \mathcal{L}[y]}$, kde $X^1 = \{y \in \overbrace{C^1((a,b)) \cap C(\langle a,b\rangle)}^{Z}$
$y(a) = A,\ y(b) = B\}$

Úloha: nalézt nejkratší křivku spojující dva body $[a,A]$ a $[b,B]$

(ii) Nalézt $\min_{y\in X^2} \mathcal{L}[y]$ $\qquad X^2 = \{y \in Z\ ;\ y(a) = A\}$

Úloha: nalézt křivku, která realizuje nejmenší vzdálenost $[a,A]$ od přímky procházející body $[b,0]$ a $[b,B]$, $B \neq 0$.

(iii) Nalézt $\min_{y\in X^3} \mathcal{L}[y]$ $\qquad X^3 = \{y \in Z\}$

Úloha: nalézt křivku, která realizuje nejkratší vzdálenost mezi dvěma přímkami danými body $[a,0],[a,A]$ resp. $[b,0],[b,B]$.

$V[y] := \pi \int_a^b y^2(x)\,dx$ - - -

$P[y] := 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$ - ->

Funkcionály plochy, objemu rotačních těles ; „$f \longmapsto \int_a^b f(x)\,dx$"

② Klasická teoretická mechanika. Jedním z důležitých principů je HAMILTONŮV PRINCIP NEJMENŠÍ AKCE:

pohyb $\left(\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))\right)$ Newtonova potenciálního systému daného rovnicemi

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\frac{d\vec{x}}{dt}\right) + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = 0 \iff \left(m\dot{\vec{x}}\right)^{\bullet} + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = \vec{0}$$

se shoduje s kritickými body (extremálami) funkcionálu

$$\Phi[\vec{x}] = \int_{t_0}^{t_1} L\left(t, \vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}\right) dt, \text{ kde}$$

$$L(t, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)) \overset{df}{=} T(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) - U(\vec{x})$$

③ Problém minimální plochy $\quad u(x,y) : \overset{\subset \mathbb{R}^2}{\Omega} \to \mathbb{R}$

$$S[u] := \int_\Omega \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\,dx\,dy$$

$$\min_{\substack{u \in C^1(\Omega)\cap C(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = u_0}} S[u]$$

u_0 je daná funkce na hranici „bublifuk".

④

Úloha: nalézt maximální plochu, kterou lze „uzavřít" provázkem dané délky, tj:

$$\boxed{\max_{\substack{y \in X \\ \& \\ \mathcal{L}[y] = l > 0}} \mathcal{S}[y]}$$

$l > 0$ dáno

Úlohy ① zapadají do obecnější úlohy: nalézt $y \in X$ tak, že y je extremála (kritický bod) funkcionálu

$$\Phi[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,dx$$

$$L : (a,b) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Úlohy ② jsou úlohy typu: nalézt $\vec{y} \in X^s$ (tzn. $y_i \in X$, $i = 1,\dots,s$) tak, že $\vec{y}$ je extremála funkcionálu

$$\phi[\vec{y}] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \vec{y}(t), \dot{\vec{y}}(t))\,dt$$

$$L : (t_1,t_2) \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$$

Úloha ③ patří mezi úlohy: nalézt $u \in X$ tak, že u je extremála

$$\Psi[u] = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\,dx$$

$$L : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d.$$

Úloha ④ je úloha typu ① s podmínkou, že jiný funkcionál

$\Xi[y] = 0$ (omezení).
vazba

Teorie

Buď $(X, \|\cdot\|_X)$ lineární (vektorový) ~~pro~~ prostor, který je normovaný a úplný $\equiv$ X je Banachův

- dim X, kde X je prostor funkcí, je nekonečná.
- $C^\infty((a,b)) \subset C^2((a,b)) \subset C((a,b))$ a C^∞ obsahuje polynomy libovolného stupně $\{1, x, x^2, \dots, x^k \dots\}$ $\Rightarrow$ dimenze těchto prostorů je ∞.

Def. Řekneme, že ϕ nabývá v x_0 lokální $\left\{\begin{matrix}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{matrix}\right\}$

$$\overset{df}{\equiv} \exists\, U_\delta(x_0) := \{x \in X;\ \|x - x_0\|_X < \delta\} \text{ tak, že } \phi(x_0) \left\{\begin{matrix}\geq\\ \leq\end{matrix}\right\} \phi(x) \quad \forall x \in U_\delta(x_0).$$

Řekneme, že ϕ nabývá v x_0 ostré lokální $\left\{\begin{matrix}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{matrix}\right\}$

$$\overset{df}{\equiv} \exists\, U_\delta(x_0) \text{ tak, že } \phi(x_0) \left\{\begin{matrix}>\\ <\end{matrix}\right\} \phi(x) \text{ pro všechna } x \in P_\delta(x_0)$$

$$P_\delta(x_0) := \{x \in X;\ 0 < \|x - x_0\|_X < \delta\}$$

Def. Řekneme, že $\phi: X \to \mathbb{R}$ má v x_0 derivaci Gateaux ve směru $h \in X$ (neboli ϕ je v x_0 Gateauxovsky diferencovatelná v $h \in X$) pokud existuje

$$\lim_{t \to 0} \frac{\phi[x_0 + th] - \phi[x_0]}{t}.$$ Tuto limitu značíme $\delta\phi[x_0](h)$.

Pozorujeme, že pro $g(t) := \phi(x_0 + th)$ lze $\delta\phi[x_0](h)$ zapsat ekvivalentně ve tvaru

$$\delta\phi[x_0](h) = \lim \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0) = \frac{d}{dt} g(t)\Big|_{t=0}$$

Tedy derivování v X ∞-dimenze je redukováno na derivování funkce jedné reálné proměnné.

Věta 1 (Nutná podmínka existence extremály)

Nechť $\phi : X \to \mathbb{R}$ má v x_0 extremálu a nechť $\delta\phi[x_0](h)$ existuje pro každé $h \in X$.

Pak
$$\boxed{\delta\phi[x_0](h) = 0 \qquad \forall h \in X}$$

(Dk) Buď $h \in X$ libovolné, ale pevné. Zadefinujme fci $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jako výše, tedy

$$g(t) := \phi(x_0 + th)$$

[Všimněme si, že $x_0 + th \in X$ díky linearity prostoru X]

Pak z předpokladů plyne, že

- g má v 0 extrém
- $g'(0)$ existuje.

Tedy dle věty z 1. roč. (nutná podmínka existence extrému fce reálné proměnné) je však $g'(0) = 0$, což však znamená, že

$$\delta\phi[x_0](h) = 0.$$

Protože h bylo zvoleno libovolně, tvrzení je dokázáno. ▨

→ $L(\cdot,\cdot,\cdot) = \sqrt{1+(y')^2}$

→ $L = y^2(x)$

$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{b-y}}$

$L = x\, y'^2(x)$

Uvažujme dále

$$\Phi[y] := \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,dx$$

a řešme úlohu variačního počtu:

$$\boxed{\text{Nalézt } \bullet\ y_{min} \in X^i \text{ tak, že } \Phi[y_{min}] = \min_{y \in X^i} \Phi[y]}$$

$i = 1,2,3$

kde pro $\underbrace{Z = C^1((a,b)) \cap C(\langle a,b\rangle)}_{C^1(\langle a,b\rangle)}$:

$X^1 = \{z \in Z;\ z(a) = A,\ z(b) = B\}$ ←

$X^2 = \{z \in Z;\ z(a) = A\}$ ←

$X^3 = \{z \in Z\} = Z.$ ←

$\boxed{\text{Příklady}}$ ⓐ Úlohy v Příkladu ① s funkcionálem délky křivky, kde

$$L(x,y,y') = \sqrt{1+(y')^2}$$

ⓑ V Příkladu ① také

$$L(\varphi, r, r') = \sqrt{r^2+(r')^2}$$

ⓒ Úloha o brachystochroně

χρονος – čas

βραχιστος – nejkratší

Natáhnout drátek mezi dvěma body (např. [0,0] a [a,b], a,b > 0) tak, aby korálek navlečený na drátek v bodě [a,b] dorazil do počátku v nejkratším čase

Galileo Galilei (1637): otázka, zda ne najít natažení, po kterém korálek dostane do počátku rychleji než po "přímce" spojující [0,0] a [a,b].

