

---

# NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

Pořádkové statistiky. Nestrannost a konsistence odhadů

Teoretické cvičení #2 | Zimní semestr 2025/2026

---

Pro náhodný výběr  $X_1, \dots, X_n$  z nějakého rozdělení  $F$  definujeme uspořádaný výběr  $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ , kde  $X_{(1)}$  je tzv. první pořadová statistika náhodného výběru (t.j. minimum  $X_1, \dots, X_n$ ) a  $X_{(n)}$  je  $n$ -tá pořadová statistika náhodného výběru (t.j. maximum  $X_1, \dots, X_n$ ). Obecně platí, že náhodná veličina  $X_{(k)}$  je teda  $k$ -tou nejmenší hodnotou v realizovaném náhodném výběru  $X_1, \dots, X_n$ .

Špeciálně v případě, že  $n = 2k + 1$  pro nějaké  $k \in \mathbb{N}$ , pak definujeme výběrový medián náhodného výběru  $X_1, \dots, X_n$  jako  $X_m = X_{(k+1)}$  (t.j. prostřední hodnota v uspořádaném výběru  $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ ). Ak je rozsah náhodného výběru sudý (t.j.  $n = 2k$  pro nějaké  $k \in \mathbb{N}$ ), pak je výběrový medián definován jako průměr dvou prostředních pozorování, t.j.  $X_m = (X_{(k)} + X_{(k+1)})/2$ .

## A Příklady na cvičení

Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr ze spojitého rozdělení s distribuční funkcí  $F$  a hustotou  $f$ .

**A1.** Nechť  $n = 2k + 1$ .

- Najděte hustotu prostředního pozorování, t.j. výběrového mediánu  $X_{(k+1)}$ .
- Nechť  $X_i$  má rovnoměrné rozdělení na intervalu  $(0, 1)$ . Spočítejte  $E X_{(k+1)}$  a  $\text{var } X_{(k+1)}$ .
- Nechť  $X_i \sim R(0, \theta)$ . Je  $X_{(k+1)}$  nestranným a/nebo konsistentním odhadem mediánu rozdělení  $R(0, \theta)$ ? [Použijte tvrzení P.7.5]

**A2.** Nechť  $X_i$  má exponenciální rozdělení s parametrem 1.

- Definujte

$$Z_1 = nX_{(1)}, \quad Z_k = (n - k + 1)(X_{(k)} - X_{(k-1)}), \quad k = 2, \dots, n.$$

Ukažte, že  $Z_1, \dots, Z_n$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením  $\text{Exp}(1)$ .

- Vyjádřete  $X_{(r)}$  pomocí lineární kombinace veličin  $Z_1, \dots, Z_n$  a pomocí tohoto vztahu spočítejte  $E X_{(r)}$  a  $\text{var } X_{(r)}$  (pro libovolné  $r = 1, \dots, n$ ).
- Nechť  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$  a  $n = 2k + 1$ . Je  $X_{(k+1)}$  nestranným a/nebo konsistentním odhadem mediánu rozdělení  $\text{Exp}(\lambda)$ ?

**A3.** Nechť  $X_i$  má rozdělení  $R(\theta_1, \theta_2)$ . Najděte nestranné odhady parametrů  $\theta_1$  a  $\theta_2$  založené na maximu  $X_{(n)}$  a minimu  $X_{(1)}$ .

**A4.** Pro náhodný výběr  $X_1, \dots, X_n$  z Poissonova rozdělení s parametrem  $\lambda > 0$  ukažte, že  $\hat{p}_0 = (1 - \frac{1}{n})^{nX_n}$  je nestranným a konsistentním odhadem  $p_0 = \mathbb{P}[X_1 = 0]$ .

## B Doplnující příklady (nahrazování, samostatné procvičování)

Z následujících příkladů je potřebné samostatně spočítat **aspoň dva** příklady (podľa vlastného výberu) a riešenie zaslať emailom na adresu cvičiaceho ([maciak@karlin.mff.cuni.cz](mailto:maciak@karlin.mff.cuni.cz)), prípadne doručiť osobne na začiatku tretieho cvičenia.

**B1.** Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z rozdělení  $R(0, \theta)$ . Zjistěte, zdali  $X_{(n)}$  je nestranným a/nebo konsistentním odhadem parametru  $\theta$ .

