Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: ____________________ Cvičící: ____________________

Otázka	1	2	3	**Body**
Maximum bodů	7	6	7	20
Získané body				

[7] 1. Uvažujte

$$a(x)\, y^{(3)}(x) + b(x) \arctan\left(\frac{y'(x) - y''(x)}{y(x)}\right) + c(x)y(x)^2 = 0,$$

s podmínkami

$$y(0) = A, \quad y'(0) = B, \quad y''(0) = C,$$

kde $a, b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou **spojité** funkce a $a(x) \geq 1$ na $\mathbb{R}$.

(1) Přesně pojmenujte (charakterizujte) výše uvedený problém.

(2) Přepište problém na soustavu rovnic prvního řádu.

(3) Přepište soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu do integrálního tvaru a ukažte ekvivalenci obou zápisů

(4) Rozhodněte o platnosti následujících implikací. Buď najděte protipříklad, nebo je dokažte. Všechna použitá tvrzení pečlivě zformulujte a ověřte předpoklady:

(i)
$$A = B = C = 0,\ b(x) \equiv 0 \implies \text{existuje právě jedno řešení na celém } \mathbb{R},$$

(ii)
$$A = 1, B, C \in \mathbb{R},\ b(x) \equiv 0 \implies \text{existuje právě jedno řešení na celém } \mathbb{R},$$

(iii)
$$A \neq 0, B, C \in \mathbb{R} \implies \text{existuje právě jedno řešení na okolí bodu } x = 0.$$

Řešení:

(1) Jedná se o **počáteční** úlohu pro **obyčejnou nelineární** diferenciální rovnici **třetího řádu**.

(2) Zavedeme nové proměnné:

$$z_1(x) := y(x), \quad z_2(x) := y'(x), \quad z_3(x) := y''(x).$$

Potom

$$z_1' = z_2, \quad z_2' = z_3$$

a dosazením do původní rovnice získáme

$$a(x)\, z_3' + b(x) \arctan\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1}\right) + c(x)z_1^2 = 0,$$

což ihned vede k rovnici (funkce a je nenulová)

$$z_3' = -\frac{1}{a(x)}\left(b(x)\arctan\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1}\right) + c(x)z_1^2\right).$$

Definujeme vektorovou funkci $\mathbf{z}(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x))^\top \in \mathbb{R}^3$ a zobrazení

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{z}) := \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ -\frac{1}{a(x)}\left(b(x)\arctan\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1}\right) + c(x)z_1^2\right) \end{pmatrix}.$$

Po této definici pak rovnice třetího řádu přejde na soustavu počátečních úloh

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= \mathbf{f}(x, \mathbf{z}), \\ \mathbf{z}(0) &= (A, B, C)^T. \end{aligned} \tag{$\mathcal{E}$}$$

(3) Ukážeme, že pokud $\mathbf{f}$ je spojitá v bodě $(0, (A, B, C))$, tak $(\mathcal{E})$ je ekvivalentní (na okolí nuly) řešení úlohy

$$\mathbf{z}(x) = (A, B, C)^T + \int_0^x \mathbf{f}(t, \mathbf{z}(t))\,\mathrm{d}t.$$

Implikaci $\Longrightarrow$ lze získat přímou integrací rovnice $(\mathcal{E})$. Opačnou implikaci získáme prostou derivací výše uvedené rovnosti, což na malém okolí nuly lze udělat díky spojitosti $\mathbf{z}$ a $\mathbf{f}$.

