Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: ________________ Cvičící: ________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Body**
Maximum bodů	4	7	8	5	6	30
Získané body						

[4] 1. Spočtěte délku astroidy, tj. křivky, která je popsaná jako

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1\right\}.$$

Můžete uvažovat parametrizaci

$$x(t) = \sin^3 t, \quad y(t) = \cos^3 t, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Řešení:

Díky symetrii, stačí spočítat délku křivky

$$x(t) = \sin^3 t, \quad y(t) = \cos^3 t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Výsledná délka je pak čtyřnásobek.

Použijeme vzorec pro délku křivky a získáme:

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt.$$

Spočteme derivace:

$$x'(t) = 3\sin^2 t\cos t, \qquad y'(t) = -3\cos^2 t \sin t.$$

Dosadíme:

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(3\sin^2 t\cos t)^2 + (-3\cos^2 t\sin t)^2}\, dt = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t\cos^2 t(\sin^2 t + \cos^2 t)}\, dt$$

$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\, dt = 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)'\, dt = \left[6\sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6.$$

Délka křivky je $L = 6$.

[7] 2. Řešte úlohu

$$y'\left(\frac{1}{\cos^2 y} + 3y^2x^2\right) + 2x(y^3+1) = 0,$$
$$y(0) = 0.$$

Rozhodněte, zda řešení existuje na celém $\mathbb{R}$, či jen na okolí bodu $x = 0$, a zda je nalezené řešení jediné. Řešení stačí uvést v implicitní formě.

Nápověda: Zkuste hledat řešení ve tvaru totálního diferenciálu.

Řešení:

Označme

$$M(x,y) := \left(\frac{1}{\cos^2 y} + 3y^2x^2\right),$$
$$N(x,y) := 2x(y^3+1).$$

Můžeme zkusit napřímo řešit úlohu jako problém ve tvaru totálního diferenciálu. Tzn. pokusit se najít $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ splňující

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = M, \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = N(x,y).$$

Aby takový potenciál existoval musí platit $\partial_x M = \partial_y N$. Výpočtem zjistíme

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial x} = 6xy^2, \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial y} = 6xy^2.$$

Potřebná rovnost tedy platí a pokusíme se najít potenciál. Nejdříve můžeme vyintegrovat N podle x. Máme

$$F(x,y) = \int N(x,y)\,\mathrm{d}x + C(y) = \int 2x(y^3+1)\,\mathrm{d}x + C(y) = x^2(y^3+1) + C(y).$$

Nyní zderivujeme podle y abychom získali podmínku na C.

$$\left(\frac{1}{\cos^2 y} + 3y^2x^2\right) = M(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 3x^2y^2 + C'(y).$$

Dostáváme tedy rovnici

$$C'(y) = \frac{1}{\cos^2 y} \implies C(y) = \tan y + K.$$

Protože výsledný potenciál musí být definován na okolí bodu $(x,y) = (0,0)$ je tedy tvaru

$$F(x,y) = x^2(y^3+1) + \tan y + K.$$

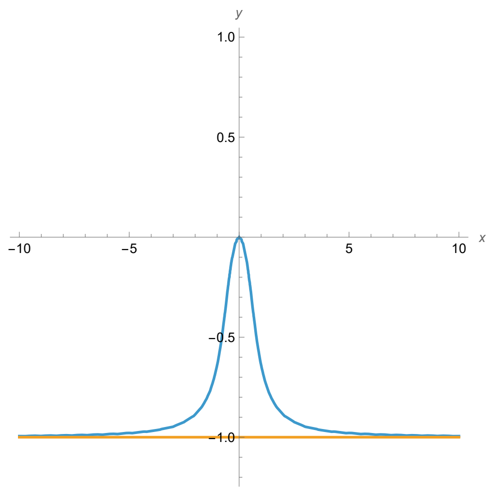
Aby platilo, že $F(0,0) = 0$ volíme $K = 0$. Protože $M(0,0) = 1 \neq 0$, víme, že uvedený potenciál nám dává implicitní řešení původní úlohy na okolí $U(0)$ a to ve formě

$$x^2(y^3+1) + \tan y = 0. \tag{$\mathcal{E}$}$$

Řešení je ale jednoznačně definované na celém $\mathbb{R}$. Nejdříve je z rovnice zřejmé, že je ve tvaru

$$y' = \mathcal{F}(x, y)$$

kde $\mathcal{F}$ má spojité derivace v každém bodě. Každým bodem (x_0, y_0) tedy prochází právě jedno řešení. Fakt, že naše řešení je definované na celém $\mathbb{R}$ plyne z $(\mathcal{E})$. Funkce y musí být nutně záporná. A $y \neq -1$ pro každé x (jinak by nastal spor) a tedy víme, že $y(x) \in (-1, 0]$ a funkce je definovaná na celém $\mathbb{R}$.



