Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: ______________________ Cvičící: ______________________

Příklad	1	2	3	4	**Body**
Maximum bodů	5	5	10	10	30
Získané body					

[5] 1. Najdětě všechna $a \in \mathbb{R}$, pro která platí, že

$$2 < \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cos^2 \frac{1}{n}}{\cos \frac{2}{n}} \right)^{n^a} < 3.$$

Řešení:

V zadání úlohy je implicitně předpokládíno, že limita existuje a také, že splňuje dvě nerovnosti. Protože exponenciála je spojitá funkce, víme, že můžeme použít větu o substituci a dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cos^2 \frac{1}{n}}{\cos \frac{2}{n}} \right)^{n^a} = e^{\lim_{n\to\infty} n^a \ln\left(\frac{\cos^2 \frac{1}{n}}{\cos \frac{2}{n}} \right)}.$$

Pokud označíme

$$L := \lim_{n\to\infty} n^a \ln \left(\frac{\cos^2 \frac{1}{n}}{\cos \frac{2}{n}} \right)$$

a předpokládáme, že limita existuje, zadání úlohy pak bude vyžadovat, aby platilo

$$\ln 2 < L < \ln 3. \tag{1}$$

Po standardní úpravě dostaneme, že

$$L = \lim_{n\to\infty} n^a \ln \left(\frac{\cos^2 \frac{1}{n}}{\cos \frac{2}{n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left[n^a \left(\frac{\cos^2 \frac{1}{n}}{\cos \frac{2}{n}} - 1 \right) \frac{\ln\left(1 + \left(\frac{\cos^2 \frac{1}{n}}{\cos \frac{2}{n}} - 1\right)\right)}{\left(\frac{\cos^2 \frac{1}{n}}{\cos \frac{2}{n}} - 1\right)} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^a \left(\frac{\cos^2 \frac{1}{n}}{\cos \frac{2}{n}} - 1 \right) \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \left(\frac{\cos^2 \frac{1}{n}}{\cos \frac{2}{n}} - 1\right)\right)}{\left(\frac{\cos^2 \frac{1}{n}}{\cos \frac{2}{n}} - 1\right)} = \lim_{n\to\infty} n^a \left(\frac{\cos^2 \frac{1}{n}}{\cos \frac{2}{n}} - 1 \right),$$

kde jsme vyulžili větu o limitě součinu, větu o substituci a znalost limity

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

Pomocí věty o limitě součinu a věty o limitě složené funkce a za použití limity $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ dostáváme

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{n^a \left(\cos^2 \frac{1}{n} - \cos \frac{2}{n}\right)}{\cos \frac{2}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} n^a \left(\cos^2 \frac{1}{n} - \cos \frac{2}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty} \cos \frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty} n^a \left(\cos^2 \frac{1}{n} - \cos \frac{2}{n} \right).$$

Požitím vzorce pro cosinus $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$, zjistíme, že

$$\cos^2 \frac{1}{n} - \cos \frac{2}{n} = \cos^2 \frac{1}{n} - \cos^2 \frac{1}{n} + \sin^2 \frac{1}{n} = \sin^2 \frac{1}{n}$$

a tedy

$$L = \lim_{n\to\infty} n^a \left(\cos^2 \frac{1}{n} - \cos \frac{2}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} n^a \sin^2 \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{n^2} \frac{\sin^2 \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{n^2} = \begin{cases} \infty & \text{pro } a > 2, \\ 1 & \text{pro } a = 2, \\ 0 & \text{pro } a < 2, \end{cases}$$

kde jsem opět použili věty o limitě součinu, složené funkce a znalost limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Konečně, protože víme, že $0 < \ln 2 < 1$ a $1 < \ln 3 < \infty$, jediné možné a, které splňuje zadání úlohy je

$$\boxed{\mathbf{a = 2}}.$$

[5] 2. Buď $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ a buď funkce f definovaná na $\mathbb{R}$ jako

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ Ax^3 + Bx^2 + Cx + D & \text{pro} x \in [0,1], \\ 2x & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$

Určete postupě všechna A, B, C, D pro která

a) existuje Riemanův integrál
$$\int_{-2}^{2} f(x)\, dx;$$

b) je funkce f spojitá na $\mathbb{R}$;

c) je funkce f konvexní na $\mathbb{R}$;

d) je funkce f spojitě diferencovatelná na $\mathbb{R}$;

e) existuje druhá derivace f na $\mathbb{R}$.

