

Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: _____ Cvičící: _____

Příklad	1	2	3	4	5	Body
Maximum bodů	6	7	5	5	7	30
Získané body						

- [6] 1. Uvažujte tenký drát ρ popsáný jako

$$\rho := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [0, 1], y = x^2\}.$$

Hustota drátu je $\varrho(x) := (1 + Ax) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$, kde $A > 0$ je parametr.

Určete hmotnost drátu a polohu těžiště.

[7] 2. Bud' $\alpha \in \mathbb{R}$. Uvažujte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n^2}{n+2}\right) \cos\left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Pro která α řada konverguje, konverguje absolutně, diverguje?

- [5] 3. Bud' $a > 0$ Nalezněte všechna maximální řešení úlohy

$$(y')^2 = e^x y^2, \quad y(0) = 1.$$

Rozhodněte, zda řešení existuje na celém $\mathbb{R}$, či jen na okolí bodu $x = 0$, zda je řešení jediné.

[5] 4. Uvažujte funkce $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadané jako

$$f(x, y) := x^2 - y^2 + 2xy, \quad g(x, y) := x^2 + y^2.$$

Označme množinu K

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; g(x, y) \leq 1\}$$

Pokud existují, určete

$$m := \min_{(x, y) \in K} f(x, y) \quad \text{a} \quad M := \max_{(x, y) \in K} f(x, y).$$

[7] 5. Ověřte, že

$$\begin{cases} e^u \cos v = \frac{x}{\sqrt{2}}, \\ e^u \sin v = \frac{y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

definují na jistém okolí bodu $x = 1$, $y = 1$, $u = 0$, $v = \frac{\pi}{4}$ hladké funkce $u = u(x, y)$ a $v = v(x, y)$.

Spočtěte totální diferenciály $du(1, 1)$ a $dv(1, 1)$.