NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

Pořádkové statistiky. Konstrukce intervalových odhadů

Teoretické cvičenie #3 | Zimní semestr 2025/2026

Pro nahodný výběr $X_1, \ldots, X_n \sim F_\theta$ z rozdělení, které závisí na neznámem parametru $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p$ (jednorozměrný parametr pro $p = 1$, ale lze zobecnit) definujeme odhad $\widehat{\theta}_n \in \Theta$ jako měřitelné zobrazení $T : \mathbb{R}^n \to \Theta$, teda $\widehat{\theta}_n \equiv T(X_1, \ldots, X_n)$.

Odhad $\widehat{\theta}_n$ je nestraným odhadem neznámeho parametru $\theta \in \Theta$, pokud platí, že

$$E_\theta \widehat{\theta}_n = \int_{\mathbb{R}} T(X_1, \ldots, X_n) \mathrm{d}F_\theta(x) = \theta,$$

kde předchozí rovnost musí platit pro všechny $\theta \in \Theta$. Odhad $\widehat{\theta}_n$ je silně/slabě konzistentný, pokud

$$\widehat{\theta}_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \theta \qquad \text{v pravděpodobnosti/skoro jistě,}$$

opět pro všechny $\theta \in \Theta$. Intervalovým odhadem na hladině $\alpha \in (0, 1)$ rozumíme dvojici měřitelných zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \Theta$ (lower bound) a $U : \mathbb{R}^n \to \Theta$ (upper bound) takových, že

$$P_\theta\Big[\theta \in (L(X_1, \ldots, X_n); U(X_1, \ldots, X_n))\Big] = 1 - \alpha,$$

opět pro všechny $\theta \in \Theta$. V případě konstrukce asymptotického intervalu spolehlivosti platí poslední rovnost pouze asymptoticky, t.j. pro $n \to \infty$.

A Příklady na cvičení

A1. Na zastávce Křižíkova kdysi stavěla v pravidelných intervalech tramvajová linka č. 3. Student MFF UK touto linkou jezdil na Florenc. Na zastávku chodil ve zcela náhodných okamžicích (jízdní řády se tenkrát na zastávkách nevystavovaly) a po deseti příchodech na zastávku byla nejdelší doba čekání na tramvaj 11 minut. Spočítejte přesný 95 % interval spolehlivosti pro délku intervalu tramvaové linky č. 3.

A2. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s parametrem $\lambda_X > 0$. Sestrojte přesný interval spolehlivosti pro $\mathsf{E}\, X_i = 1/\lambda_X$ založený na náhodné veličině $\sum_{i=1}^n X_i$.

A3. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s neznámým parametrem $\lambda_X > 0$.

(a) Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro λ_X.

(b) Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro $\log \lambda_X$ a z něho odvoďte přibližný interval spolehlivosti pro λ_X.

A4. Máme-li dva nezávislé náhodné výběry $X_1, \ldots, X_n \sim \mathsf{Exp}(\lambda_X)$ a $Y_1, \ldots, Y_m \sim \mathsf{Exp}(\lambda_Y)$. Odvoďte přesný interval spolehlivosti pro parametr $\varrho = \lambda_X/\lambda_Y$.

B Doplňující příklady (opakování, nahrazování, procvičování)

Z nasledujúcich príkladov je potrebné samostatne spočítať aspoň dva príklady (aspoň jeden z príkladov označených B1 – B5 a aspoň jeden z príkladov B6 – B10) a riešenie zaslať emailom na adresu cvičiaceho (`maciak@karlin.mff.cuni.cz`), prípadne doručiť osobne na začiatku štvrtého cvičenia.

B1. Uvažujte náhodný výběr o rozsahu $n \in \mathbb{N}$ z exponenciálního rozdělení s parametrem $\lambda > 0$ a příslušnou hustotou $f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \cdot \mathbb{I}_{\{x>0\}}$. Odhadněte neznámý parametr $\lambda > 0$ pomoci momentové metody. Vyšetřete nestrannost a konzistenci.

B2. Uvažujte náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z rozdělení, které je definované hustotou

$$f(x;\theta) = 2\frac{\theta - x}{\theta} 1_{(0,\theta)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $\theta > 0$ je neznámý parametr. Najděte odhad θ metodou momentů a vyšetřete jeho konzistenci.

B3. Uvažujte náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z rozdělení s hustotou

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2\theta} \exp\left\{ -\frac{|x|}{\theta} \right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $\theta > 0$ je neznámý parametr. Najděte odhad θ metodou momentů a vyšetřete jeho konzistenci.

B4. $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z diskrétního rovnoměrného rozdělení na množině $\{1, 2, \dots, \theta\}$, kde $\theta \in \mathbb{N}$. Najděte odhad parametru θ metodou momentů.

B5. Je-li $X_1, \dots, X_n$ náhodný výběr z $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ rozdělení, najděte odhad vektorového parametru $[\mu, \sigma^2]^\top$ metodou momentů.

B6. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0, \theta_X)$. Nechť $n = 2k + 1$. Použijte $X_{(k+1)}$ jako bodový odhad mediánu m_X rozdělení X_i a sestrojte přesný interval spolehlivosti pro m_X.

B7. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z Poissonova rozdělení s parametrem λ_X.

(a) Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro λ_X.

(b) Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro $\sqrt{\lambda_X}$ a z něho odvoďte přibližný interval spolehlivosti pro λ_X.

B8. Uvažujme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z rozdělení s hustotou $f(x; \theta_X)$, kde

$$f(x;\theta) = \frac{x}{\theta^2} \exp\left\{ -\frac{x^2}{2\theta^2} \right\} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

(a) Najděte rozdělení náhodných veličin X_i^2, $i = 1, \dots, n$.

(b) Sestrojte přesný interval spolehlivosti pro parametr θ_X.

(c) Sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro parametr θ_X.

B9. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z alternativního rozdělení s parametrem p_X. Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro $\theta_X = \log[p_X/(1 - p_X)]$ a z něho odvoďte přibližný interval spolehlivosti pro p_X.

B10. Uvažujme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z rozdělení s hustotou $f(x; \theta_X)$, kde

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta - 1} \mathbb{I}_{(0,1)}(x), \quad \theta > 0.$$

(a) Sestrojte přesný interval spolehlivosti pro parametr θ_X.

(b) Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro parametr θ_X.

[Návod: Uvažujte transformaci $Y_i = -\log X_i$]