Johann Bernoulli (1.1.1697) předložil vědecké komunitě výzvu formou následujícího oznámení:

> „Já, Johann Bernoulli, si dovoluji pozdravit nejchytřejší matematiky z celého světa. Nic nemůže být přitažlivější inteligentním lidem než čestný, vyzývavý a podnětný problém, jehož řešení přinese věhlas a slávu a zůstane navždy trvalým monumentálním dílem.
>
> Následujíce příklady položené Pascalem, Fermatem a jinými, doufám, že získám ocenění celé vědecké komunity tím, že před ty nejlepší matematiky naší doby položím problém, který prověří jejich metody a sílu jejich intelektu. Pokud mi někdo předloží řešení navrženého problému, veřejně ho prohlásím za hodna výtečného ocenění a chvály.“

Minimalizovat $T[y]$ přes $y \in C^1((0,a)) \cap C(\langle 0,a\rangle)$

$y(0)=0\,,\ y(a)=b$

kde

$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{b-y(x)}}\,dx \qquad \text{(DÚ, cvičení)}$$

Tedy

$$L(x,y,y') = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(b-y)}}$$

⟦ Úloha o brachystochroně je podobná jiné úloze z optiky:

V dokonale průhledném prostředí s proměnným indexem lomu jsou dány dva body A a B.

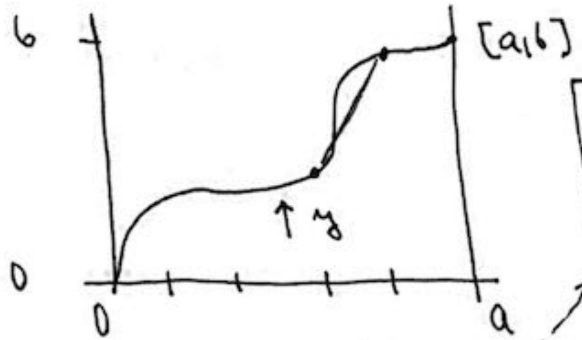
Cíl: určit trajektorii světelného paprsku jdoucího z A do B.

Fermatův princip říká, že ze všech křivek spojujících A a B je trajektorie světelného paprsku ta, po které dospěje světlo z A do B v *nejkratším* čase. ⟧

Úloha o brachistochroně

χρονος ... čas
βραχιστος .... nejkratší

Cíl: Natáhnout drátek mezi počátkem [0,0] a bodem [a,b] tak, aby korálek navlečený v bodě [a,b] na drátek se dostal do počátku v nejkratším čase.



Drátek popsán funkcí $y : [0,a] \to \mathbb{R}$
$y(0) = 0$, $y(a) = b$.

čas, délka, rychlost přiřazené intervalu (t_{i-1}, t_i).

$$T[y] \approx \sum_{i=1}^{N} t_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{s_i}{v_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\sqrt{(y(x_i) - y(x_{i-1}))^2 + (x_i - x_{i-1})^2}}{v_i}$$

$$\overset{\text{LVOSH}}{=} \sum_{i=1}^{N} \frac{\sqrt{1 + (y'(\xi_i))^2}}{v(\xi_i)} \quad (x_i - x_{i-1})$$

Předpokládáme, že platí, že SOUČET KINETICKÉ A POTENCIÁLNÍ ENERGIE SE ZACHOVÁVÁ:

$$\frac{1}{2} m v^2(\xi_i) + m g y(\xi_i) = m g b$$

$$\Downarrow \quad v(\xi_i) = \sqrt{2g\,(b - y(\xi_i)}$$

Tedy

$$T[y] \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{\sqrt{1 + (y'(\xi_i))^2}}{\sqrt{2g}\,\sqrt{b - y(\xi_i)}} (x_i - x_{i-1}) \approx \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{b - y(x)}} dx$$

$$T[y] = \int_a^b L(y(x), y'(x))\, dx$$

Pro $\Phi[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,dx$ chceme spočítat $\delta\Phi[y](h)$ a nalézt charakterizaci (tj. ekvivalentní popis) podmínky $\delta\Phi[y](h) = 0$ pro $\forall h \in X$ z Věty 1.

Protože $\delta\Phi[y](h) = g'(0) = \frac{d}{dt} g(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Phi[y+th]\Big|_{t=0}$,

linearita prostoru X je nutná, aby $y+th$ pro t libovolné zůstávalo v prostoru, kde hledám řešení. Zatímco prostor X^3 ze strany 7 je lineární, prostory X^1 a X^2 lineární obecně nejsou! (jen pro $A=B=0$)
Pro $i=1,2$ hledáme y ve tvaru $y_0+\xi$, kde y_0 je nějaká (jednoduchá, hladká) funkce splňující $y_0(a) = A$ a $y_0(b) = B$ pro $i=1$ a $y_0(a) = A$ pro $i=2$.

Pro $i=1,2$ pak přepíšeme minimalizační úlohu do tvaru

nalézt $y_{min} \in X^i$ tak, že $\Phi[y_{min}] = \min\limits_{\xi \in X_0^i} \Phi[y_0+\xi]$,

kde $X_0^1 = \{z \in Z;\ z(a) = z(b) = 0\}$

a $X_0^2 = \{z \in Z;\ z(a) = 0\}$.

Spočtěme nyní pro libovolné $h \in X_0^i$ (pro $i=3$ $X_0^3 = X^3 = Z$)

$$\delta\Phi[y](h) = \delta\Phi[\overbrace{y_0+\xi}^{y}](h) = \frac{d}{dt}\Phi[y+th]\Big|_{t=0}$$

Máme

$$\delta\Phi[y](h) = \frac{d}{dt}\Phi[y+th]\Big|_{t=0}$$
$$= \frac{d}{dt}\int_a^b L(x, y(x)+t h(x), y'(x)+t h'(x))\,dx\Big|_{t=0}$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left\{ L(x, y(x) + t h(x), y'(x) + t h'(x)) \right\} \, dx \Bigg|_{t=0}$$

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \ldots \, dt \overset{?}{=} \int_a^b \frac{d}{dt} \ldots \, dt$$

záměna derivace a integrace

$$= \int_a^b \Big[\frac{\partial L}{\partial y}(x + y(x) + t h(x), y'(x) + t h'(x)) h(x) + \frac{\partial L}{\partial y'}(x + y(x) + t h(x), y'(x) + t h'(x)) h'(x) \Big] dx \Bigg|_{t=0}$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) h'(x) + \frac{\partial L}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) h(x) \, dx$$

zde bychom mohli výpočet ukončit. My však upravíme první výraz integrací per partes na tvar $\int_a^b g(x) h(x)$

$$= \int_a^b \left\{ \left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) \right\} h(x) \, dx + \left[\frac{\partial L}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) h(x) \right]_a^b$$

Poslední člen $\begin{cases} = 0 \text{ pro } \boxed{i=1} \text{ neb pro } h \in X_0^1 \text{ plyne } h(a) = h(b) = 0; \\ = \frac{\partial L}{\partial y'}(b, y(b), y'(b) h(b) \text{ pro } \boxed{i=2} \text{ neboť } h(a) = 0; \\ = \frac{\partial L}{\partial y'}(b, y(b), y'(b)) h(b) - \frac{\partial L}{\partial y'}(a, y(a), y'(a)) h(a) \text{ pro } \boxed{i=3} \end{cases}$

K charakterizaci podmínky $\boxed{\delta\Phi[y](h) = 0 \text{ pro } \forall h \in X_0^i}$ využijeme následující fundamentální lemma variačního počtu.

Lemma Buď $f \in C((a,b))$ splňující $\int_a^b f(x)h(x)dx = 0$ pro všechna $h \in [C(\langle a,b\rangle)]_0 = \{z \in C(\langle a,b\rangle) ; z(a)=z(b)=0\}$.