**B2.** Uvažujme náhodný výběr  $X_1, \dots, X_n$  s hustotou

$$f(x) = 3\theta^{-3}x^2 1_{(0,\theta)}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \theta > 0.$$

- (a) Ověřte, že  $\hat{\theta}_n = \frac{4}{3}\bar{X}_n$  je nestranný odhad parametru  $\theta$ .
- (b) Ověřte, že  $\tilde{\theta}_n = \frac{3n+1}{3n}X_{(n)}$  je nestranný odhad parametru  $\theta$ .
- (c) [Pro nahrazování nepovinný] Najděte rozptyl  $\hat{\theta}_n$  a  $\tilde{\theta}_n$  a porovnejte rychlost konvergence rozptylů k 0 při  $n \rightarrow \infty$ .

**B3.** Nechť  $X_i$  má rozdělení  $\text{Alt}(p)$ . Najděte nestranný odhad parametru  $\theta = p(1-p)$  založený na  $\bar{X}_n$ .

**B4.** Nechť  $X_i$  má rozdělení  $\text{Exp}(\lambda)$ . Ukažte, že

$$\hat{\theta}_n = 1 - \left(1 - \frac{u}{n\bar{X}_n}\right)^{n-1}$$

je nestranným odhadem parametru  $\theta = 1 - e^{-\lambda u} = F_X(u)$ .

**B5.** Uvažujte nezávislé náhodné veličiny  $X_1, X_2, \dots$  s rozdělením  $\text{Alt}(p)$ .

- (a) Ukažte (sporem), že při pevném rozsahu výběru  $n$  neexistuje nestranný odhad parametru  $\theta = 1/p$  založený na  $X_1, \dots, X_n$ .
- (b) Nechť  $Z$  značí počet nul předcházejících první jedničce v posloupnosti  $X_1, X_2, \dots$ . Víme, že  $Z$  má rozdělení  $\text{Geo}(p)$ . Ukažte, že  $Z + 1$  je nestranným odhadem parametru  $\theta = 1/p$ .

**B6.** Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z rozdělení  $\text{Exp}(1)$  a  $U_1, \dots, U_n$  je náhodný výběr z rozdělení  $R(0, 1)$ . Ukažte, že  $-\log U_{(n-r+1)}$  má stejné rozdělení jako  $X_{(r)}$ . Pomocí příkladu **A2** ukažte, že

$$Q_r = \left(\frac{U_{(r)}}{U_{(r+1)}}\right)^r$$

jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením  $R(0, 1)$ .

**B7.** Máme-li dva nezávislé náhodné výběry  $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$  a  $Y_1, \dots, Y_m \sim \text{Exp}(\nu)$ , odvozte konfidenční interval pro parametr  $\varrho = \lambda/\nu$ . [Návod: Uvědomte si vztahy mezi exponenciálním, Gamma a  $\chi^2$ -rozdělením.]

**B8.** Nechť náhodný vektor  $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3, X_4]^\top$  má multinomické rozdělení s parametry  $n \in \mathbb{N}$  a  $\mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3, p_4]^\top \in (0, 1)^4$ .

- (a) Odvoďte asymptotické rozdělení vektoru  $\mathbf{X}/n$  vzhledem k rostoucímu  $n$  na základě CLV.
- (b) Ukažte asymptotickou normalitu odhadu  $\hat{\theta} = \frac{\frac{X_1}{n} - \frac{X_4}{n}}{\frac{X_2}{n} - \frac{X_3}{n}}$  parametru  $\theta = \frac{p_1 p_4}{p_2 p_3}$  pomocí Delta metody.
- (c) Použijte Delta metodu na odhad parametru  $\vartheta = \log \theta$ .
- (d) Na základě asymptotické normality odhadu parametru  $\vartheta$  skonstruujte přibližný  $100(1-\alpha)\%$  interval spolehlivosti pro parametr  $\theta$ .
- (e) Yuleovo  $Q = \frac{\theta-1}{\theta+1} = \frac{p_1 p_4 - p_2 p_3}{p_1 p_4 + p_2 p_3}$  odhadujeme pomocí  $\hat{Q} = \frac{\hat{\theta}-1}{\hat{\theta}+1}$ . Ukažte, že  $1 - \hat{Q}^2 = \frac{4\hat{\theta}}{(\hat{\theta}+1)^2}$ .
- (f) Skonstruujte přibližný  $100(1-\alpha)\%$  interval spolehlivosti pro Yuleovo  $Q$ .