(4) Zformulujeme nejdříve větu, kterou použijeme pro naše tvrzení.
Picardova–Lindelöfova věta: Nechť $\mathbf{f}(x, \mathbf{z})$ je v okolí bodu $(x_0, \mathbf{z}_0)$ spojitá a lipschitzovsky spojitá vzhledem k $\mathbf{z}$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že počáteční úloha

$$\mathbf{z}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{z}(x)), \quad \mathbf{z}(x_0) = \mathbf{z}_0$$

má právě jedno řešení na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Nyní se budeme věnovat imlikacím (i)–(iii)

(i) **Platí:** V tomto případě se funkce $\mathbf{f}$ redukuje na

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{z}) = (z_2, z_3, -\frac{c(x)}{a(x)}z_1^2)^T.$$

Tato funkce je na okolí jakéhokoliv bodu $(x_0, \mathbf{z}_0)$ spojitá a lipschitzovsky spojitá vzhledem k $\mathbf{z}$. Dle P-L věty tedy každým bodem prochází právě jedno řešení. Víme tedy, že řešení je jednoznačné, zbývá ověřit, že řešení je definované globálně na celém $\mathbb{R}$. Toto je však snadné, neboť hledané řešení je (vzhledem k počátečním podmínkám $\mathbf{z}_0 = (A, B, C)^T = \mathbf{0}$) $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

(ii) **Neplatí:** Můžeme použít předchozí výsledek a dostáváme, že v okolí nuly určitě existuje právě jedno řešení. My však ukážeme, že nemusí být definované na celém $\mathbb{R}$. Uvažujme původní rovnici třetího řádu a funkci

$$y(x) = (1-x)^{-3}.$$

Potom $y(0) = 1$ a platí

$$y' = \frac{3}{(1-x)^4},\ y'' = \frac{12}{(1-x)^5},\ y''' = \frac{60}{(1-x)^6}$$

a tedy

$$y''' = \frac{60}{(1-x)^6} = 60\left((1-x)^{-3}\right)^2 = 60y^2.$$

Našli jsme tedy řešení úlohy s $a(x) \equiv 1$, $c(x) \equiv -60$, $B = 3$ a $C = 12$. Toto řešení je však definováno pouze na $(-\infty, 1)$.

(iii) **Platí:** Opět můžeme použít výsledek z bodu (i). Nyní (protože $b \neq 0$) je problematický bod $z_1 = 0$. Nicméně, protože naše počáteční podmínka je $\mathbf{z}_0 := (A, B, C)$ a $A \neq 0$, vidíme že $\mathbf{f}$ je lipschitzovsky spojitá na okolí bodu (A, B, C) a tedy můžeme použít P-L větu.

[6] 2. (1) Zformulujte **Cauchyovo odmocninové kritérium** pro číselné řady. Uvažujte limitní i nelimitní verzi.
(2) Obě kritéria dokažte.
(3) Zadefinujte pojem **mocninná řada** (komplexní). Zadefinujte pojmy **střed řady** z_0 a **poloměr konvergence** R.
(4) Vyslovte tvrzení o konvergenci řady v závislosti na vzdálenosti od středu z_0 a poloměru R. Tvrzení **dokažte**.

Řešení:

(1) Uvažujeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s $a_n \geq 0$. Níže uvedeme dvě formy Cauchyova odmocninového kritéria:

Nelimitní tvar: Pokud existuje $q \in [0, 1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí
$$\sqrt[n]{a_n} \leq q,$$
pak řada $\sum a_n$ konverguje.
Obráceně, pokud existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí
$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1,$$
pak řada $\sum a_n$ diverguje.

Limitní tvar: Označme
$$L := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$
Pak platí:

– Pokud $L < 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje.
– Pokud $L > 1$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.

(2) **Důkaz nelimitního tvaru:** Pro $n \geq n_0$ platí
$$\sqrt[n]{a_n} \leq q \implies a_n \leq q^n \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n + \sum_{n_0}^{\infty} q^n.$$
Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ je geometrická s koeficientem $q < 1$, která konverguje, musí konvergovat i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Naopak, pokud pro $n \geq n_0$ platí
$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \implies a_n \geq 1$$
a tedy $\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ a tedy není splněna nutná podmínka konvergence.

Důkaz limitního tvaru: Začneme s případem $L < 1$. Z definice limsup máme, že existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro dostatečně velká n je
$$\sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon < 1.$$

Označme $q = L + \varepsilon < 1$. Pak $a_n \leq q^n$ pro všechna dostatečně velká n a můžeme použít nelimitní verzi.