Pak $f \equiv 0$.

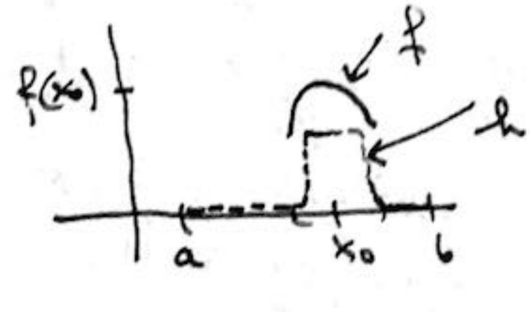
Poznámky 1) Lemma zobecňuje tvrzení: $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ splňující $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ pro libovolné $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ je nutně nulový vektor.

Dk Vol $\vec{b} = \vec{a}$, pak $|\vec{a}|^2 = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$. ☒

2) Kdyby ve znění lemmatu bylo „$\int_a^b f(x)h(x)dx = 0$ pro $h \in C((a,b))$“, pak by opět stačilo vzít $h = f$ a z $\int_a^b f^2(x)dx$ plyne $f \equiv 0$.

Dk Lemmy Sporem. Nechť $\exists\, x_0 \in (a,b)$ tak, že $f(x_0) \neq 0$. BÚNO $f(x_0) > 0$. Ze spojitosti f plyne existence $U_\delta(x_0)$ tak, že $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$ na $U_\delta(x_0)$, viz obrázek. Volme h jako na obrázku, pak

$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)h(x)\,dx > 0,$$ což je ↯ ☒



Věta 2 (Charakterizace podmínky „$\delta\Phi[y](h) = 0$ pro $\forall h \in X_0^i$"; vztah variačního počtu a řešení ODR)

$y \in X^i$ splňuje $\delta\Phi[y](h)=0$ pro $\forall h \in X_0^i$ $\iff$ $y \in X^i$ řeší

$$\boxed{\left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y') = 0}$$

a navíc pro $i=2$ $\quad \frac{\partial L}{\partial y'}(b,y(b),y'(b)) = 0$

a pro $i=3$ $\quad \frac{\partial L}{\partial y'}(a,y(a),y'(a)) = \frac{\partial L}{\partial y}(b,y(b),y'(b))=0$

Tato rovnice se nazývá $\boxed{\text{Euler-Lagrangeova rovnice}}$ (E-L) funkcionálu Φ

Dk „$\Leftarrow$" plyne z výpočtu na straně 9 a 10 pouhým dosazením.

„$\Rightarrow$" z výpočtu na str. 9 a 10 plyne, že

$$0 = \delta\Phi[y](h) = 0 \text{ pro } h \in X_0^i \text{ implikuje}$$

$$(*) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = &\int_a^b \left\{\left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y')\right\} h(x) \\ &+ \frac{\partial L}{\partial y'}(b,y(b),y'(b))h(b) - \frac{\partial L}{\partial y'}(a,y(a),y'(a))h(a) \end{aligned} \right. \quad \text{pro } h \in X_0^i$$

ZA PŘEDPOKLADU

$$\left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y') \in C([a,b])$$

a volbou $h \in X_0^1 \subsetneq X_0^2 \subseteq X_0^3 = X^3$, plyne z (*) a fundamentálního lemmatu Euler-Lagr. rovnice, tj:

$$\left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y') = 0.$$

Pro $i=1$ je tvrzení dokázáno. Pro $i=2$ nebo 3, dosadíme (E–L) do (*) a dostaneme

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(b,y(b),y'(b))\,h(b)=0 \qquad \forall h\in X_0^2\subset X^3$$

což implikuje

$$\frac{\partial L}{\partial y'}\big(b,y(b),y'(b)\big)=0.$$

Dosadíme-li pro $i=3$ výše uvedenou podmínku a (E–L) do (*) dostaneme

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(a,y(a),y'(a))\,h(a)=0 \qquad \text{pro } \forall h\in X_3,$$

což implikuje

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(a,y(a),y'(a))=0.$$

Věta 2 je tak dokázána. ▨

POZOROVÁNÍ (důležitá)

(1) Pokud L nezávisí explicitně na y, pak plyne z (E–L):

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y'(x)) = \text{const.}}$$

(2) Pokud L nezávisí explicitně na x, pak

$$(***)\qquad \boxed{L(y,y')-\frac{\partial L}{\partial y'}(y,y')\,y' = \text{const.}}$$

Dk Derivuj (***) vzhledem k x. Pak

$$\left(L(\cdot)-\frac{\partial L(\cdot)}{\partial y'}y'\right)' = \frac{\partial L}{\partial y}(\ldots)\,y' + \overbrace{\frac{\partial L}{\partial y'}(\ldots)\,y'' - \frac{\partial L}{\partial y'}(\ldots)\,y''}^{\text{stejné členy s opačnými znaménky}} + \left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(\ldots)\right)' y'$$

$$=\left\{\left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(\ldots)\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(\ldots)\right\} y' \underset{\substack{\uparrow\\ (E-L)}}{=} 0$$

▨

Shrnutí $\Phi[y] := \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\, dx$

$$\boxed{\delta\Phi[y, h] = 0 \quad \forall h \in X \qquad \text{BANACHŮV}}$$

$\Updownarrow$ Pečlivěji a přesněji: okrajové podmínky

$$\boxed{0 = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial y}(x, y(x), y'(x))\, \underline{h(x)} + \frac{\partial L}{\partial y'}(x, y(x), y'(x))\, \underline{h'(x)} \qquad \forall h \in X}$$

$\Updownarrow$

$$\boxed{-\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(x, y, y')\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, y') = 0 \qquad \text{Euler-Lagrange}}$$

$\Downarrow$

Zjednodušení (integrace)

① L nezávisí na y ⇒ $\frac{\partial L}{\partial y'}(x, y, y') = \text{cons}$

② L nezávisí na x ⇒

$$\boxed{L(y, \underset{\uparrow}{y'}) - \frac{\partial L}{\partial y'}(y, \underset{\uparrow}{y'})\, \underset{\uparrow}{y'} = \text{const.}}$$

$\delta\Phi[x_0](h) \overset{def.}{=} g'(t)\Big|_{t=0}$ kde $\underbrace{g(t) := \Phi[x_0+th]}_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$

$\delta^{\overset{k}{2}}\Phi[x_0](h,h) \overset{def.}{=} \overset{k}{g''}(t)\Big|_{t=0}$ ←

$=: \Psi_h[x_0]$ a $\delta^2\phi[x_0](h,k) = \delta\Psi_h[x_0](k)$

a analogicky definuji $\delta^{(k)}\phi[x_0](h_1,\dots,h_k)$ ←

Definice Gateaux derivací vyšších řádů

- $\delta\phi[x_0] : h \longmapsto \delta\phi[x_0](h)$

  ↑ Gateaux diferenciál je lineární funkcionál

- **Definice** Řekneme, že $\Phi[y]$ má v $y\in X$ Fréchetův diferenciál ≡ ∃ lineární zobrazení $L : X \to \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{\|h\|_X\to 0} \frac{\Phi[y+h]-\phi[y]-\overset{\uparrow}{L}h}{\|h\|_X} = 0$$

Analogie k $df(x_0)$

$\delta\phi[x_0]$

Zopakování znalostí pro $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ Sekce 4.1-4.3

- $f \in C(\langle a, b \rangle) \Rightarrow \exists\, x_{min}, x_{max} \in \langle a, b \rangle$

  $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$
- $\left.\begin{array}{l} f \text{ má v } x_0 \text{ extrém} \\ f'(x_0) \text{ existuje} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0$
- silný nástroj: <u>INTERVALY MONOTONIE</u>
- $f'(x_0) = 0$ a $\left\{\begin{array}{l} f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ má v x_0 <u>ostré</u> $\left\{\begin{array}{l} \text{max} \\ \text{min} \end{array}\right.$
- konvexita/konkávita a vztah s 2. derivacím

$\boxed{f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}}$ Sekce 8.5 - 8.6

