Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: ______________________ Cvičící: ______________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Body**
Maximum bodů	7	5	6	7	5	30
Získané body						

[7] 1. Uvažujte tenkou desku K popsanou jako

$$K := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0, \quad x^2 + 9y^2 \leq 9\right\}.$$

Plošná hustota této desky je $\varrho(x) := (1 + Ax)\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-2}$, kde $A > 0$ je parametr.

Určete hmotnost desky a polohu těžiště.

Řešení:

Množinu K můžeme ekvivalentně popsat jako

$$K := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in (0,3),\ -\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} < y < \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}\right\}.$$

Pokud označíme $f(x) := \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$, $g(x) := -\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$, tak můžeme použít vzorce pro výpočet hmotnosti M a těžiště $T = [T_x, T_y]$, kde

$$M = \int_0^3 \varrho(x)(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x,$$

$$T_x := \frac{\int_0^3 x\varrho(x)(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x}{M},$$

$$T_y := \frac{\frac{1}{2}\int_0^3 \varrho(x)(f^2(x) - g^2(x))\,\mathrm{d}x}{M}.$$

Poslední integrál je díky symetrii roven nule (což napovída i intuice a symetrie K). Dosazením za funkce f, g, ϱ pak získáme

$$M = \int_0^3 2(1 + Ax)\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}\,\mathrm{d}x,$$

$$T_x = \frac{\int_0^3 2(x + Ax^2)\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}\,\mathrm{d}x}{M},$$

$$T_y = 0.$$

Při výpočtu obou integrálů použijeme substituci $x = 3\sin t$, která prostě a na zobrazuje $(0, \frac{\pi}{2})$ na $(0,3)$. Navíc platí $\mathrm{d}x = 3\cos t\,\mathrm{d}t$. A máme tedy

$$M = \int_0^3 2(1 + Ax)\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}\,\mathrm{d}x = 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 3A\sin t)\sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\cos^2 t + 18A\sin t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos(2t) + 3 + 18A\sin t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{3\sin(2t)}{2} + 3t - 6A\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2} + 6A = \frac{3(\pi + 4A)}{2}.$$

Obdobně postupujem pro T_x

$$
\begin{aligned}
T_x &= \frac{\int_0^3 2(x+Ax^2)\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\,\mathrm{d}x}{M} = \frac{18}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t + 3A\sin^2 t)\cos^2 t\mathrm{d}t \\
&= \frac{18}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^2 t + 3A\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{18}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^2 t + \frac{3A}{4}\sin^2(2t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{18}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^2 t + \frac{3A}{8}(1-\cos(4t))\mathrm{d}t = \frac{18}{M}\left[-\frac{\cos^3 t}{3} + \frac{3At}{8} - \frac{3A}{32}\sin(4t))\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{18}{M}\left(\frac{1}{3} + \frac{3A\pi}{16}\right) = \frac{1}{\pi+4A}\left(4 + \frac{9A\pi}{4}\right).
\end{aligned}
$$

[5] 2. Buď $\alpha \in \mathbb{R}$. Uvažujte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^\alpha}.$$

Pro která α řada konverguje/diverguje?

Řešení:

Nejdříve můžeme ověřit nutnou podmínku konvergence. Standardním výpočtem získáme

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^\alpha} = e^{\lim_{n\to\infty} n^\alpha \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} n^\alpha \ln\left(1-\frac{2}{n+2}\right)}$$
$$= e^{-\lim_{n\to\infty} \frac{2n^\alpha}{n+2}} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \alpha > 1, \\ e^{-2} & \text{pro } \alpha = 1, \\ 1 & \text{pro } \alpha < 1. \end{cases}$$

Řada tedy určitě nekonverguje pro $\alpha \leq 1$. Pro $\alpha > 1$ můžeme zkusit odmocninové kritérium, které vede k podobné limitě jako výše.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^{\alpha-1}} = e^{\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1} \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)}$$
$$= e^{\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1} \ln\left(1-\frac{2}{n+2}\right)} = e^{-\lim_{n\to\infty} \frac{2n^{\alpha-1}}{n+2}} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \alpha > 2, \\ e^{-2} & \text{pro } \alpha = 2, \\ 1 & \text{pro } \alpha < 2. \end{cases}$$

Použitím odmocninového kritéria tedy vidíme, že řada konverguje pro $\alpha \geq 2$. Už víme, že řada nekonverguje pro $\alpha \leq 1$ a zbývá tedy vyřešit případ $\alpha \in (1,2)$. Zkusíme srovnávací kritérium a použijeme srovnání s řadou $\sum \frac{1}{n^2}$, která konverguje. Spočtěme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^\alpha}}{\frac{1}{n^2}} = e^{\lim_{n\to\infty}\left(n^\alpha \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)+2\ln n\right)}$$
$$= e^{-\lim_{n\to\infty} 2n^{\alpha-1}\left(\frac{n}{n+2}\frac{\ln\left(1-\frac{2}{n+2}\right)}{-\frac{2}{n+2}} - \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}\right)} = 0,$$

kde poslední limita je důsledkem faktu, že $\alpha > 1$. Můžeme tedy použít limitní srovnávací kritérium a získáme konvergenci pro $\alpha > 1$.