V případu $L > 1$ postupujeme obráceně. Z definice existuje podposloupnost n_k, pro kterou $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1 + \varepsilon$ pro nějaké $\varepsilon > 0$, tedy $a_{n_k} > (1+\varepsilon)^{n_k} \to \infty$. Tudíž není splněna nutná podmínka a řada nemůže konvergovat.

(3) **Definice mocninné řady**

Mocninná řada se středem v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ je výraz tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde $a_n \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$). Číslo

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

nazveme poloměr konvergence.

(4) Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí:

- Pro $|z - z_0| < R$ řada konverguje absolutně.
- Pro $|z - z_0| > R$ řada diverguje.
- Pro $|z - z_0| = R$ konvergence může i nemusí nastat.

Důkaz:

Mocninná řada je pro každé pevné z obyčejnou číselnou řadou. Při zkoumání její konvergence se tedy přirozeně používá odmocninové kritérium.

Z rovnosti

$$\sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|z - z_0|,$$

plyne, že pro konvergenci řady $\sum a_n (z - z_0)^n$ stačí, aby

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right) |x - x_0| < 1,$$

což platí pokud $|z - z_0| < R$.

Obráceně, pokud $|z - z_0| = R + \varepsilon > R$, můžeme najít podposloupnost a_{n_k} takovou, že

$$\lim_{n_k\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = \frac{1}{R},$$

což z definice znamená, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n_k \geq n_0$ platí $\sqrt[n]{|a_{n_k}|} \geq \frac{1}{R+\varepsilon}$ a tedy

$$|a_{n_k}(z - z_0)^{n_k}| = |a_{n_k}|(R + \varepsilon)^{n_k} \geq \frac{1}{(R + \varepsilon)^{n_k}}(R + \varepsilon)^{n_k} = 1$$

a není tedy splněna nutná podmínka konvergence.

Pokud $|z - z_0| = R$, uvažujme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Poloměr konvergence je $R = 1$. Pro $z = 1$ řada diverguje (harmonická), ale pro $z = -1$ jde o alternující harmonickou řadu, která konverguje.

[7] 3. (1) Uveďte definici **Banachova prostoru** X. Zadefinujte **všechny pojmy** použité v této definici. (Pojem **vektorový prostor** definovat nemusíte.)

(2) Buď $F : X \to X$ zobrazení. Zadefinujte pojmy:

- F je **kontrakce**,
- F má **pevný bod**.

(3) Zformulujte a dokažte **Banachovu větu** o pevném bodě.

(4) Pomocí Banachovy věty dokažte, že následující soustava rocnic má **právě jedno řešení**

$$4x - 3\cos y = 1,$$
$$5y + 2\sin x = \pi.$$

Nápověda k (4): Můžete zkusit uvažovat zobrazení $(x, y) \mapsto (\frac{1+3\cos y}{4}, \frac{\pi-2\sin x}{5})$.

Řešení:

(1) Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Řekneme, že X je **normovaný**, pokud je na něm definováno zobrazení $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$, nazývaná **norma**, která splňuje pro všechna $x, y \in X$ a $\lambda \in \mathbb{R}$, nebo $\lambda \in \mathbb{C}$:

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost).

Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ je **Cauchyovská** právě tehdy, když platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n, m \in \mathbb{N} : \; n, m > n_0 \implies \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon.$$

Řekneme, že normovaný prostor $(X, \|\cdot\|)$ je **úplný**, pokud každá Cauchyovská posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ má limitu v X. **Banachův prostor** je úplný normovaný vektorový prostor.

(2) Řekneme, že zobrazení $F : X \to X$

- je kontrakce, pokud existuje konstanta $q \in [0, 1)$ taková, že

$$\|F(x) - F(y)\| \leq q\|x - y\| \quad \text{pro všechna } x, y \in X.$$

- má pevný bod, pokud existuje $x \in X$ takové, že

$$F(x) = x.$$

(3) **Banachova věta o pevném bodě:** Nechť X je Banachův prostor a $F : X \to X$ je kontrakce. Pak F má právě jeden pevný bod.