- $f \in C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní $\Rightarrow$ $\exists\, x_{min}, x_{max} \in K$
  $f(x_{min}) \le f(x) \le f(x_{max})$
  $\forall x \in K$

- $\left.\begin{array}{l} f \text{ má v } x_0 \text{ extrém} \\ f \text{ má v } x_0\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow$
  - $\nabla f(x_0) = \vec{0}$ d podmínek
  - $\partial_h f(x_0) = 0$ $\forall h \in \mathbb{R}^d$

derivace ve směru

- f má v x_0 totální dif. existuje-li lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$$\lim_{|h|_{\mathbb{R}^d} \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Lh}{|h|_{\mathbb{R}^d}} = 0$$

Kandidát na $L =: df(x_0)$: $Lh = \nabla f(x_0) \cdot h = \partial_h f(x_0)$

- $\left.\begin{array}{l} f \in C^2(U_\delta(x_0)) \\ \nabla f(x_0) = 0 \\ d^2 f(x_0)(h,h) \left\{\begin{array}{l} \text{positivně} \\ \text{negativně} \end{array}\right\} \text{definitní} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ má v } x_0 \text{ ostré lokální} \left\{\begin{array}{l} \underline{\text{max.}} \\ \underline{\text{min}} \end{array}\right.$

$d^{(2)}f(x_0)(h,h)$ POSITIVNĚ DEFINITNÍ $\overset{df.}{\equiv}$

$$\boxed{d^{(2)}f(x_0)(h,h) > 0 \quad \forall h \neq 0}$$

$\exists \alpha > 0$ $\Updownarrow$

$$\boxed{d^{(2)}f(x_0)(h,h) \geq \alpha |h|^2} \quad \forall h \neq 0$$

$\underline{\mathbb{R}^d}$ a kompaktnost jednotkové sféry podstatná

$\vdash$ $\boxed{\phi : (X, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}}$

<u>Tvrzení</u> (Postačující podmínka)

- $\delta\Phi[x_0](h) = 0 \quad \forall h \in X$
- $\delta^2\Phi[x](h,h) \geq 0 \quad \forall x \in U_\delta(x_0) := \{z \in X ; \|z - x_0\|_X < \delta\}$

$\Longrightarrow$ Φ má v x_0 lokální minimum.

Dk $\Phi[x_0+h] - \Phi[x_0] = g(1) - g(0) =$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} g'(0) + \tfrac{1}{2} g''(\xi)$$

$\xi \in (0,1)$

$$= 0 + \underbrace{\tfrac{1}{2}\delta^2\Phi[\xi](h,h)}_{\geq 0} \quad \text{pro } \forall h : \|h\|_X < \delta$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi[x_0] \leq \Phi[x_0+h] \qquad -\|-}$$

∎

Def (Konvexita ϕ) • X normovaný lineární, $M \subset X$ konvexní.

• $\phi : X \to \mathbb{R}$ je na M KONVEXNÍ $\overset{df.}{=}$

$$\forall x, y \in M, \ \forall \lambda \in [0,1]:$$

$$\Phi[\lambda x + (1-\lambda) y] \leq \lambda \phi[x] + (1-\lambda)\phi[y]$$

Tvrzení (Další postačující podmínka)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \phi : X \to \mathbb{R} \text{ konvexní na } X \\ \bullet\ \delta\phi[x_0](h) = 0 \quad \forall h \in X \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 \text{ je bod globálního minima}$$

Dk: Kdyby existoval $x \in X$ tak, že

$\phi[x] < \phi[x_0]$, pak

$$\frac{\phi[x_0 + t(x - x_0)] - \phi[x_0]}{t} = \frac{\phi[tx + (1-t)x_0] - \phi[x_0]}{t}$$

$$\overset{\text{konvexita}}{\leq} \frac{t\phi[x] + (1-t)\phi[x_0] - \phi[x_0]}{t}$$

$$= \phi[x] - \phi[x_0] < 0.$$

$$\underset{t \to 0}{\Longrightarrow} \quad \delta\phi[x_0](x - x_0) < 0 \ , \text{ což je } ↯$$

▥

Témata 3. přednášky z ÚVODU DO VARIAČNÍHO POČTU

- Terminologie : Gateaux derivace Φ v x_0 ve směru
  Gateaux diferenciál
  Frechétův diferenciál

- (Další) nutné a postačující podmínky existence minimizéru

- Hladkost L, y v $\Phi[y] = \int_a^b L(x,y,y')\,dx$

- Dořešení úlohy ① (i)-(iii).

LITERATURA : Pokorný - přednášky formou videozáznamu
Kopáček II - MAF (2003), kap. 11
B. Dacorogna : Introduction to Calculus of Variations
Imperial College Press, 3. vydání (2015)

Terminologie $x_0 \in X$ lineární

- $$\delta\Phi[x_0](h) = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi[x_0+th]-\Phi[x_0]}{t}$$ pro $h \in X$

Gateaux derivace Φ v x_0 ve směru h

$\boxed{\text{Pozn}}$ $\delta\Phi[x_0](h) = $ variace (Calculus of variations)

- $\delta\Phi[x_0] : h \longmapsto \delta\Phi[x_0](h)$ tj. zobrazení $X \to R$

je lineární funkcionál - Gateaux diferenciál

- Φ má v $x_0 \in X$ Frechétův diferenciál pokud existuje lineární zobrazení, označme jej $d\Phi[x_0]$, z $X \to \mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\Phi[x_0+h]-\Phi[x_0]-d\Phi[x_0](h)}{\|h\|_X} = 0$$

Platí (podobně jako v $\mathbb{R}^d$): Existuje-li $d\Phi[x_0]$, pak existuje $\delta\Phi[x_0]$ a rovnají se.

$\boxed{\text{Pozn.}}$ Studiem matematických vlastností lin. funkcionálů vznikla část matematiky - funkcionální analýza

Nutné a postačující podmínky existence extremál

Buď $L \in C^2(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ a $\phi[y] \overset{df}{=} \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\, dx$

a

nalézt $y \in X$:

$$\phi[y] = \inf_{\xi \in X} \phi[\xi] \qquad (P)$$

Dostáváme následující variantu Věty 2.

Věta 2*

(1) Existuje-li minimizér $\underbrace{}_{}$ $y \in Z \cap C^2(\langle a,b\rangle)$ úlohy (P), pak nutně

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y') = 0 \qquad (E\text{-}L)$$

neboli

$$-\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}(x,y,y')\, y'' - \frac{\partial^2 L}{\partial y' \partial y}(x,y,y')\, y' - \frac{\partial L}{\partial y' \partial x}(x,y,y') + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y') = 0$$

(2) Naopak, je-li y řešením (E-L) a

$(y,z) \longmapsto L(x,y,z)$ je konvexní pro $\forall x \in [a,b]$

pak y je minimizér (P)

(3) Je-li navíc $(y,z) \longmapsto L(x,y,z)$ striktně konvexní pro $\forall x \in [a,b]$,

pak je minimizér, pokud existuje, jediný.

Pozn. • Řešení (E-L) se obecně nazývají kritické (stacionární) body.

• Požadavek na hladkost minimizéru je příliš silné, nemusí být ani C^1.

$\boxed{\text{Platí}}$ $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je (striktně) konvexní $\overset{df}{\Leftrightarrow}$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^m$ $(x \neq y)$ a $\forall \lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \underset{(<)}{\leq} \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Je-li $f \in C^1(\mathbb{R}^m)$, pak jsou ekvivalentní:

(i) f je konvexní

(ii) $f(x) \geq f(y) + \nabla f(y) \cdot (x-y) \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^m$

(iii) $(\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot (x-y) \geq 0 \qquad$ —‖—

Je-li $f \in C^2(\mathbb{R}^m)$,

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) $\nabla^{(2)} f(x) v \cdot v \geq 0 \qquad \forall x, v \in \mathbb{R}^m$

Zformulujeme a dokážeme malinko obecnější tvrzení:

Věta 8.32 Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a konvexní. Platí:

* Je-li $f \in C^1(\Omega)$, pak jsou ekvivalentní

(i) f je konvexní v Ω

(ii) $\underbrace{E(x,y) := f(y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot (y-x)}_{\text{Weierstrassova fce}} \geq 0 \quad \forall x,y \in \Omega$

(iii) ∇f je monotónní v Ω: $(\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot (y-x) \geq 0$ pro $\forall x,y \in \Omega$

** Je-li $f \in C^2(\Omega)$, pak

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) $\nabla^{(2)} f$ je v Ω positivně definitní tzn.

