Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: ______________________ Cvičící: ______________________

Příklad	1	2	3	**Body**
Maximum bodů	6	7	7	20
Získané body				

[6] 1. (i) Definujte pojmy metrika a metrický prostor.

(ii) Definujte pojmy norma a lineární normovaný vektorový prostor.

(iii) Ukažte, že každý lineární normovaný prostor lze pro vhodnou volbu metriky chápat jako metrický prostor, ale opačně to neplatí.

(iv) Definujte pojem limita posloupnosti prvků metrického prostoru.

(v) Ukažte, že pokud limita ve smyslu výše existuje, pak je daná jednoznačně.

Řešení:

(i) **Metrika** na množině M je zobrazení

$$\varrho : M \times M \to \mathbb{R},$$

které splňuje pro všechna $x, y, z \in M$ následující podmínky:

(a) $\varrho(x, y) \geq 0$ (nezápornost),

(b) $\varrho(x, y) = 0 \iff x = y$ (nulová vzdálenost pouze pro shodné prvky),

(c) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ (symetrie),

(d) $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$ (trojúhelníková nerovnost).

Metrický prostor je uspořádaná dvojice (M, ϱ), kde M je množina a ϱ metrika na M.

(ii) **Norma** na vektorovém prostoru V nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ je zobrazení

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R},$$

které splňuje pro všechna $x, y \in V$ a skalár $\alpha \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$):

(a) $\|x\| \geq 0$ (nezápornost),

(b) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (nulová norma pouze pro nulový vektor),

(c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ (homogenita),

(d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost).

Lineární normovaný vektorový prostor je vektorový prostor vybavený normou.

(iii) Pokud máme lineární normovaný prostor $(V, \|\cdot\|)$, definujeme metriku

$$\varrho(x, y) := \|x - y\|.$$

Tato funkce ϱ splňuje axiomy metriky, takže (V, ϱ) je metrický prostor.

Opačně to obecně neplatí. Například množina $M = \{0, 1\}$ s metrikou $\varrho(x, y) = |x - y|$ je metrický prostor, ale není to vektorový prostor (např. není uzavřena vůči sčítání ani násobení skalárem), a tudíž nemůže být lineárním normovaným prostorem.

(iv) Nechť (M, ϱ) je metrický prostor a (x_n) je posloupnost v M. Řekneme, že

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in M,$$

pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq N$ platí

$$\varrho(x_n, x) < \varepsilon.$$

(v) Nechť $x_n \to x$ a zároveň $x_n \to y$ v metrickém prostoru. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existují $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ taková, že pro $n \geq \max(N_1, N_2)$ platí:

$$\varrho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \varrho(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Potom podle trojúhelníkové nerovnosti:

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_n) + \varrho(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, plyne $\varrho(x, y) = 0$, tedy $x = y$.

Limita je tedy jednoznačná.

[7] 2. Uvažujte obyčejnou diferenciální rovnici ve tvaru

$$y' = a(x)b(y), \quad y(x_0) = y_0,$$

kde $a\colon I \to \mathbb{R}$, $b\colon J \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce a I a J jsou otevřené intervaly splňující $x_0 \in I$ a $y_0 \in J$.

1. Klasifikujte tuto rovnici.
2. Zformulujte Picardovu–Lindelöfovu větu pro tuto rovnici (jaké podmínky musí splňovat funkce a a b).
3. Dokažte tuto větu. (Věty, které jsou v důkazu použity, pečlivě zformulujte.)
4. Ukažte, že podmínky věty splňují funkce $a(x) = \cos x$, $b(y) = \sin y$.
5. Ukažte, že pokud $b(y) = \sqrt{y}$ a $y_0 = 0$, nelze větu aplikovat a řešení není jednoznačné.

Řešení:

1 Rovnice

$$y' = a(x)b(y)$$

je (nelineární) obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu, se separovnými proměnnými.

2 **Picardova–Lindelöfova věta:**

Nechť funkce a je spojitá na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a $b(y)$ je Lipschitzovsky spojitá na $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, tj. existuje konstanta $L > 0$, že

$$|b(y_1) - b(y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \text{pro všechna } y_1, y_2 \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon).$$

Pak existuje $h > 0$, a existuje právě jedno řešení počáteční úlohy

$$y' = a(x)b(y), \quad y(x_0) = y_0$$

definované na intervalu $(x_0 - h, x_0 + h)$.

3 **Důkaz**

Definujme zobrazení::

$$y(x) \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{x} a(t)b(y(t))\,dt.$$

Ukážeme, že existuje $\delta > 0$ tak, že výše uvedené zobrazení je kontrakce na $X := C^1([x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Prostor X je Banachův a můžeme tedy použít Banachovu větu o kontrakci, ze které plyne, že výše uvedené zobrazení má pevný bod. Nebo-li existuje $y \in X$ splňující

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} a(t)b(y(t))\,dt$$

pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a tedy y řeší i původní rovnici. Navíc dle věty o kontrakci je jednoznačné.

