Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: ______________________ Cvičící: ______________________

Otázka	1	2	3	**Body**
Maximum bodů	8	6	6	20
Získané body				

[8] 1. (i) Definujte pojem číselná řada.

(ii) Definujte pojmy **konvergentní**, **divergentní** a **oscilující** číselná řada.

(iii) Definujte pojmy **absolutně** a **neabsolutně konvergentní** číselná řada.

(iv) Formulujte a dokažte **Dirichletovo kritérium** konvergence číselných řad.

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. Tvrzení buď dokažte, nebo najděte protipříklad.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní $\implies$ Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konverguje.
- $a_n \searrow 0$ (tzn a_n je nerostoucí posloupnost jejíž limita je nula) $\iff \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konverguje.

Řešení:

(i) Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných či komplexních čísel. Číselná řada je formální zápis součtu nekonečně mnoha členů posloupnosti, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ke každé řadě přiřazujeme posloupnost částečných součtů

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

(ii) Číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je:

- **konvergentní**, pokud existuje vlastní limita $\lim_{n\to\infty} S_n = S$,
- **divergentní**, pokud existuje nevlastní limita ($\pm\infty$ pro $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ a ∞ pro $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$),
- **oscilující**, pokud neexistuje limita S_n (ani nevlastní).

(iii) Číselná řada $\sum a_n$ je:

- **absolutně konvergentní**, pokud konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

- **neabsolutně konvergentní**, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje.

(iv) **Dirichletovo kritérium:** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti splňující

(a) posloupnost částečných součtů $A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ je omezená, tj. $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |A_n| \leq M$,

(b) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Důkaz: K důkazu použijeme diskrétní integraci per partes:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

To že platí, je vidět z následujících úprav (definujeme $A_0 := 0$):

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1}$$
$$= A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Nyní ukážeme, že posloupnost částečných součtů $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ je Cauchyovská a tedy, že řada konverguje. Pro $n > m$

$$|S_n - S_m| = \left| A_n b_n - A_m b_m - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + \sum_{k=1}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \right|$$
$$\leq |A_n b_n| + |A_m b_m| + \left| \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \right|.$$

Protože $|A_n| \leq M$ (posloupnost je omezená), dostaneme

$$|S_n - S_m| \leq M|b_n| + M|b_m| + M \sum_{k=m}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| = M|b_n| + M|b_m| + M|b_m - b_n|,$$

kde jsme pro poslední rovnost použili monotonii b_n. Protože $b_n \to 0$, je vidět, že S_n je Cauchyovská.

Pravdivost implikací:

- **První implikace platí:** Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní, tak posloupnost jejích částečných součtů musí být Cauchyovská, což znamená, že $\forall \varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $m > n_0$ platí
$$\sum_{k=n_0}^{m} |a_k| \leq \varepsilon.$$

Ukážeme, že posloupnost částečných součtů $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ je Cauchyovská a tedy má limitu a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Najdeme n_0 takové, že výše uvedená nerovnsot platí. Potom pro $n > m > n_0$

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=n_0}^{n} |a_k| \leq \varepsilon.$$

Tedy $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyovská posloupnost, tudíž konverguje.

- **Druhá implikace neplatí:** Stačí volit $a_n := (-1)^n/n$. Potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ale
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$
což je harmonická řada, která diverguje. Implikace tedy neplatí.

- **Ekvivalence neplatí:** Implikace “ $\Longrightarrow$ ”platí. Je to důsledek Dirichletova kritéria, protože posloupnost $b_n = (-1)^n$ má omezenou posloupnost částečných součtů (jde o Leibnitzovo kritérium).

  Implikace “ $\Longleftarrow$ ”neplatí. Stačí uvažovat $a_n := (-1)^n n^{-2}$. Pak řada $\sum (-1)^n a_n$ konverguje, ale a_n není monotónní.

[6] 2.

- Zformulujte **Větu o implicitních funkcích**.
- Zformulujte a dokažte vzorec **o derivacích implicitních funkcí**.
- Pro $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ zadefinujte pojem **totální diferenciál** v bodě x_0.

Rozhodněte o pravdivosti následujících implikací. Buď je dokažte, nebo uveďte protipříklad.

1. $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ má v bodě x totální diferenciál $\implies$ $\forall v \in \mathbb{R}^d$ existuje $\partial_v f(x)$.
2. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v $(0,0)$ totální diferenciál $\implies$ existuje funkce $y(x)$ definovaná na okolí nuly tak, že $F(x, y(x)) = 0$.
3. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nemá v $(0,0)$ totální diferenciál $\implies$ neexistuje funkce $y(x)$ definovaná na okolí nuly tak, že $F(x, y(x)) = 0$.
4. $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ má spojité parciální derivace na okolí bodu $x = (0, \ldots, 0)$ $\implies$ existuje totální diferenciál f v bodě $x = (0, \ldots, 0)$.
5. $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ nemá spojité parciální derivace na okolí bodu $x = (0, \ldots, 0)$ $\implies$ neexistuje totální diferenciál f v bodě $x = (0, \ldots, 0)$.