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\, z_i z_j \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^d \quad \forall x \in \Omega$$

Dk **Ad *** Nejdříve pro $x_0, x_1 \in \Omega$ definujme

$\boxed{g(t) := f(x_t)}$ kde $x_t := (1-t)x_0 + t x_1 \in \Omega$ pro $0 \leq t \leq 1$.

Pak $g'(t) = \nabla f(x_t) \cdot (x_1 - x_0)$

Z konvexity f plyne konvexita g, vskutku: pro $\alpha \in [0,1]$

tj. (i)

$$g((1-\alpha)s + \alpha t) = f((1-\alpha)x_s + \alpha x_t) \leq (1-\alpha) f(x_s) + \alpha f(x_t) = (1-\alpha) g(s) + \alpha g(t)$$

Speciálně pro $\varepsilon \in (0,1)$

$$g(\varepsilon) = g((1-\varepsilon)0 + \varepsilon 1) \leq (1-\varepsilon) g(0) + \varepsilon g(1) \Rightarrow \frac{g(\varepsilon) - g(0)}{\varepsilon} \leq g(1) - g(0).$$

Pro $\varepsilon \to 0+$: $g'(0) \leq g(1) - g(0)$, což implikuje $\boxed{E(x_0, x_1) \geq 0}$ a (ii) platí

Je-li $E(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in \Omega$, pak

$$0 \leq E(x_0, x_1) + E(x_1, x_0) = (\nabla f(x_1) - \nabla f(x_0)) \cdot (x_1 - x_0) \geq 0$$

a (iii) platí.

Jestliže (iii) platí, pak g' je také monotónní neboť

$$g'(t) - g'(s) = \frac{(\nabla f(x_t) - \nabla f(x_s)) \cdot (x_1 - x_0)}{t-s} \geq 0 \quad \forall\, 0 \leq s \leq t \leq 1$$

$\Rightarrow$ g' je neklesající

$$(1-\alpha)(g(\alpha) - g(0)) = (1-\alpha)\int_0^{\alpha} g'(t)\,dt \leq (1-\alpha)\alpha g'(\alpha) \leq \alpha \int_{\alpha}^{1} g'(t)\,dt$$

$$= \alpha(g(1) - g(\alpha)) \Rightarrow g(\alpha) \leq (1-\alpha) g(0) + \alpha g(1)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x_\alpha) \leq (1-\alpha) f(x_0) + \alpha f(x_1) \quad \forall x_0, x_1 \in \Omega$$

což je (i).

$\boxed{\text{Ad **}}$ Je-li f konvexní, pak dle (iii')

$$0 \le \frac{1}{\varepsilon} z \cdot \left(\nabla f(x+\varepsilon z) - \nabla f(x)\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} z \cdot \nabla^2 f(x) z$$

$\forall x \in \Omega$

tedy $\nabla^2 f(x)$ je positivně definitní

Naopak Je-li $\nabla^2 f(x)$ positivně definitní $\forall x, y \in \Omega$, pak

$$\left(\nabla f(x) - \nabla f(y)\right) \cdot (x-y) = \int_0^1 \frac{d}{ds} \nabla f(y+s(x-y))\, ds \cdot (x-y)$$

$$= \int_0^1 \nabla f^{(2)}(y+s(x-y))(x-y) \cdot (x-y)\, ds \ge 0 .$$

▨

a dle (iii') je f konvexní.

$\boxed{\text{Dk Věty } 2^*}$ $\boxed{\text{Ad (1)}}$ už dokázáno. Stručně ještě jednou:

Je-li y minimizér ϕ přes všechny body v X, pak

$$\phi[y] \leq \Phi[y+th] \qquad \forall h \in X \quad \text{a } t \in \mathbb{R}$$

Neboli pro lib. $h \in X$

$$g(t) := \phi[y+th] \quad \text{má v } 0 \text{ extrém a tedy}$$

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow \delta\phi[y](h) = 0.$$

Avšak $\delta\phi[y](h) = 0 \qquad \forall h \in X$

$$\Updownarrow$$

tzv. slabá forma (E-L) rovnic

$$\boxed{\int_a^b \frac{\partial L}{\partial y'}(x,y(x),y'(x))h'(x) + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y(x),y'(x))\,h(x) \quad dx = 0 \qquad \forall h \in X}$$

$$\Updownarrow$$ „dostatečná hladkost funkcí"

$$\int_a^a \left[-\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y')\right] h(x)\,dx = 0 \qquad \forall h\,;\ h(a) = h(b) = 0$$

$\Downarrow$ Fund. lemma VP

(E-L) ▨

$\boxed{\text{Ad (2)}}$ Z ekvivalentní charakterizace konvexity $(y,z) \to L(x,y,z)$:

$$L(x,y+h,y'+h') \geq L(x,y,y') + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y')\,h + \frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\,h'$$

$\int_a^b \dots dx \Rightarrow$

$$\phi[y+h] \geq \phi[y] + \underbrace{\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\,h' + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y')\,h\right] dx}_{= 0 \text{ slabá forma (E-L)}}$$

$$\Rightarrow \phi[y+h] \geq \phi[y] \qquad \forall h \in X.$$

$\boxed{\text{Ad (3)}}$ Nechť y a $\overline{y}$ jsou dva minimizéry. Definujme

$$\hat{y} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\overline{y}\,. \qquad \text{zřejmě } \hat{y} \in X.$$

Z konvexity L vzhledem k y, z:

$$L(x,\hat{y},\hat{y}') = L\left(x, \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}\overline{y}, \tfrac{1}{2}y' + \tfrac{1}{2}\overline{y}'\right) \leq \frac{L(x,y,y')}{2} + \frac{L(x,\overline{y},\overline{y}')}{2}$$

Tedy po integraci $\int_a^b dx$

$$\inf \leq \Phi[\hat{y}] \leq \frac{1}{2}\phi[y] + \frac{1}{2}\phi[\overline{y}] = \inf$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b \underbrace{\left[\frac{L(x,y,y')}{2} + \frac{L(x,\overline{y},\overline{y}')}{2} - L\left(x, \frac{y+\overline{y}}{2}, \frac{y'+\overline{y}'}{2}\right)\right]}_{\geq 0 \ \& \ > 0 \text{ pokud } y \neq \overline{y}} dx = 0$$

Tedy nutně $y = \overline{y}$

$\boxed{\text{ŘEŠENÍ ÚLOHY ① (i) - (iii)}}$

$\mathcal{L}[y] = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx$ Tedy $L(x,y,z) = L(z) = \sqrt{1+z^2}$

(i) $X^1 = \{z \in C^1(\langle a,b\rangle);\ \boxed{z(a) = A},\ \boxed{z(b) = B}\}$ Dvě Dirichletovy podmínky

(ii) $X^2 = \{z \in C^1(\langle a,b\rangle);\ z(a) = A\}$ 1 Dirichletová podmínka, 1 Neumannova –

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(b, y(b), y'(b)) = 0$$

(iii) $X^3 = C^1(\langle a,b\rangle)$ Dvě Neumannovy podmínky

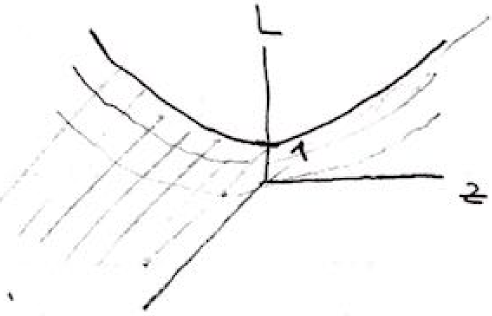
Protože L nezávisí na y, tak z (E-L) je

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y') = \text{const.} \quad \text{tedy} \quad \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C \in (-1,1),$$

což implikuje $\quad y' = \dfrac{C}{\sqrt{1-C^2}} = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow y(x) = \alpha x + \beta$

$\boxed{\text{(i)}}$ $y(x) = \dfrac{B-A}{b-a}x + \dfrac{Ab - Ba}{b-a}$ $\qquad \boxed{\text{(ii)}}$ $y(x) = A$

$\boxed{\text{(iii)}}$ $y(x) = \beta \in \mathbb{R}$ libovolné.