Jednoznačnost: Mějme dva pevné body $x, y \in X$, tj. $F(x) = x$ a $F(y) = y$. Pak ale

$$\|x-y\| = \|F(x)-F(y)\| \leq q\,\|x-y\| \quad \implies \quad (1-q)\|x-y\| \leq 0 \implies \|x-y\| \implies x = y.$$

Použili jsme $1 - q > 0$ a základní vlastnost normy.

Existence: Definujme rekurentně posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ jako

$$x_0 := 0, \qquad x_{n+1} := F(x_n).$$

Ukážeme, že posloupnost je Cauchyovská a díky tomu, že X je Banachův, musí mít i limitu $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Díky spojitosti F (plyne z kontrakce) pak platí

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$$

a x je tedy hledaný pevný bod.

Stačí ukázat Cauchyovskost. Buď n libovolné. Potom dostaneme rekurentně

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_n\| &= \|F(x_n) - F(x_{n-1})\| \le q\|x_n - x_{n-1}\| = q\|F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})\| \\ &\le q^2\|x_{n-1} - x_{n-2}\| \le \cdots \le q^n\|F(x_0) - x_0\| = q^n\|F(0)\|.\end{aligned}$$

Buď nyní $n > m$. Potom použitím výše uvedeného a trojúhelníkové nerovnosti máme

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\| &= \|(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-1}) + \ldots + (x_{m+1} - x_m)\| \\ &\le \sum_{k=m}^{n} \|x_{k+1} - x_k\| \le \sum_{k=m}^{n} q^k\|F(0)\| \le \|F(0)\| \sum_{k=m}^{\infty} q^k = \frac{\|F(0)\|q^m}{1-q}.\end{aligned}$$

Protože $q \in (0,1)$, můžeme pro každé $\varepsilon > 0$ najít n_0 takové, že pro každé $n \ge m \ge n_0$ platí $\frac{\|F(0)\|q^m}{1-q} \le \varepsilon$ a posloupnost je tedy Cauchyovská.

(4) Definujme zobrazyení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pomocí

$$F(x,y) := \left(\frac{1 + 3\cos y}{4}, \frac{\pi - 2\sin x}{5}\right).$$

Je zřejmé, že bod (x,y) je řešením soustavy rovnic právě tehdy, když platí, $F(x,y) = (x,y)$, což znamená pravě tehdy, když (x,y) je pevný bod F. Víme, že $\mathbb{R}^2$ s normou $\|(x,y)\| := \sqrt{x^2+y^2}$ je Banachův prostor a stačí nám tedy ukázat, že F je kontrakce. Buďte (x_1,y_1) a (x_2,y_2) dva body v $\mathbb{R}^2$. Potom

$$\begin{aligned}&\|F(x_1,y_1) - F(x_2,y_2)\|^2 = \left\|\left(\frac{1+3\cos y_1}{4}, \frac{\pi - 2\sin x_1}{5}\right) - \left(\frac{1+3\cos y_2}{4}, \frac{\pi - 2\sin x_2}{5}\right)\right\|^2 \\ &= \left\|\frac{3(\cos y_1 - \cos y_2)}{4}, \frac{2(\sin x_2 - \sin x_1)}{5}\right\|^2 = \frac{9}{16}(\cos y_1 - \cos y_2)^2 + \frac{4}{25}(\sin x_2 - \sin x_1)^2 \\ &= \frac{9\sin^2\xi_1}{16}(y_1 - y_2)^2 + \frac{4\cos^2\xi_2}{25}(x_1 - x_2)^2 \le \frac{9}{16}\left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right) \\ &= \left(\frac{3}{4}\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\|\right)^2.\end{aligned}$$

Ve výpočtu jsme použili Lagrangeovu větu o střední hodnotě k odhadu $\sin x_1 - \sin x_2 = \cos\xi_2(x_1 - x_2)$, kde $\xi \in (x_1, x_2)$. Obdobně i pro funkci cos. Vidíme tedy, že jde o kontrakci a důkaz je hotov.