[6] 3. Nalezněte všechna řešení úlohy

$$y'' - 3y' + 2y = e^x, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

Řešení:

Nejprve vyřešíme příslušnou homogenní rovnici:

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Charakteristický polynom je tvaru $P(\lambda) := \lambda^2 - 3\lambda + 2$. Kořeny polynomu jsou $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 2$. Obecné řešení homogenní rovnice je tedy:

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Nyní najdeme partikulární řešení. Pravá strana má speciální tvar e^x, což je také řešení homogenní rovnice. Proto tedy hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = Axe^x.$$

Dosadíme do rovnice, abychom určili A. Pro derivace máme

$$y_p' = A(e^x + xe^x) = Ae^x(1+x), \quad y_p'' = A(e^x + e^x + xe^x) = Ae^x(2+x).$$

Potom tedy získáme

$$\begin{aligned} e^x &= y_p'' - 3y_p' + 2y_p = Ae^x(2+x) - 3Ae^x(1+x) + 2Axe^x \\ &= Ae^x\left((2+x) - 3(1+x) + 2x\right) = -Ae^x. \end{aligned}$$

A tedy $A = 1$ a partikulární řešení je

$$y_p(x) = -xe^x$$

a obecné řešení má tvar

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - xe^x.$$

Zbývá určit konstanty C_1 a C_2. Dosadíme počáteční podmínky. Nejdříve pro y

$$y(0) = C_1 + C_2 - 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 0.$$

a poté i pro derivaci

$$y'(x) = C_1e^x + 2C_2e^{2x} - (e^x + xe^x) \implies 0 = y'(0) = C_1 + 2C_2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + 2C_2 = 1.$$

Řešením soustavy je $C_1 = -1$ a $C_2 = 1$ a finální řešení má tedy tvar

$$\boxed{y(x) = -e^x + e^{2x} - xe^x}.$$

[7] 4. Uvažujte funkce $f, g_1, g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zadané jako

$$f(x,y,z) := xyz, \qquad g_1(x,y,z) := x+y+z-3, \qquad g_2(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-9$$

a množinu K definovanou jako

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ g_1(x,y,z) = 0,\ g_2(x,y,z) = 0\}.$$

Pokud existují, určete

$$m := \min_{(x,y,z)\in K} f(x,y,z) \qquad \text{a} \qquad M := \max_{(x,y,z)\in K} f(x,y,z).$$

Řešení:

Množina K je průnik sféry a roviny, což je kompaktní množina (neprázdná, neboť např. bod $(3,0,0) \in K$). Funkce f je spojitá a tedy musí na K nabývat minima i maxima. Body podezřelé z extrému najdeme pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů. Definujeme Lagrangeovu funkci

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) - \lambda_1 g_1(x,y,z) - \lambda_2 g_2(x,y,z).$$

Funkce f může nabývat extrémy pouze v bodech, kde je gradient Lagrangeovy funkce nulový nebo matice gradientů vazeb g_1 nebo g_2 nemá hodnost dva. Navíc musejí být splněny vazební podmínky. Pro gradienty vazeb máme

$$\nabla g_1 = (1,1,1) \qquad \text{a} \qquad \nabla g_2 = 2(x,y,z)$$

a tedy matice gradientů vazeb má tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2y \end{pmatrix}$$

která nemá hodnost dva pouze v bodech, kde $x = y = z$. Tyto body však nepatří do množiny K. Můžeme se tedy soustředit na nulové body gradientu $\mathcal{L}$, což společně s vazebními podmínkami vede k systému rovnic

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = yz - \lambda_1 - 2\lambda_2 x = 0 \tag{1}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = xz - \lambda_1 - 2\lambda_2 y = 0 \tag{2}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = xy - \lambda_1 - 2\lambda_2 z = 0 \tag{3}$$
$$x+y+z-3 = 0 \tag{4}$$
$$x^2+y^2+z^2-9 = 0 \tag{5}$$

Hledáme tedy $(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)$ splňující systém (1)–(5). Odečteme (2) od (1) a získáme

$$(y-x)(z+2\lambda_2) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y = x \text{ nebo } z = -2\lambda_2.$$

Analogicky odečtením (3) od (2) a odečtením (3) od (1)

$$
\begin{aligned}
(z-y)(x+2\lambda_2) &= 0 \quad \Longrightarrow \quad z = y \text{ nebo } x = -2\lambda_2 \\
(z-x)(y+2\lambda_2) &= 0 \quad \Longrightarrow \quad z = x \text{ nebo } y = -2\lambda_2
\end{aligned}
$$

Postupně budeme hledat řešení. Jako první se nabízí možnost $x = y = z$. Z (4)–(5) plyne

$$3x - 3 = 0, \qquad 3x^2 = 9.$$

Řešení tedy neexistuje a **případ** $x = y = z$ nelze uvažovat.