L je sice striktně konvexní vzhledem k z, ale vzhledem k proměnným y, z je "jen" konvexní.

Tedy nalezené stacionární body jsou minimizéry, ale jejich jednoznačnost v případech (i) a (ii) neplyne z Věty 2*, část (3).

V případě (iii) máme ∞ minimizérů.

$\boxed{\text{Def.}}$ $\delta^{(2)}\Phi[y_0](h,h) = \frac{d^2}{dt^2}\Phi[y_0+th]\Big|_{t=0}$ ▨

$\boxed{\text{Věta 3}}$ (1) Nechť y_0 je extremála $\Phi : X \to \mathbb{R}$
Nechť $\delta^2\Phi[y_0](h,h)$ ex.
$\Big\} \Rightarrow \delta^2\Phi[y_0](h,h) \begin{matrix} \overset{\text{MAX}}{\downarrow} \\ \le \\ \ge \\ \underset{\text{MIN}}{\uparrow} \end{matrix} 0$

(2) Nechť
$$\begin{cases} \bullet\ L, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial y'}, \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}, \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2} \in C(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R}^2) \\ \bullet\ \delta\Phi[y_0](h) = 0 \quad \forall h \in X \quad [\text{tzn. } y_0 \text{ je stacionární nebo kritický bod}] \\ \bullet\ \exists c>0 \text{ a } \delta_1>0 \quad \delta^2\Phi[y_0](h,h) \ge c\|h\|_X^2 \quad \forall h \in X,\ \|h\|_X \le \delta_1 \end{cases}$$

pak Φ má v y_0 ostré lok. minimum.

Dk (1) SAMI z vět o fci reálné proměnné

(2) Připomeňme definici $g(t) = \Phi[y_0+th]$ h lib.

Pak $\Phi[y_0+h] - \Phi[y_0] = g(1) - g(0) \underset{\text{Taylor}}{=} g'(0) + \frac{g''(\xi)}{2}$ pro jisté $\xi \in (0,1)$

Ale $g'(0) = 0$ z 2. předpokladu. Tedy

$$\Phi[y_0+h] - \Phi[y_0] + \frac{g''(0) - g''(\xi)}{2} = \frac{g''(0)}{2}$$

Z třetího předpokladu

$$\frac{c}{2}\|h\|_X^2 \le \frac{g''(0)}{2} \le \Phi[y_0+h] - \Phi[y_0] + \frac{c}{4}\|h\|_X^2$$

pro $\|h\|_X$ dostatečně malé.

$\Rightarrow \Phi[y_0] \le \Phi[y_0+h] \quad \forall h \quad (\|h\|_X \le \delta_1)$.

$\Rightarrow y_0$ je lokální minimizér.

$\boxed{\text{E}}$

$\boxed{\text{Ještě jedna postačující podmínka}}$ Platí

$$\delta^{(2)}\Phi[y_0](h,h) = \int_a^b \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial y'}(x, y+th, y'+th')\,h'(x) + \frac{\partial L}{\partial y}(x, y+th, y'+th')\,h(x)\right]\Bigg|_{t=0} dx$$

$$= \int_a^b \Big[\underbrace{\frac{\partial^2 L}{\partial y'\partial y'}(x,y,y')}_{P(x)}[h'(x)]^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y'\partial y}(x,y,y')\,\underbrace{2\,h(x)h'(x)}_{=[h^2(x)]'} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,y')\,h^2(x)\Big]dx$$

$$= \int_a^b P(x)\left(h'(x)\right)^2 + Q(x)\,h^2(x)\;dx \;=: \Psi[h]$$

kde $Q(x) = -\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y'\partial y}(x,y,y')\right)' + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,y')$

Ψ je kvadratický funkcionál v h, jehož (E-L) má tvar
$[\;L(x,h,h') = P(x)[h']^2 + Q(x)\,h^2\;]$

$$\boxed{-\left(P(x)\,h'(x)\right)' + Q(x)\,h(x) = 0} \qquad \text{JACOBIHO ROVNICE} \quad (J)$$
$$\boxed{h(a) = h(b) = 0}$$

__Def.__ Bod $x \in (a,b]$ se nazývá konjugovaný bod (J) pokud $\exists$ netriviální řeš. (J) s $h(a)=0$ a $h(x)=0$.

__Věta 4__ (JACOBI)

(1) Nechť $\frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) > 0$ na $[a,b]$ a y_0 je lokální minimizér Φ $\Big\} \Rightarrow$ neexistují konjugovaný bod v (a,b).

(2) Nechť $y_0 \in C^2(\langle a,b\rangle)$ řeší (E-L)
Nechť $\frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) > 0$ na $[a,b]$
Nechť v $(a,b]$ neexistují konj. bod (J) $\Big\} \Rightarrow$ y_0 je lok. minimizér Φ.

$\boxed{\text{Dk}}$ Gelfand, Fomin: (Calculus of Variations.

HLADKOST ŘEŠENÍ

Definice funkcionálu Φ má (dobrý) smysl pro $y \in C^1(\langle a,b\rangle)$.

Důkaz věty 2 vyžadoval, aby

$$(*) \qquad -\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(\cdot, y, y')\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(\cdot, y, y') \in C(\langle a,b\rangle),$$

abychom mohli použít fundamentální lemma.
Věta 2* přímo předpokládala $y \in C^2(\langle a,b\rangle)$.

OTÁZKA: Lze dokázat platnost Věty 2 bez předpokladu (*)?

VIZ DŮKAZ VĚTY 2*

Ke kladné odpovědi si nejdříve všimneme, že slabá forma (E-L) má tvar

$$\int_a^b \left[E(x)h'(x) + G(x)h(x)\right] dx = 0,$$

kde $E = \frac{\partial L}{\partial y'}(\cdot, y, y')$ a $G = \frac{\partial L}{\partial y}(\cdot, y, y')$

Předpokládejme nyní, že E a G jsou pouze spojité, $E, G \in C(\langle a,b\rangle)$. Pak nemůžeme "per-partesit" v 1. členu. Zadefinujeme-li však

$$P_G(x) = \int_0^x G(s)\,ds \quad , \text{pak } P_G' = G \text{ a } P_G \in C^1(\langle a,b\rangle)$$

a lze "per-partesit" v 2. členu. Dostaneme

$$0 = \int_a^b \left[E(x) - P_G(x)\right] h'(x) + \underbrace{\left[P_G(x)h(x)\right]_a^b}_{=0} \quad \forall h \in \left[C^1(\langle a,b\rangle)\right]_0$$

Z varianty fund. lemmy variačního počtu (viz dále) plyne, že

$$E(x) - P_G(x) = \text{konst.} \Leftrightarrow E = \text{konst} + P_G(x) \in C^1(\langle a,b\rangle)$$

Tedy $E \in C^1(\langle a,b\rangle)$ a výraz v (*) tvaru
$-E' + G$ je všude spojitý. Pomocný předpoklad (*)

v důkazu Věty 2 je tedy ověřen (tj. platí) a není jej třeba předpokládat.

Věta 2 tedy platí za předpokladu $y \in C^1(\langle a,b\rangle)$ a $L \in C^1(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R}^2)$.