Řešení:

a) Riemanův integrál na omezeném intervalu existuje po částech spojité funkce (funkce, které jsou spojité až na konečný počet bodů, které mají jednostranné limity v každém bodě). Bez ohledu na volbu A, B, C, D bude funkce f po částech spojitá a Riemanův integrál bude existovat.

b), d), e) Funkce f je nekonečně diferencovatelná na $(-\infty, 0)$, na $(0,1)$ a na $(1, \infty)$. K ověření spojitosti stačí ověřit, že jednostranné limity vodech 0 a 1 jso stejné. Obdobně k ověření existencí první derivace stačí to samé ověřit pro f' a konečně k existenci druhých derivací stačí ověřit rovnost jednostranných limit pro f''. Spočteme tedy nejprve limity pro f:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0_-} f(x) &= \lim_{x\to 0_-} 0 = 0, \\
\lim_{x\to 0_+} f(x) &= \lim_{x\to 0_+} Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = D, \\
\lim_{x\to 1_+} f(x) &= \lim_{x\to 1_+} 2x = 2, \\
\lim_{x\to 1_-} f(x) &= \lim_{x\to 1_-} Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = A + B + C + D.
\end{aligned}$$

Porovnáním limit v bodech 0 a 1 tedy zjistíme, že aby funkce byla spojitá, musí platit:

$$\boxed{D = 0} \qquad \boxed{A + B + C = 2.}$$

Pro ověření existence a spojitosti f' spočteme následující jednostranné limity:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0_-} f'(x) &= \lim_{x\to 0_-} 0 = 0, \\
\lim_{x\to 0_+} f'(x) &= \lim_{x\to 0_+} 3Ax^2 + 2Bx + C = C, \\
\lim_{x\to 1_+} f'(x) &= \lim_{x\to 1_+} 2 = 2, \\
\lim_{x\to 1_-} f'(x) &= \lim_{x\to 1_-} 3Ax^2 + 2Bx + C = 3A + 2B + C.
\end{aligned}$$

Aby tedy byla f' spojitá na $(0,\infty)$ musí být funkce spojitá a tedy z prvního kroku máme

$$\boxed{D=0} \qquad \boxed{A+B+C=2.}$$

Navíc nyní ale musíme požadovat aby

$$\boxed{C=0} \qquad \boxed{3A+2B+C=2.}$$

Tyto čtyři podmínky dávají následující omezení pro spojitost f' na $(-\infty,\infty)$:

$$\boxed{D=0} \qquad \boxed{C=0} \qquad \boxed{B=4} \qquad \boxed{A=-2}.$$

Konečně se budeme věnovat spojitosti druhých derivací. Aby vůbec existovaly, musí platit výše uvedené rovnosti. Aby byly spojité druhé derivace v bodě 0, musí nutně být stejné následující jednostranné limity:

$$\lim_{x\to 0_-} f''(x) = \lim_{x\to 0_-} 0 = 0,$$
$$\lim_{x\to 0_+} f''(x) = \lim_{x\to 0_+} 6Ax+2B = 2B = 8,$$

kde poslední rovnost platí díky omezení na B z předchozího kroku. Zřejmě $0 \neq 8$ a funkce f nemá druhou derivaci na $(-\infty,\infty)$ pro žádnou volbu A, B, C, D.

c) Aby funkce f byla konvexní, musí být nutně spojitá (a tedy $\boxed{D=0}$ a $\boxed{A+B+C=2}$) a musí být nutně konvexní na každém intervalu. A tedy na každém intervalu, kde existuje f'' musí platit $f'' \geq 0$. Protože

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0), \\ 6Ax+2B & \text{pro } x \in (0,1), \\ 0 & \text{pro } x \in (1,\infty). \end{cases}$$

Na intervalech $(-\infty,0)$ a $(1,\infty)$ je funkce evidentně konvexní. Aby byla konvexní i na $(0,1)$ musí platit $6A+2B \geq 0$ pro $x \in (0,1)$, což je ekvivalentní podmínkám

$$\boxed{B \geq 0} \qquad \boxed{3A+B \geq 0.} \tag{2}$$

Toto jsou podmínky na jednotlivých intervalech. Aby byla funkce konvexní na celém $(-\infty,\infty)$ musí k výše uvedenému splňovat

$$\lim_{x\to 0_-} f'(x) \leq \lim_{x\to 0_+} f'(x),$$
$$\lim_{x\to 1_-} f'(x) \leq \lim_{x\to 1_+} f'(x).$$

Výše uvedené nerovnosti jsou v našem případě ekvivalentní (využitím $C = 2 - A - B$)

$$\begin{aligned} 0 \leq C &\implies A+B \leq 2, \\ 3A+2B+C \leq 2 &\implies 2A+B \leq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Kombinací (2) a (3) získáme

$$\left.\begin{aligned} 2A+B \leq 0 \\ 3A+B \geq 0 \end{aligned}\right\} \implies A \geq 0, \quad B \leq 0 \overset{(2)}{\implies} B = 0 \overset{(3)}{\implies} A = 0 \implies C = 2.$$

