
NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

Pořádkové statistiky. Konstrukce intervalových odhadů

Teoretické cvičení #3 | Zimní semestr 2024/2025

Pro náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim F_\theta$ z rozdělení, které závisí na neznámém parametru $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p$ (jednorozměrný parametr pro $p = 1$, ale lze zobecnit) definujeme odhad $\hat{\theta}_n \in \Theta$ jako měřitelné zobrazení $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \Theta$, teda $\hat{\theta}_n \equiv T(X_1, \dots, X_n)$.

Odhad $\hat{\theta}_n$ je nestranným odhadem neznámého parametru $\theta \in \Theta$, pokud platí, že

$$E_\theta \hat{\theta}_n = \int_{\mathbb{R}} T(X_1, \dots, X_n) dF_\theta(x) = \theta,$$

kde předchozí rovnost musí platit pro všechny $\theta \in \Theta$. Odhad $\hat{\theta}_n$ je silně/slabě konzistentný, pokud

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta \quad \text{v pravděpodobnosti/skoro jistě,}$$

opět pro všechny $\theta \in \Theta$. Intervalovým odhadem na hladině $\alpha \in (0, 1)$ rozumíme dvojici měřitelných zobrazení $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \Theta$ (lower bound) a $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \Theta$ (upper bound) takových, že

$$P_\theta \left[\theta \in (L(X_1, \dots, X_n); U(X_1, \dots, X_n)) \right] = 1 - \alpha,$$

opět pro všechny $\theta \in \Theta$. V případě konstrukce asymptotického intervalu spolehlivosti platí poslední rovnost pouze asymptoticky, t.j. pro $n \rightarrow \infty$.

A Příklady na cvičení

- A1.** Na zastávce Křížíkova kdysi stavěla v pravidelných intervalech tramvajová linka č. 3. Student MFF UK touto linkou jezdil na Florenc. Na zastávku chodil ve zcela náhodných okamžicích (jízdni řady se tenkrát na zastávkách nevystavovaly) a po deseti příchodech na zastávku byla nejdelší doba čekání na tramvaj 11 minut. Spočítejte přesný 95 % interval spolehlivosti pro délku intervalu tramvaové linky č. 3.
- A2.** Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s parametrem $\lambda_X > 0$. Sestrojte přesný interval spolehlivosti pro $E X_i = 1/\lambda_X$ založený na náhodné veličině $\sum_{i=1}^n X_i$.
- A3.** Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s neznámým parametrem $\lambda_X > 0$.
- (a) Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro λ_X .
- (b) Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro $\log \lambda_X$ a z něho odvoďte přibližný interval spolehlivosti pro λ_X .
- A4.** Máme-li dva nezávislé náhodné výběry $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda_X)$ a $Y_1, \dots, Y_m \sim \text{Exp}(\lambda_Y)$. Odvoďte přesný interval spolehlivosti pro parametr $\varrho = \lambda_X/\lambda_Y$.

B Doplnující příklady (opakování, nahrazování, procvičování)

Z následujících příkladů je potřebné samostatně spočítat aspoň dva příklady (aspoň jeden z příkladů označených B1 – B5 a aspoň jeden z příkladů B6 – B10) a řešení zaslat emailom na adresu cvičiaceho ([hlavka,maciak]@karlin.mff.cuni.cz), případně doručit osobně na začátku štvrtého cvičenia.

B1. Uvažujte náhodný výběr o rozsahu $n \in \mathbb{N}$ z exponenciálního rozdělení s parametrem $\lambda > 0$ a příslušnou hustotou $f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \cdot \mathbb{I}_{\{x>0\}}$. Odhadněte neznámý parametr $\lambda > 0$ pomocí momentové metody. Vyšetřete nestrannost a konzistenci.

B2. Uvažujte náhodný výběr X_1, \dots, X_n z rozdělení, které je definované hustotou

$$f(x; \theta) = 2 \frac{\theta - x}{\theta} \mathbb{1}_{(0, \theta)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $\theta > 0$ je neznámý parametr. Najděte odhad θ metodou momentů a vyšetřete jeho konzistenci.

B3. Uvažujte náhodný výběr X_1, \dots, X_n z rozdělení s hustotou

$$f(x; \theta) = \frac{1}{2\theta} \exp \left\{ -\frac{|x|}{\theta} \right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $\theta > 0$ je neznámý parametr. Najděte odhad θ metodou momentů a vyšetřete jeho konzistenci.

B4. X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z diskrétního rovnoměrného rozdělení na množině $\{1, 2, \dots, \theta\}$, kde $\theta \in \mathbb{N}$. Najděte odhad parametru θ metodou momentů.

B5. Je-li X_1, \dots, X_n náhodný výběr z $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ rozdělení, najděte odhad vektorového parametru $[\mu, \sigma^2]^\top$ metodou momentů.

B6. Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0, \theta_X)$. Nechť $n = 2k + 1$. Použijte $X_{(k+1)}$ jako bodový odhad mediánu m_X rozdělení X_i a sestrojte přesný interval spolehlivosti pro m_X .

B7. Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z Poissonova rozdělení s parametrem λ_X .

(a) Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro λ_X .

(b) Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro $\sqrt{\lambda_X}$ a z něho odvoďte přibližný interval spolehlivosti pro λ_X .

B8. Uvažujme náhodný výběr X_1, \dots, X_n z rozdělení s hustotou $f(x; \theta_X)$, kde

$$f(x; \theta) = \frac{x}{\theta^2} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\theta^2} \right\} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

(a) Najděte rozdělení náhodných veličin X_i^2 , $i = 1, \dots, n$.

(b) Sestrojte přesný interval spolehlivosti pro parametr θ_X .

(c) Sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro parametr θ_X .

B9. Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z alternativního rozdělení s parametrem p_X . Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro $\theta_X = \log[p_X/(1 - p_X)]$ a z něho odvoďte přibližný interval spolehlivosti pro p_X .

B10. Uvažujme náhodný výběr X_1, \dots, X_n z rozdělení s hustotou $f(x; \theta_X)$, kde

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} \mathbb{I}_{(0,1)}(x), \quad \theta > 0.$$

(a) Sestrojte přesný interval spolehlivosti pro parametr θ_X .

(b) Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro parametr θ_X .

[Návod: Uvažujte transformaci $Y_i = -\log X_i$]