$\boxed{\text{Lemma}}$ (varianta fund. lemmy variačního počtu)

Nechť $G \in C(\langle a,b\rangle)$ splňuje $\boxed{\int_a^b G(x)\, h'(x)\,dx = 0 \quad \forall h \in C^1(\langle a,b\rangle),\ h(a)=h(b)=0}$

Pak $G \equiv$ konst.

Dk Označme $c^* := \frac{1}{b-a}\int_a^b G(x)\,dx = \fint_a^b G(x)$ průměr G přes (a,b).

Definujme $h(x) = \int_a^x [G(s) - c^*]\,dx$.

Ověřte, že $h \in C^1(\langle a,b\rangle)$ a $h(a) = h(b) = 0$

Tedy h je přípustná "testovací" funkce v .

Po dosazení

$$0 = \int_a^b G(x)\left(G(x) - c_*\right) = \int_a^b \left(G(x) - c_*\right)\left(G(x) - c_*\right) dx$$

neboť $\int_a^b (G(x) - c_*)\,dx = 0$

což implikuje $G(x) \equiv c_*$ ▨

Aplikace variačního počtu v klasické mechanice

V klasické mechanice se pracuje s pojmem hmotného bodu, který je charakterizován hmotností m a jehož pohyb je dán trajektorií

$$\vec{x} : \underbrace{[0,T]}_{\text{čas}} \to \mathbb{R}^3 \qquad \vec{x} = \vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

přičemž $\vec{x}(0)$ udává známou počáteční polohu hmotného bodu $\vec{x}_0$

Q: Je možné ze znalosti dat $\boxed{m, \vec{x}_0 \text{ a } T}$ určit z nějakých principů trajektorii $\boxed{\vec{x} = \vec{x}(t)}$?

A: Ano, najdi řešení pohybových rovnic

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) := \boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(m\frac{d\vec{x}}{dt}\right) &= \vec{F} \\ \vec{x}(0) &= \vec{x}_0 \\ \frac{d\vec{x}}{dt}(0) &= \vec{x}_1 \end{aligned}}$$

kde $\vec{F}$ popisuje souhrn všech sil na částici působící

kde $\vec{x}_1$ je počáteční rychlost trajektorie, kterou bych měl přidat mezi data úlohy: $\boxed{m, \vec{x}_0, \vec{x}_1, T}$

- Je-li síla $\vec{F}$ ve tvaru gradientu potenciální energie U, tzn.

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{x}) \iff F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}(\vec{x}),$$

pak ty pohybové rovnice

$$(*) \qquad -\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx_i}{dt}\right) + \frac{\partial U}{\partial x_i}(\vec{x}) = 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

jsou podobné E-L rovnicím

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y_i'}(t, \vec{y}, \vec{y}')\right) + \frac{\partial L}{\partial y_i}(t, \vec{y}, \vec{y}') = 0$$

Q: Je přirozené se ptát, zda vskutku lze ztotožnit rovnice (*) s kritickými body nějakého funkcionálu.

Pozor! • Oproti předchozímu výkladu pracujeme s vektorovými funkcemi a systémy ODR

• Je přehlednější psát $\boxed{\dot{x}_i \text{ místo } \frac{dx_i}{dt}}$

tzn. rovnice (*) má pak tvar

$$-(m\dot{x}_i)^{\bullet} + \frac{\partial U}{\partial x_i}(\vec{x}) = 0 \qquad \text{mat.}$$

nebo

$$\underbrace{(m\dot{x}_i)^{\bullet} - \frac{\partial U}{\partial x_i}(\vec{x}) = 0} \qquad \text{fyz.}$$

což chceme ztotožnit s E-L. rcemi

$$\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)^{\bullet} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0} \qquad L = L(t,\vec{x},\dot{\vec{x}})$$

• A - nebylo tak jednoduché, tak v klasické mechanice se nepracuje jen s jediným hmotným bodem, ale s N hmotnými body. Máme tedy 3N veličin

x_1, x_2, x_3 bod 1

x_4, x_5, x_6 bod 2

$\vdots$

$x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N}$ bod 3

Nadále $\boxed{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N})}$

Věta 9.7 Pohyb systému N hmotných bodů hmotnosti $\hat{m}_i$ v potenciálním poli $U = U(\vec{X})$ daný rcemi

$$(*) \qquad (m_i\dot{x}_i)^{\bullet} - \frac{\partial U(\vec{X})}{\partial x_i} = 0 \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, 3N$$

se shodují s kritickými body funkcionálu

$$E(\vec{x}) := \int_0^T L(\vec{x}, \dot{\vec{x}})\,dt \quad \text{kde } L(\vec{X}, \dot{\vec{X}}) = \overbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2}^{=:T} - U(\vec{X})$$

kde užíváme značení $m_{3(i-1)+j} := \hat{m}_i \quad i = 1, \dots, N;\ j = 1, 2, 3.$

$$m_1 = m_2 = m_3 = \hat{m}_1$$
$$m_4 = m_5 = m_6 = \hat{m}_2$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$m_{3N-2} = m_{3N-1} = m_{3N} = \hat{m}_N$$

platí:

(Dk) $$\delta E(\vec{x})(\vec{h}) = \sum_{i=1}^{3N} \int_0^T \left(m_i \dot{x}_i \dot{h}_i - \frac{\partial U}{\partial x_i} h_i \right) dt$$

$$\forall \vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_{3N}) \in C^1([0,T])^{3N},\ h_i(0) = h_i(T) = 0.$$

Tedy s použitím základního lemmatu variačního počtu, či jeho varianty a podmínky

$$\delta E(\vec{x})(\vec{h}) = 0 \quad \forall \vec{h}$$

dostáváme, postupnou volbou $\vec{h} = \underbrace{(0, \dots, h_i, \dots 0)}_{3N}$, pohybové rovnice (*). ▨

Q: K čemu je tato ekvivalence dobrá?

Funkcionál $E(\vec{x})$ můžeme zapsat ekvivalentně pomocí jiných souřadnic (připomeňme si funkcionál délky křivky

$$L(\gamma) := \int_a^b \left[(\gamma_1'(s))^2 + (\gamma_2'(s))^2 \right]^{1/2} ds = \int_\alpha^\beta \left[\{r'(\varphi)\}^2 + r^2(\varphi) \right]^{1/2} d\varphi \Bigg).$$

Tzn. $$E(\vec{x}) = E(\vec{q}) = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})\, dt$$

Pak pohyb můžeme napsat pomocí (E-L) rovnic v (zobecněných) souřadnicích $\vec{q}$:

$$\boxed{(L) \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, 2, 3, \dots, 3N} \qquad \boxed{L := T - U}$$

q_i .... zobecněná souřadnice $\qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ .... zobecněná hybnost

$\dot{q}_i$ ... —‖— rychlost $\qquad \frac{\partial L}{\partial q_i}$ ... zobecněná síla

Příkladem může být ROVINNÝ POHYB HMOTNÉHO BODU V CENTRÁLNÍM POLI POPSANÝ V POLÁRNÍCH SOUŘADNICÍCH:

$(x_1, x_2) \dashrightarrow (q_1, q_2) \qquad q_1 = r,\ q_2 = \varphi$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi \\ x_2 &= r\sin\varphi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot{\varphi} \\ \dot{x}_2 &= \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot{\varphi} \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2} m \left[(\dot{r})^2 + r^2 (\dot{\varphi})^2 \right] \qquad U = U(r)$$

$L(r,\varphi,\dot r,\dot\varphi) = T - U$

Lagrangeovy rovnice pak mají tvar

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial r} = \underline{(m\dot r)^{\cdot} - m(\dot\varphi)^2 r + \frac{\partial U}{\partial r}} = 0$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = (m r^2 \dot\varphi)^{\cdot} = 0 \Rightarrow \underline{r^2 m \dot\varphi = \text{konst.}}$$

[moment hybnosti se během pohybu nemění]

[Místo popisu pomocí rovnic v souřadnicích (x_1,x_2) mám rovnic pro souřadnice (r,φ).]