Vidímíme, že jediná možnost, jak zvolit funkci f na $(0,1)$ tak, aby byla konvexní, je

$$f(x) = 2x.$$

c) Důkaz lze vést i jinak a to přímo z definice konvexity. Pro $\lambda \in (0,1)$ musí platit

$$f(\lambda) = f(0 \cdot (1-\lambda) + 1 \cdot \lambda) \leq (1-\lambda)f(0) + \lambda f(1) = 2\lambda.$$

a tedy $f(x) \leq 2x$ pro $x \in (0,1)$. Předpokládejme nyní, že existuje $y \in (0,1)$ takové, že $f(y) < 2y$. Definujme

$$z := 2 - y > 1$$

a z předpokladu konvexity a faktu, že $f(z) = 2z$, dostaneme

$$2 = f(1) = f(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z) \leq \frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(z) = \frac{1}{2}f(y) + z < y + z = 2.$$

Dostáváme tedy spor $2 < 2$. Nutně tedy $f(x) = 2x$ na $(0,1)$.

[10] 3. Na intervalu $(0, 3\pi)$ najděte primitivní funkci

$$\int \frac{\sin x + 1}{2 + \cos x}\, dx$$

Řešení:

Vidíme, že integrand je spojitá funkce a tedy na celém intervalu bude existovat primitivní funkce. Intergál rozdělíme na dvě části

$$I = \int \frac{\sin x + 1}{2 + \cos x}\, dx = \int \frac{\sin x}{2 + \cos x}\, dx + \int \frac{1}{2 + \cos x}\, dx =: I_1 + I_2.$$

Pro intgrál I_1 použijeme substituci $y = \cos x$ a $dy = -\sin x dx$ a máme

$$I_1 = -\int \frac{-\sin x\, dx}{2 + \cos x} = -\int \frac{dy}{2 + y} = -\ln|2 + y| + C = -\ln(2 + \cos x) + C$$

Pro intgrál I_2 použijeme standardní substituci

$$y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad \cos x = \frac{1 - y^2}{y^2 + 1}, \quad dx = \frac{2\, dy}{y^2 + 1},$$

kterou můžeme použít postupně na intervalech $(0, \pi)$ a $(\pi, 3\pi)$. Dostaneme

$$I_2 = \int \frac{1}{2 + \cos x}\, dx \overset{y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{=} \int \frac{2\, dy}{(y^2 + 1)\left(2 + \frac{1-y^2}{y^2+1}\right)} = \int \frac{2\, dy}{y^2 + 3} = \frac{2}{3}\int \frac{dy}{\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$$

$$\overset{z=y/\sqrt{3},\ dy=\sqrt{3}dz}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} z = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

I_2 je určeno až na konstantu, navíc je výpočet platný pouye na intervalech $(0, \pi)$ a $(\pi, 3\pi)$. Funkci je tedy nunté vhodně nalepit. Uvažujme tedy

$$I_2(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) & x \in (0, \pi), \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + K & x \in (\pi, 3\pi). \end{cases}$$

Je potřeba zvolit K tak, aby $\lim_{x\to\pi_-} I_2(x) = \lim_{x\to\pi_+} I_2(x)$. Protože

$$\lim_{x\to\pi_-} I_2(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \qquad \lim_{x\to\pi_+} I_2(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + K,$$

viíme, že $K = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Výsledná primitivní funkce tedy je

$$I(x) = -\ln(2 + \cos x) + C + \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) & x \in (0, \pi), \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} & x \in (\pi, 3\pi), \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} & x = \pi. \end{cases}$$

[10] 4. Vyšetřete průběh funkce (definiční obor D_f, intervaly spojitosti, limity v krajních bodech D_f, průsečíky s osami, intervaly monotónie, lokální a globální extrémy, obor hodnot f, limity derivací v krajních bodech D_f, intervaly konvexity/konkávity funkce f, inflexní body, asymptoty, detailní graf)

$$f(x) := \ln|x^2 - 3x + 2|.$$

Řešení:

Definiční obor logaritmu jsou kladná čísla, stačí tedy ověřit, aby platilo

$$|x^2 - 3x + 2| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 1,\ x \neq 2.$$

Máme tedy $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. Logartimus, polynom i absolutní hodnota jsou spojité funkce, proto dostáváme, že $f \in \mathcal{C}(D_f)$. Pro limity v krajních bodech definičního oboru dostáváme dle věty o liitě složené funkce

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{y\to\infty} \ln y = \infty,\\
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{y\to 0_+} \ln y = -\infty,\\
\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{y\to 0_+} \ln y = -\infty.
\end{aligned}$$

Ihned vidíme, že funkce nemá globální extrém.