Řešení:

Věta o implicitních funkcích: Nechť $U \subset \mathbb{R}^d$ a $V \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené a $F : U \times V \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$ definované v okolí bodu $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in U \times V$. Dále nechť $F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$ a matice

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{y}_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \right)_{i,j=1}^{d}$$

je regulární (tj. má nenulový determinant).

Pak existuje okolí $\mathcal{U}$ bodu $\mathbf{x}_0$ a zobrazení $\mathbf{f} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ třídy $\mathcal{C}^1$ takové, že:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0, \quad F(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \in \mathcal{U}.$$

Věta o derivacích implicitních funkcí: Za předpokladů z předchozí věty platí, že funkce $\mathbf{f}$ má derivaci v každém bodě v $\mathcal{U}$ a pro matici derivací $\mathbf{f}$ platí:

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})).$$

Důkaz: Z rovnosti $F(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ derivujeme podle $\mathbf{x}$ a použijeme řetízkové pravidlo (všechny derivace existují dle předchozí věty):

$$\frac{d}{dx_j} F_i(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial F_i}{\partial y_k} \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 0.$$

Odtud dostaneme ($\cdot$ značí maticové násobení):

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}},$$

a po vynásobení inverzní maticí:

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}.$$

Definice (totální diferenciál): Nechť $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f má v bodě x_0 totální diferenciál právě tehdy, když existuje linearní zobrazení $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ takové, že platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)|_{\mathbb{R}^n}}{|x - x_0|_{\mathbb{R}^d}} = 0.$$

1. **Platí:** Existence $\partial_v f(x)$ znamená, že existuje následující limita

$$\lim_{t\to 0_+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0_+} \left(\frac{f(x+tv) - f(x) - L(x+tv-x)}{t} + \frac{L(x+tv-x)}{t}\right)$$
$$= \lim_{t\to 0_+} \frac{f(x+tv) - f(x) - L(x+tv-x)}{t} + L(v),$$

kde jsme použili linearitu diferenciálu. Navíc z definice diferenciálu máme

$$\left|\frac{f(x+tv) - f(x) - L(x+tv-x)}{t}\right| \leq |v| \frac{|f(x+tv) - f(x) - L(x+tv-x)|}{|(x+tv) - x|} \to 0.$$

2. **Neplatí:** Např. funkce $F(x, y) = y^2 - x$. Je to hladká funkce a tedy ma totální diferenciál, navíc $F(0, 0) = 0$. Na druhou stranu, pro jakékoliv $x < 0$ a $y \in \mathbb{R}$ platí $F(x, y) > 0$ a tedy hledaná funkce nemůže být definovaná prozáporná x.

3. **Neplatí:** Např funkce $F(x, y) = x+y^{\frac{1}{3}}$. Tato funkce nemá parciální derivace v nule a tedy nmůže mít ani totální diferenciál. Na druhou stranu ale pokud definujeme $y(x) := -x^3$, pak platí $F(x, y(x)) = x + (y(x))^{\frac{1}{3}} = x - x = 0$

4. **Platí:** Zadefiujme $L(z) := \nabla f(x_0) \cdot z$ a pokud použijeme větu o střední hodnotě (využíváme existenci derivací na okolí)

$$\frac{f(x - x_0) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)}{|x - x_0|} = \frac{\nabla f(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot (x - x_0) - \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)}{|x - x_0|}$$

kde $\theta \in (0, 1)$. Ze spojitosti derivací pak dostaneme

$$\left|\frac{\nabla f(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot (x - x_0) - \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)}{|x - x_0|}\right| \leq |\nabla f(x_0+\theta(x-x_0)) - \nabla f(x_0)| \to 0.$$

5. **Neplatí**. Stačí uvažovat funkci jedné proměnné $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ dodefinované nulou pro $x = 0$. Tato funkce má derivaci v nule a tedy i totální diferenciál. Derivace však není spojitá v nule.