Také víme, že pokud L nezávisí explicitně na t, vždy existuje první integrál a platí

$$L(\vec q,\dot{\vec q}) - \underbrace{\dot q_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}}_{\text{Einsteinova } \Sigma \text{ konv.}} = \text{konst.} \Leftrightarrow L(\vec q,\dot{\vec q}) - \dot{\vec q}\cdot\vec p = \text{konst.}$$

$$\vec p := \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec q}}$$ zobecněná hybnost.

Významným obratem/krokem je přechod od Lagrangeových rovnic (L) k rovnicím Hamiltonovým (H). K tomu použijeme důležitý nástroj, který se nazývá <u>Legendreova transformace</u>.

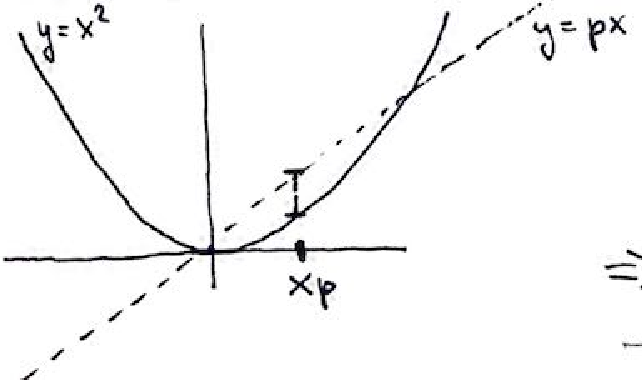
[Legendreova transformace] Buď $f \in C^2$, striktně konvexní. Pak

$$\mathrm{Leg}: f(x) \longmapsto g(p), \text{ kde } g(p) := p\,x(p) - f(x(p))$$

a $x(p)$ je bod maxima funkce $px - f(x)$ pro dané p.

někdy se g nazývá DUÁLNÍ FUNKCE

Příklad ① $\underline{\underline{f(x) = x^2}}$



Hledáme $\max_{x\in\mathbb{R}} (px - f(x))$

Nutná podmínka $p - f'(x) = 0$

$p - 2x = 0$

$x_p = \frac{p}{2}$

$$\Rightarrow g(p) = \frac{p^2}{2} - \frac{p^2}{4} = \underline{\underline{\frac{p^2}{4}}}$$

Tedy $Leg(x^2) = \frac{p^2}{4}$ neboli $Leg : x^2 \longmapsto \frac{p^2}{4}$

⊢

② Ukažte si sami, že · $Leg\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{p^2}{2}$

· $Leg\left(\frac{mx^2}{2}\right) = \frac{p^2}{2m}$

③ $\boxed{f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha} \;, \alpha > 1}$ $\Rightarrow$ Nutná podmínka: $p - x^{\alpha-1} = 0$ $\Downarrow$

$$\boxed{x = p^{\frac{1}{\alpha-1}}}$$

a tedy $(Leg f)(p) = g(p) = p^{1+\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha} p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} =$

$$= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{p^\beta}{\beta} \quad \text{kde } \boxed{\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1}$$

β <u>duální</u> exponent k α, $\beta := \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

⊢

Legendreova transformace striktně konvexní funkce je striktně konvexní fce. Má tedy smysl: $\boxed{Leg\,(Leg\, f)}$ $\forall f$ striktně konvexní

$\boxed{\text{Platí:} \quad Leg\,(Leg\, f) = f}$

Legendreovu transformaci lze definovat i pro $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ C^2 splňující $d^2 f(x; h, h) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$ $\forall h \in \mathbb{R}^d$.

$Leg : f(x) \longmapsto g(p)$ kde $g(p) := p \cdot x(p) - f(x(p))$

$x(p) = \max_x \left(x \cdot p - f(x)\right)$

tzn. rce pro $x(p)$ má tvar $\rightarrow$ $\boxed{p = \nabla f(x(p))}$

Buď $\underset{t}{L : \mathbb{R}} \times \underset{\vec q}{\mathbb{R}^{3N}} \times \underset{\dot{\vec q}}{\mathbb{R}^{3N}} \to \mathbb{R}$ striktně konvexní vzhledem k $\dot{\vec q}$

$L \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{3N}\times\mathbb{R}^{3N})$ tzn. $\frac{\partial^2 L(t,\vec q,\dot{\vec q})}{\partial \dot q_i \partial \dot q_j} h_i h_j \geq \alpha |h|^2_{\mathbb{R}^{3N}}$ $\forall h \in \mathbb{R}^{3N}$

$$(L) \iff \boxed{\dot{\vec p} = \frac{\partial L}{\partial \vec q} \;\wedge\; \vec p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec q}}}$$

Věta 9.8. Za daných předpokladů platí: $\boxed{(L) \iff (H)}$, kde

$$\boxed{(H)\quad \dot{\vec p} = -\frac{\partial H}{\partial \vec q} \qquad \dot{\vec q} = \frac{\partial H}{\partial p}} \quad \text{a} \quad \boxed{H(t,q,p) = \operatorname{Leg}(L_{t,q}(\dot q))(p) = \vec p \cdot \dot{\vec q} - L(t,\vec q,\dot{\vec q})}$$

Dk Dle definice Legendreovy transformace a dle definice H plyne pro $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot q}$ (podmínka na extrém)

a pro ∇H platí jednak

$$\boxed{\nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_{3N}}, \frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_{3N}}\right)}$$

ale také (z pravé strany definice H)

$$\boxed{\nabla H = \left(-\frac{\partial L}{\partial t}, \dot q_1, \dots, \dot q_{3N}, -\frac{\partial L}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial L}{\partial q_{3N}}\right)}$$

Platí-li (L), viz vzorečky před Větou, tak dostáváme

$$\underline{\dot p} = \frac{\partial L}{\partial \vec q} = -\frac{\partial H}{\underline{\partial q}} \quad \text{a} \quad \underline{\dot q} = \frac{\partial H}{\underline{\partial p}}$$

a podtržené vztahy jsou Hamiltonovy rovnice.

Naopak, platí-li (H), dostaneme stejnými argumenty (L). ▨

Důležitá poznámka: V předchozí větě (a jejím důkazu) tvar $L = T - U$ nehrál žádnou roli. Věta 9.8 je tak obecnou větou variačního počtu.

Věta má významné důsledky:

Důsledek 1 Platí $\boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}}$ neboli pokud H nezávisí explicitně na t, pak $\frac{dH}{dt} = 0$, což implikuje že $H \equiv$ konst. (nemění se s časem).

Dk $$\frac{dH}{dt} = \left(\sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot q_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t} \underset{\overset{\uparrow}{(H)}}{=} \sum_i \underbrace{\left\{-\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}\right\}}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Definice Jsou-li f,g dvě funkce závislé na t, $\vec p$, $\vec q$, pak je definována předpisem Poissonova závorka $\{f,g\}$ funkcí f a g

$$\{f,g\} := \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$$

$\vec p = (p_1,\dots,p_k)$, $\vec q = (q_1,\dots,q_k)$

Motivace Je-li $f(t,p,q)$ a H je Hamiltonián splňující (H), pak

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot p_i + \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot q_i\right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$
$$\overset{(H)}{=} \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$ ☒

DŮSLEDEK 2

Je-li $L = T - U$, kde $T := \sum_{i,j=1}^{3N} a_{ij}(t,\vec q)\dot q_i \dot q_j$ a $U = U(t, q_1,\dots,q_{3N})$ a $a_{ij} = a_{ji}$, pak lze ukázat, že $\boxed{H = T + U}$

Dk $$H = \vec p\cdot\dot{\vec q} - L(t,\vec q,\dot{\vec q}) \underset{(H)\Leftrightarrow(L)}{=} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i - L$$
$$= \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\dot q_i - L \underset{\overset{\uparrow}{\text{struktura}\,T}}{=} 2T - T + U = T + U.$$

Je-li totiž $f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij}x_i x_j \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_s} = \sum\left(a_{ij}x_i\delta_{js} + a_{ij}\delta_{js}x_j\right)$
$$= \sum\left(a_{is}x_i + a_{sj}x_j\right)$$
$$= 2\sum_{i=1}^{k} a_{is}x_i$$

a