Spočteme první a druhou derivaci funkce f na D_f:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x-3}{x^2-3x+2} = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)},\\
f''(x) &= \frac{2(x^2-3x+2) - (2x-3)^2}{(x^2-3x+2)^2} = -\frac{(2x-3)^2+1}{2(x^2-3x+2)^2}
\end{aligned}$$

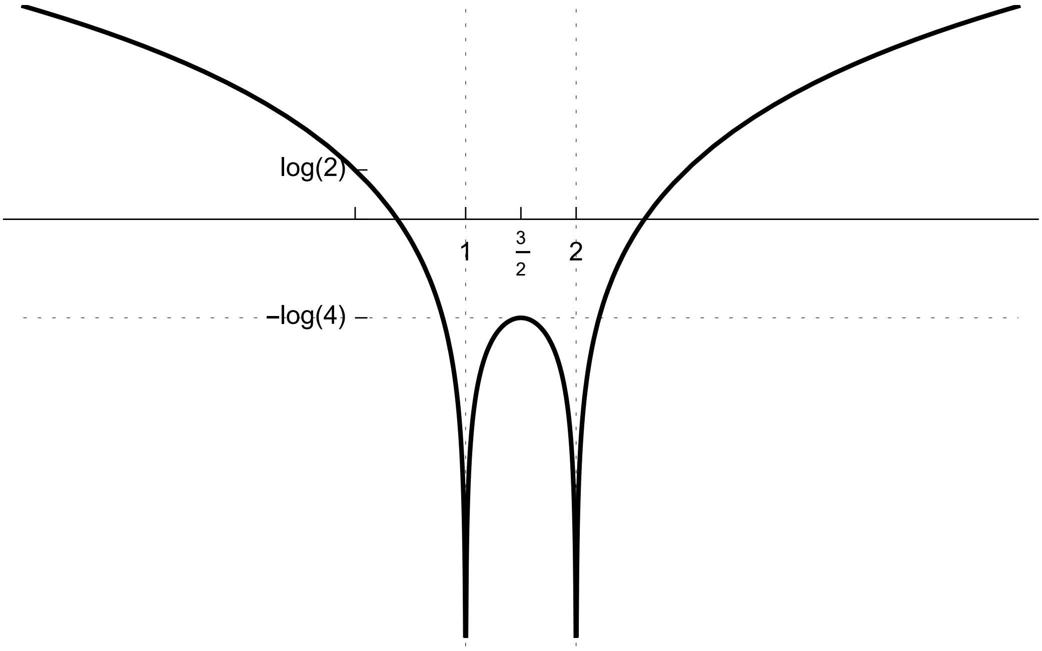
Vidíme, že

$$\begin{aligned}
&f'(x) < 0 \text{ na } (-\infty, 1) \cup (\frac{3}{2}, 2),\\
&f'(x) > 0 \text{ na } (1, \frac{3}{2}) \cup (2, \infty),\\
&f'(x) = 0 \text{ pro } x = \frac{3}{2},\\
&f''(x) < 0 \text{ na } (-\infty, 1) \cup (1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, 2) \cup (2, \infty).
\end{aligned}$$

Funkce je tedy rostoucí na intervalech $(1, \frac{3}{2})$ a $(2, \infty)$, klesající na intervalech $(-\infty, 1)$ a $(\frac{3}{2}, 2)$. Na každém z intervalů je konkávní (pozor není konkávní na celém D_f!). V bodě $x = \frac{3}{2}$ má funkce lokální maximum a to $f(3/2) = -\ln 4$. Nyní už je také zřejmé, že obor hodnot $H_f = \mathbb{R}$. K pečlivému nákresu obrázku ještě spočítáme limity derivací v krajních bodech definičního oboru

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) &= 0,\\
\lim_{x\to 1_-} f'(x) &= -\infty,\\
\lim_{x\to 1_+} f'(x) &= \infty,\\
\lim_{x\to 2_-} f'(x) &= -\infty,\\
\lim_{x\to 2_+} f'(x) &= \infty.
\end{aligned}$$

V $\pm\infty$ funkce nemá asymptoty a v bodech 1 a 2 jsou asymptoty přímky dané jako $x = 1$ a $x = 2$. Inflexní body funkce nemá. Průsečík s osou y je bod $f(0) = \ln 2$. Průsečíky s osou x zjistíme vyřešením úlohy $0 = f(x)$, což má dvě řešení $x = (3 \pm \sqrt{5})/2$.



Obrázek 1: Graf funkce f