[6] 3. Uvažujte funkci $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, která splňuje následující podmínky:

- f je spojitá na intervalech $[0,1)$ a $(1,2]$,
- existují jednostranné limity:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = A \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = B \in \mathbb{R}.$$

Rozhodněte, zda platí následující implikace (pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, tak ho **dokažte**):

(1)

$$\forall h \in \mathcal{C}([0,2]),\ h(0) = h(2) = 0 : \quad \int_0^2 f(x)h(x)\,dx = 0$$
$$\implies \quad A = B = 0.$$

(2)

$$\forall h \in C^1([0,2]),\ h(0) = h(2) = 0 : \quad \int_0^2 f(x)h'(x)\,dx = 0$$
$$\implies A = B.$$

(3)

$$A \geq B \implies \quad \forall h \in C([0,2]),\ h(0) = h(2) = 0 : \quad \int_0^2 f(x)h(x)\,dx \geq 0$$

(4)

$$\forall h \in C^1([0,2]),\ h(0) = h(1) = h(2) = 0 : \quad \int_0^2 f(x)h'(x)\,dx = 0$$
$$\implies \quad f(x) = A \text{ na } [0,1) \text{ a } f(x) = B \text{ na } (1,2].$$

Řešení:

Nejdříve zformulujeme a dokážeme dva výsledky z přednášky.
Lemma (základní věta a DuBois–Reymondovo lemma) : Buď $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Potom platí

- Pokud $\int_a^b f(x)h(x) = 0$ pro každou $h \in \mathcal{C}([a,b])$ splňující $h(a) = h(b) = 0$, pak $f = 0$ na $[a,b]$.
- Pokud $\int_a^b f(x)h'(x) = 0$ pro každou $h \in \mathcal{C}^1([a,b])$ splňující $h(a) = h(b) = 0$, pak f je konstantní na $[a,b]$.

Důkaz: Nejdříve první tvrzení. Předpokládejme, že existuje $x_0 \in (a,b)$ takový, že $f(x_0) \neq 0$. Pro jednoduchost uvažujeme $f(x_0) > 0$. Potom díky spojitosti f existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x) > f(x_0)/2$ pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Definujme spojitou funkci h předpisem

$$h(x) := \begin{cases} 0 & x \in [a, x_0 - \delta], \\ \dfrac{(x - x_0 + \delta)}{\delta} & x \in [x_0 - \delta, x_0], \\ -\dfrac{(x - x_0 - \delta)}{\delta} & x \in [x_0, x_0 + \delta], \\ 0 & x \in [x_0 + \delta, b] \end{cases}$$

Tato funkce splňuje předpoklady a proto

$$0 = \int_a^b f(x)h(x) = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)h(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x) = \frac{\delta f(x_0)}{2} > 0,$$

což je spor.

Nyní dokážeme druhé tvrzení. Zadefinujeme $K := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)$. Potom definujeme

$$h(x) := \int_a^x (f(t) - K)\mathrm{d}t.$$

Je zřejmé, že $h(a) = h(b) = 0$. Navíc, protože f je spojitá, vidíme, že $h \in \mathcal{C}^1([a, b])$ a platí $h'(x) = f(x) - K$. Dosadíme takovou funkci a máme

$$0 = \int_a^b f(x)h'(x) = \int_a^b (f(x) - K)h'(x) = \int_a^b (f(x) - K)^2$$

a tedy nutně $f(x) = K$ pro každé $x \in [a, b]$.

Nyní se budeme věnovat jednotlivým implikacím.

(1) **Platí:** Funkce f je spojitá na $[1 + \varepsilon, 2]$ pro každé $\varepsilon > 0$. Každá spojitá funkce $h \in \mathcal{C}([1 + \varepsilon, 2])$ splňující $h(1 + \varepsilon) = h(2) = 0$ se dá rozšířit nulou a funkce h je spojitá na $[0, 2]$ a tedy může být použita a dostaneme

$$\forall h \in \mathcal{C}([1 + \varepsilon, 2]),\ h(1 + \varepsilon) = h(2) = 0 : \quad \int_{1+\varepsilon}^2 f(x)h(x)\, dx = 0$$

Použitím základního lemma dostaneme, že $f = 0$ na $[1 + \varepsilon, 2]$. Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, vidíme, že $f(x) = 0$ na $(1, 2]$. A tedy i $B = 0$. Vlastnost $A = 0$ se dokáže obdobně.

(2) **Platí:** Opět rozdělením intervalů a použitím DuBois–Reymondovo lemma získáme, že f je konstantní na $(0, 1)$ a také na $(1, 2)$ a z definice A a B vidíme, že $f(x) = A$ pro $x \in (0, 1)$ a $f(x) = B$ pro $x \in (1, 2)$. Nyní pro libolvolné h máme z předpokladů

$$0 = \int_0^2 f(x)h'(x) = \int_0^1 Ah'(x) + \int_1^2 Bh'(x) = Ah(1) - Bh(1).$$

Určitě můžeme najít funkci h splňující $h(1) = 1$ a tedy pak nutně $A = B$.

(3) **Neplatí:** Např. pro $f \equiv 1$ platí $A = B$. Volme $h(x) := x(x - 2)$. Potom

$$\int_0^2 f(x)h(x) = \int_0^2 x^2 - 2x = [x^3/3 - x^2]_0^2 = -\frac{4}{3} < 0.$$

(4) **Platí:** Bylo už dokázáno v (2).