Nyní ukážeme, že uvedené zobrazení je kontrakce. Hledáme vhodné δ tak aby $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$ a označme $M := \max a(x)$. Potom pro pro $y_1, y_2 \in \mathcal{C}([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$ platí:

$$\left\| \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} a(t) b(y_1(t))\, dt \right) - \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} a(t) b(y_2(t))\, dt \right) \right\|_{\mathcal{C}([x_0-\delta, x_0+\delta])}$$
$$= \left\| \int_{x_0}^{x} a(t)(b(y_1(t)) - b(y_2(t))\, dt \right\|_{\mathcal{C}([x_0-\delta, x_0+\delta])} \leq ML \left\| \int_{x_0}^{x} |y_1(t) - y_2(t)|\, dt \right\|_{\mathcal{C}([x_0-\delta, x_0+\delta])}$$
$$\leq MLh \| y_1(t) - y_2(t) \|_{\mathcal{C}([x_0-\delta, x_0+\delta])}.$$

Pokud tedy volíme $h < \frac{1}{ML}$ bude zobrazení kontrakce.

4 Obě funkce jsou spojité na $\mathbb{R}$, navíc funkce $\sin y$ má derivaci $\cos y$, která je omezená. Proto z věty o střední hodnotě plyne

$$|\sin y_1 - \sin y_2| \leq |y_1 - y_2| \quad \Longrightarrow \quad \sin y \text{ je Lipschitzovská.}$$

Proto funkce $\sin y$ je Lipschitzovská v y, a lze aplikovat Picardovu–Lindelöfovu větu. Úloha má jediné lokální řešení.

5 $b(y) = \sqrt{y}$, $y_0 = 0$

Funkce $b(y) = \sqrt{y}$ není Lipschitzovská v žádném okolí nuly $\Longrightarrow$ nelze použít Picardovu větu. Rovnice

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0$$

má více řešení:

- Triviální řešení: $y(x) \equiv 0$.
- Netriviální řešení: $y(x) = \frac{1}{4}(x - c)^2$ pro $x \geq c$, např. pro $c = 0$: $\quad y(x) = \frac{1}{4}x^2$.

Existuje tedy více různých řešení splňujících počáteční podmínku.

[7] 3. Nechť $M := B_1(0)$ je otevřená jednotková koule v $\mathbb{R}^2$. Funkce $f : M \to \mathbb{R}$ má spojité první parciální derivace na M (tj. $f \in C^1(M)$). Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení. Každé tvrzení buď **dokažte**, nebo **uveďte protipříklad**.

1. Funkce f nabývá na M svého minima.
2. Pokud $\nabla f(0,0) = 0$ a pro všechna $h \neq (0,0)$ platí
$$d^2 f(0,0)(h,h) > 0,$$
pak f nabývá v bodě $(0,0)$ globálního minima.
3. Pokud f je konvexní, pak na množině M nabývá svého lokálního minima.
4. Pokud f je konvexní a $\nabla f(0,0) = 0$, pak f nabývá v bodě $(0,0)$ globálního minima.

Řešení:

1. **Neplatí:** Uvažujte funkci $f(x,y) = -x$. Je spojitá, ale neomezená zdola na M a nedosahuje minima, neboť $x \to 1^-$ znamená $f(x,y) \to -1$, ale žádný bod s $x = 1$ v M neleží.

2. **Neplatí** Dané podmínky zajišťují pouze ostré *lokální* minimum, ale nezaručují minimum *globální*.

   Uvažujte funkci
$$f(x,y) = -4x^4 - 4y^4 + x^2 + y^2.$$
   Má v bodě $(0,0)$ nulový gradient a druhý diferenciál splňující
$$d^2 f(0,0)(h,h) = 2(h_1^2 + h_2^2) > 0 \quad \text{pro všechna } h \neq (0,0).$$
   Přesto není $(0,0)$ globální minimum. Platí
$$-3 = \lim_{x \to 1} f(x,0).$$
   Protože $f(0,0) = 0$ existuje $x_0 \in (0,1)$ takový, že $f(x_0,0) = -1 < f(0,0)$ a bod $(0,0)$ tedy nemůže být bodem globálního minima.

3. **Neplatí:** I konvexní funkce na nekompaktní (otevřené) množině nemusí minimum dosahovat.

   Uvažujte $f(x,y) = x$ je lineární (tedy konvexní), ale na množině M nedosahuje minima, neboť se může libovolně blížit -1.

4. **Platí:** Předpokládejme spor. Tedy, že existuje $x \in B_1(0)$ tak, že $f(x) < f(0)$. Díky existenci totálního diferenciálu víme, že v bodě $(0,0)$ existují derivace ve všech směrech a jsou rovnz nule. a tedy máme
$$\begin{aligned} 0 = \lim_{t \to 0_+} \frac{f(tx) - f(0)}{t} &= \lim_{t \to 0_+} \frac{f((1-t)0 + tx) - f(0)}{t} \\ &\leq \lim_{t \to 0_+} \frac{(1-t)f(0) + tf(x) - f(0)}{t} = f(x) - f(0) < 0, \end{aligned}$$
   což je spor.