Předpokládejme $x = y \neq z$**:** Potom z rovnice (4) získáme $2x + z = 3 \implies z = 3 - 2x$. Dosazením do (5) dostaneme

$$
\begin{aligned}
x^2 + x^2 + (3-2x)^2 &= 9 \\
6x^2 - 12x &= 0
\end{aligned}
$$

Máme tedy dvě řešení $x = 0$ a $x = 2$. Zpětným dosazením do (1)–(5) obdržíme řešení:

$$
\begin{aligned}
&x = 0, \quad y = 0, \quad z = 3, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0 \\
&x = 2, \quad y = 2, \quad z = -1, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1
\end{aligned}
$$

a získáme podezřelé body $[0,0,3]$, $[2,2,-1]$. Díky symetrii lehce zjistíme, že ostatní body jsou $[0,3,0]$, $[2,-1,2]$, $[3,0,0]$, $[-1,2,2]$. Dosazením získáme funkční hodnoty

$$
\begin{aligned}
f(0,0,3) = f(3,0,0) = f(0,3,0) &= 0 \\
f(2,2,-1) = f(2,-1,2) = f(-1,2,2) &= -4.
\end{aligned}
$$

Minimum je tedy $m = -4$ a maximum $M = 0$. Obou hodnot se nabývá ve výše uvedených bodech.

[5] 5. Mějme dvě funkce čtyř proměnných:

$$F_1(x, y, u, v) = e^u + v^3 + 2x - y - 2, \qquad F_2(x, y, u, v) = \arctan u + vxy.$$

Dokažte, že vazby $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ jednoznačně definují hladké funkce $u(x, y)$, $v(x, y)$ definované v okolí bodu $(0, 0)$, které tyto rovnice implicitně splňují. Dále vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ v bodě $(0, 0)$.

Řešení:

Nejdříve určíme potenciální hodnoty $u(0, 0)$ a $v(0, 0)$. Dosazením do F_1 a F_2 získáme jediné řešení a to $u = 0$ a $v = 1$. Dále určíme Jacobiho matici derivací

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^u & 3v^2 \\ \frac{1}{1+u^2} & xy \end{pmatrix} \Bigg|_{(0,0,0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinant matice J splňuje

$$\det J = -3 \neq 0.$$

Díky tomu lze v okolí bodu $(0, 0)$ vyjádřit $u(x, y)$, $v(x, y)$ implicitně jako hladké funkce (protože F_1 i F_2 jsou hladké funkce).

Vyjádříme parciální derivace funkcí u a v bodě $(0, 0)$. Protože u a v splňují

$$e^{u(x,y)} + v^3(x, y) + 2x - y - 2 = 0, \qquad \arctan u(x, y) + xyv(x, y) = 0,$$

můžeme je zderivovat podle x a podle y a získáme

$$\begin{aligned} e^{u(x,y)} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + 3v^2(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + 2 &= 0, \\ \frac{1}{1 + u^2(x, y)} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + yv(x, y) + xy \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} &= 0, \\ e^{u(x,y)} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + 3v^2(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - 1 &= 0, \\ \frac{1}{1 + u^2(x, y)} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + xv(x, y) + xy \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Dosadíme bod $(0, 0)$ a zároveň i hodnoty $u(0, 0) = 0$ a $v(0, 0) = 1$ a získáme

$$\frac{\partial u(0, 0)}{\partial x} + 3 \frac{\partial v(0, 0)}{\partial x} + 2 = 0, \qquad \frac{\partial u(0, 0)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(0, 0)}{\partial y} + 3 \frac{\partial v(0, 0)}{\partial y} - 1 = 0, \qquad \frac{\partial u(0, 0)}{\partial y} = 0$$

Uvedené soustavy rovnic lze snado vyřešit a řešením je

$$\frac{\partial u(0, 0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(0, 0)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v(0, 0)}{\partial x} = -\frac{2}{3}, \quad \frac{\partial v(0, 0)}{\partial y} = \frac{1}{3}.$$