NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

Opakování teoretické časti

Teoretické cvičenie #5 | Zimní semestr 2025/2026

Posledné teoretické cvičenie pred prvou zápočtovou prácou je určené k opakovaniu teórie z prvých štyroch cvičeni a k diskutovaniu správneho riešenia niektorých úloh zo série príkladov označených v zadaniach písmenom "B". Nižšie je uvedených niekoľko vybraných príkladov s podrobným riešením. Na záver je (bez explicitného riešenia) niekoľko vzorových príkladov z písomných zápočtových prác z minulých rokov. Tieto príklady slúžia k samostatnému precvičovaniu a tiež k ilustrácii konkrétnych problémov, ktoré lze očekávat na zápočtovej práci.

Vybrané príklady zo série úloh `B` s riešením

A1. *[Séria 1, Príklad B3]*
Pre nezávislé náhodné veličiny X, Y s exponenciálnym rozdelením $Exp(\lambda)$ uvažujte náhodnú veličinu U definovanú nižšie a nájdite jej hustotu.

$$U = \frac{min(X,Y)}{max(X,Y)}$$

A2. *[Séria 1, Príklad B10]*
Pre náhodný výber $X_1, \ldots, X_n$ z rovnomerného rozdelenia na intervale $(0, \theta)$ pre $\theta > 0$ chceme ukázať, že náhodná veličina $Z_n = n(1 - W_n/\theta)$ konverguje v distribúcii ku Gamma rozdeleniu, kde $W_n = X_{(n)} - X_{(1)}$ je rozpätie náhodného výberu, teda maximum mínus minimum.

A3. *[Séria 3, Príklad B6]*
Pre náhodný výber $X_1, \ldots, X_n$ z rovnomerného rozdelenia na intervale $(0, \theta_X)$, pre $\theta_X > 0$, je potrebné zostrojiť presný interval spoľahlivosti pre výberový medián, definovaný ako $\widehat{m}_X = X_{(k+1)}$, pričom platí, že $n = 2k + 1$, pre $n \in \mathbb{N}$.

A4. *[Séria 3, Príklad B7]*
Pre náhodný výber $X_1, \ldots, X_n$ z Poissonovho rozdelenia s parametrom $\lambda > 0$ sestrojte pomoci CLV přibližný interval spolehlivosti pro $\lambda > 0$. Pomoci CLV sestrojte také přibližný interval spolehlivosti pro parameter $\sqrt{\lambda}$ a tento interval využijte pro odvození přibližného intervalu spolehlivosti pro $\lambda > 0$.

A5. *[Séria 3, Príklad B10]*
Pomocou náhodného výberu $X_1, \ldots, X_n$ z rozdelenia daného hustotou $f(x, \theta) = \theta x^{\theta - 1}$ pre $x \in (0, 1)$ je potrebné zostrojiť presný interval spoľahlivosti a pomocou CLV aj približný interval spoľahlivosti pre $\theta > 0$ (a nejaké vhodné $\alpha \in (0, 1)$).

Ilustračné príklady k zápočtovej práci (bez riešenia)

B1. *[Vzorový príklad k zápočtovej práci #1]*

Uvažujte náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z exponenciálního rozdělení s parametrem $\lambda = 1$ a na něm jiný nezávislý náhodný výber $Y_1, \ldots, Y_n$ z rovnoměrného rozdelení na intervalu $(0, 1)$.

(a) Nájděte združené rozdělení náhodého vektoru $(X_{(1)}, X_{(n)})^\top$, kde $X_{(1)}$ je první a $X_{(n)}$ je n-tá pořádková statistika v uspořádanem náhodnem výberu $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$.

(b) Uvažujte transformaci $Z_i = -\log Y_i$ a nájděte rozdělení náhodné veličiny Z_i.

(c) Ukážte, že rozdělení k-té pořadkové statistiky $X_{(k)}$ je stejné, jako rozdělení $(n-k+1)$-ní pořádkové statistiky $Z_{(n-k+1)} := -\log Y_{(n-k+1)}$.

(d) Nájděte združené rozdělení náhodého vektoru $(X_{(k)}, Z_{(n-k+1)})^\top$.

B2. *[Vzorový príklad k zápočtovej práci #2]* Uvažujte náhodný výběr $Y_1, \ldots, Y_n$ z rovnoměrného rozdělení na intervalu $I \equiv (1, \theta) \subset \mathbb{R}$, kde $\theta > 1$ je neznámy parameter.

(a) Najděte odhad $\widehat{\theta}_{MM}$ parametru θ pomocou momentové metody. Vyšetřete jeho nestrannost a konzistenci.

(b) Nájděte asymptotické rozdělení odhadu $\widehat{\theta}_{MM}$ a pomoci transformace $g(\theta) = \log(\theta - 1)$ sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro neznámy parameter $\theta > 1$.

(c) Najděte odhad $\widehat{\theta}_{ML}$ neznámeho parametru θ pomocou metody maximální věrohodnosti a určete jeho rozdělení.

(d) Modifikujte odhad $\widehat{\theta}_{ML}$ z předchozího kroku tak, aby byl nestranný.

(e) Uvažujte transformaci $t:\ X_i = -\log\left(\frac{Y_i - 1}{\theta - 1}\right)$ a odvoďte rozdelení náhodné veličiny X_i pro $i \in \{1, \ldots, n\}$. Spočtěte střední hodnotu a rozptyl X_i.

(f) Pomoci centrální limitní věty spočtěte přibližně pravděpodobnost náhodného javu, který je definovaný jako $[W_n \geq n]$, kde $W_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

(g) Spočtěte přesne pravděpodobnost náhodného javu $[W_n \geq n]$, kde $W_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

(h) Nechť $n = 2k+1$, pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Spočtěte distribuční funkci náhodného vektoru $(X_{(1)}, X_{(n)})^\top$ a nájděte rozdělení pro výběrový median $X_{(k+1)}$.