Obrázek 1: Graf funkce y

[8] 3. Buď $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Uvažujte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)^{\alpha} \ln^{\beta}(n).$$

Pro která (α, β) řada konverguje, konverguje absolutně, nekonverguje?

Řešení:

Označme $a_n := \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)^{\alpha} \ln^{\beta} n$ a vyšetřujeme tedy řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. Snadným výpočtem můžeme upravit a získáme

$$a_n = \frac{2^{\alpha} \ln^{\beta} n}{\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right)^{\alpha}}$$

Aby řada mohla konvergovat, musí být splněna nutná podmínka konvergence, což je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Ta je splňena v případě kdy $\alpha > 0$ a β libovolné, nebo v případě kdy $\alpha = 0$ a $\beta < 0$. V opačných případech tedy řada nekoverguje.

Dále budeme zkoumat absolutní konvergenci. Definujme $b_n := n^{-\frac{\alpha}{2}} \ln^{\beta} n$ pro $n \geq 2$. Jednoduchý výpočet dává

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Z limitního srovnávacího kritéria tedy získáme, že řada $\sum a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum b_n$. Druhá řada pak patří ke standardním a víme, že konverguje právě tehdy, když

$$\boxed{\alpha > 2,\ \beta \in \mathbb{R}} \qquad \text{nebo } \boxed{\alpha = 2,\ \beta < -1},$$

což jsou také podmínky pro absolutní konvergneci původní řady.

Konečně budeme zkoumat konvergenci neabsolutní a zbývá vyřešit případ kdy $\alpha \in (0, 2]$ a $\beta \in \mathbb{R}$ nebo $\alpha = 0$ a $\beta < 0$. Vtěchto případech víme, že $a_n \to 0$. Pokud navíc ukážeme, že od jistého n_0 jde o konvergenci monotónní, pak můžeme použít Leibnitzova kritéria a získat neabsolutní konvergenci. K tomu stačí ukázat, že funkce

$$f(x) := \frac{\ln^{\beta} x}{\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x}\right)^{\alpha}}$$

je nerostoucí na nějakém intervalu (x_0, ∞), popř. ukázat, že $f'(x) \leq 0$ na tom samém intervalu. Jednoduchý výpočet dává

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\ln^{\beta-1} x}{2x\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x}\right)^{\alpha}} \left(2\beta - \frac{\alpha x \ln x}{\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x}\right)} \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) \\
&\leq \frac{\ln^{\beta-1} x}{2x\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x}\right)^{\alpha}} \left(2\beta - \frac{\alpha x \ln x}{\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2}\right)} \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)\right) \\
&= \frac{\ln^{\beta-1} x}{2x\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x}\right)^{\alpha}} \left(2\beta - \frac{\alpha x \ln x}{x+2}\right).
\end{aligned}$$

Z posledního členu je vidět, že pro $\alpha = 0$ je funkce klesající pro $\beta < 0$. Pro $\alpha > 0$, je pak vidět, že určitě existuje $x_0 > 0$ (v závislosti na α, β) takový, že pro každé $x > x_0$

$$\left(2\beta - \alpha \ln x \frac{x}{x+2}\right) \leq 0.$$

Funkce f je tedy nerostoucí od x_0 a důkaz je hotov.

[5] 4. Uvažujte funkci

$$f(x,y) := (x^2 - y^4)e^{-x^2-y^2}$$

definovanou na $\mathbb{R}^2$. Najděte všechny lokální i globální extrémy.

Řešení:

Funkce f je hladká. Navíc je evidentně platí, že

$$\lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y) = 0.$$

Navíc funkce mění v okolí bodu $(0,0)$ znaménko. Bude tedy mít globální extrémy.

Spočtěme nejdříve první a druhé derivace:

Parciální derivace prvního řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{-x^2-y^2}(1 - x^2 + y^4)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{-x^2-y^2}(x^2 - y^4 + 2y^2)$$

Druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\left(1 - 5x^2 + y^4 + 2x^4 - 2x^2y^4\right)e^{-x^2-y^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2\left(x^2 + 6y^2 - 9y^4 - 2x^2y^2 + 2y^6\right)e^{-x^2-y^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy\left(-1 + x^2 + 2y^2 - y^4\right)e^{-x^2-y^2}.$$

