Sylabus - Matematická analýza II (NOFY152)

1. Newtonův a Riemannův integrál - nedodělky ze zimního semestru

- **Riemannův integrál:** věty o střední hodnotě.
- **Výpočet Riemannova integrálu:** věty o per partes a substituci.
- **Aplikace Riemannova integrálu:** délka křivky, obsah ploch, objem rotačních těles, výpočet těžiště

2. Obyčejné diferenciální rovnice (ODR)

- **Úvod:** Klasifikace typů diferenciálních rovnic. Počáteční a okrajové úlohy pro ODR 2. řádu, fázový prostor, převod na systém rovnic 1. řádu, obecné řešení homogenní a nehomogenní lineární diferenciální rovncie 2. řádu.
- **ODR 1. řádu:** Pojem řešení a definice maximálního řešení, směrové pole, lineární ODR 1. řádu (metody řešení) a nelineární ODR se separovanými proměnnými, Bernoulliova, homogenní a Riccatiova rovnice. Příklady.
- **Základní věty:** Definice lokálního řešení, Peanova a Picard-Lindelöfova věta, řešení ODR metodou mocninných řad. Besselova rovnice.
- **Lineární ODR rovnice n-tého řádu:** lineární skalární ODR n-tého řádu, věta o globální existenci a jednoznačnosti počáteční úlohy, vlastnosti řešení homogenní rovnice, Wronského matice a Wronskián, metoda variace konstant.

3. Číselné a mocninné řady

- **Terminologie a základní pojmy:** Pojem řady a posloupnosti částečných součtů; konvergentní, divergentní, oscilující řady; geometrická, teleskopická a harmonická řada; nutná podmínka konvergence; aritmetika řad.
- **Řady s nezápornými členy:** Srovnávací a podílové kritérium; Cauchyovo odmocninové a D'Alembertovo podílové kritérium a jejich limitní verze; integrální kritérium; Raabeho (bez důkazu) a Gasussovo (bez důkazu) kritérium.
- **Alternující a obecné řady:** Absolutně/neabsolutně konvergující řady; Bolzano-Cauchyho podmínka pro řady; vztah absolutní a neabsolutní konvergence; alternující řady; Leibnitzovo, Abelovo, Dirichletovo kritérium.
- **Mohutnost (kardinalita) čísel:** konečná, spočetná, nespočetná množina; nespočetnost množiny reálných čísel; mohutnost množiny všech podmnožin reálných čísel; Cantorova diagonalizace; přerovnání řad; Riemannova věta o přerovnání neabsolutně konvergentních řad; Součin řad, Mertensova věta, Cauchy a součin dvou absolutně konvergentních řad.
- **Mocninné řady:** Definice; poloměr konvergence; derivace a integrace mocniných řad; Abelova věta; Věty o sinu, cosinu a exponenciále

4. Úvod do metrických prostorů a funkce více proměnných

- **Prostory $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^d$:** vektorový prostor; skalární součin; norma indukovaná skalárním součinem; ekvivalence norem; metrika v $\mathbb{R}^d$.
- **Obecnější prostory:** metrické prostory; prostory se skalárním součinem; normované lineární prostory; prostor $\mathcal{C}[a, b]$ a neekvivalence různých norem.
- **Topologie $\mathbb{R}^d$:** ε-ové okolí bodu; množina otevřená a uzavřená; systém všech otevřených/uzavřených podmonožin v $\mathbb{R}^d$; hranice množiny, vnitřek množiny, uzávěr množiny; Hausdorffův oddělovací axiom; hromadný bod; charakterizace uzavřených mnonžin pomocí hromadných bodů.
- **Posloupnosti v $\mathbb{R}^d$:** konvergence posloupnosti; úplnost a kompaktnost v $\mathbb{R}^d$; konvergence posloupností bodů v topologickém a metrickém prostoru; cauchyovská posloupnost a Banachův prostor; kompaktnost (topologická vs v metrice) a její charakterizace; kompaktní množiny v $\mathbb{R}^d$; Heine–Borelova věta
- **Funkce více proměnných - základní pojmy:** limita, spojitost a derivace skalárních a vektorových funkcí; parciální derivace a její spojitost; derivace ve směru a různé diferenciální operátory; věta o derivaci složeného zobrazení; záměnnost derivací vyšších řádů.
- **Taylorův rozvoj a totální diferenciál:** věty o střední hodnotě; totální diferenciál a jeho geometrická interpretace; existence totálního diferenciálu a důsledky;
- **Spojitá zobrazení na kompaktních množinách:** věty o spojitém zobrazení na komaptní množině $K \subset \mathbb{R}^d$; lokální a globání extrémy; sedlové body; nabývání extrému pro spojité funkce na kompatkní množině; stejnoměrně spojité funkce; nutné a postačující podmínky na existenci extrému.
- **Hlubší vlastnosti:** Banachova věta a její důsledky (včetně důkazu Picard-Lindelöofovy věty); věta o implicitních funkcích a vztahy pro derivace (skalární i vektorové funkce, Jakobiho matice); ODR 1. řádu ve tvaru totálního diferenciálu; potenciál k danému vektorovému poli - nutná a postačující podmínka pro jeho existenci; věta o inverzním zobrazení; Lagrangeova věta o vázaných extrémech.

5. Úvod do variačního počtu

- **Funkcionály a úlohy variačního počtu:** příklady funkcionálů; kritické body a extremály; Gâteauxova (směrová derivace) funkcionálu;
- **Existence minimizérů:** nutné podmínky existence extremály; Euler–Lagrangeova rovnice a její forma ve speciálních případech; Gateauxův a Frechetův diferenciál; postačující podmínky existence minima funkcionálulu; charakterizace konvexních funkcí v $\mathbb{R}^d$; Jacobiho rovnice;
- **Vázané extrémy:** vázané extrémy, nutné a postačující podmínky; Lagrangeovy multiplikátory;
- **Variační počet a mechanika kontinua:** Legendrova transformace; Lagrangeovy a Hamiltonovy rovnice.