Nyní nalezneme body podezřelé z extrému. Položíme tedy parciální derivace rovny nule. Protože exponenciála je vždy kladná, potřebujeme najít body (x,y) tak, aby

$$x(1 - x^2 + y^4) = 0 \implies x = 0 \text{ nebo } 1 - x^2 + y^4 = 0$$
$$y(x^2 - y^4 + 2y^2) = 0 \implies y = 0 \text{ nebo } x^2 - y^4 + 2y^2 = 0$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme stacionární body: $(0,0)$, $(0,\sqrt{2})$, $(0,-\sqrt{2})$, $(1,0)$, $(-1,0)$. Dosazením do funkce f získáme

$$f(0,0) = 0, \quad f(0,\pm\sqrt{2}) = -4e^{-2}, \quad f(\pm 1, 0) = e^{-1}.$$

V bodech $(\pm 1, 0)$ má tedy funkce globální maximum. V bodech $(0,\pm\sqrt{2})$ má funkce globální minimum. Zbývá ještě diskutovat bod $(0,0)$. Pokud vyčíslíme Hessovu matici, získáme

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

což je matice pozitivně semidefinitní a tedy o extrému takto nelze rozhodnout. Nicméně je snadné ověřit, že pro každé $x, y \neq 0$ platí

$$f(0,y) < 0 = f(0,0) = 0 < f(x,0)$$

a bod $(0,0)$ tedy nemůže být bodem lokálního minima.

[6] 5. Buď $\alpha \in \mathbb{R}$ a uvažujte funkci $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x,y,z) := \begin{cases} (x^2+y^4+z^6)^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\right) & \text{pro } (x,y,z) \neq (0,0,0). \\ 0 & \text{pro } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Určete, pro která α platí jednotlivá tvrzení:

- f je spojitá na $\mathbb{R}^3$
- f má v každém bodě první parciální derivace
- $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$
- f má v každém bodě totální diferenciál

Řešení:

Funkce f je evidentně hladká na celém $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$ pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$. Stačí tedy diskutovat její chování na okolí počátku.

Nejdříve ověříme spojitost. Evidentně pro $\alpha \leq 0$ neexistuje

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z).$$

Na druhou stranu pro $\alpha > 0$ a pro $(x,y,z) \in B_1(0)$ platí

$$|f(x,y,z)| \leq (x^2+y^2+z^2)^\alpha \to 0 \qquad \text{pro} \qquad (x,y,z) \to 0.$$

Pro $\alpha > 0$ je tedy funkce spojitá.

Nyní se budeme věnovat parciálním derivacím v mimo bod $(0,0,0)$. Získáváme

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2\alpha x(x^2+y^4+z^6)^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right) - \frac{2x(x^2+y^4+z^6)^\alpha \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 4\alpha y^3(x^2+y^4+z^6)^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right) - \frac{2y(x^2+y^4+z^6)^\alpha \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 6\alpha z^5(x^2+y^4+z^6)^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right) - \frac{2z(x^2+y^4+z^6)^\alpha \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

Ještě vyčíslíme derivace v bodě $(0,0,0)$. Z definice získáme

$$\frac{\partial f(0,0,0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0,0)-f(0,0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2)^\alpha \sin(1/x^2)}{x} = 0 \text{ pokud } \alpha > \frac{1}{2},$$
$$\frac{\partial f(0,0,0)}{\partial y} = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y,0)-f(0,0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{(y^4)^\alpha \sin(1/y^2)}{y} = 0 \text{ pokud } \alpha > \frac{1}{4},$$
$$\frac{\partial f(0,0,0)}{\partial z} = \lim_{z\to 0} \frac{f(0,0,z)-f(0,0,0)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{(z^6)^\alpha \sin(1/x^2)}{z} = 0 \text{ pokud } \alpha > \frac{1}{6}.$$

Funkce f má tedy derivaci v každém bodě pouze pokud $\alpha > \frac{1}{2}$.

Pokud budeme zkoumat spojitost derivací, tak potřebujeme najít α taková, aby platilo

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 0.$$

Snadným výpočtem lze zjistit, že tyto limity platí pouze pokud $\alpha > \frac{3}{2}$. Pro tato α je tedy funkce $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$.

Nakonec diskutujeme existenci tottálního diferenciálu. Mimo bod $(0,0,0)$ existuje díky spojitosti parciálních derivací. Pokud $\alpha > \frac{3}{2}$ jsou parcilní derivace spojité i v bodě $(0,0,0)$ a tedy existuje i totální diferenciál. Ukážeme ale, že totální diferenciál existuje v bodě $(0,0,0)$ i pokud $\alpha > \frac{1}{2}$. Protože parciální derivace v $(0,0,0)$ jsou nulové, i totální diferenciál L, pokud existuje, musí být nulový. Potřebujeme tedy ověřit, zda

$$0 = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x,y,z) - f(0,0,0) - L(x,y,z)}{|(x,y,z)|} = \lim_{(x,y,z)\to 0} \frac{(x^2+y^4+z^6)^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Jednoduchým odhadem máme pro každý $(x,y,z) \in B_1(0)$

$$\left|\frac{(x^2+y^4+z^6)^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right| \le \frac{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \to 0 \qquad \text{pokud } \alpha > \frac{1}{2}$$

a důkaz je hotov.