NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

Pravděpodobnostní rozdělení a pořádkové statistiky

Teoretické cvičenie #1 | Zimní semestr 2025/2026

Nechť je $X_1, \dots, X_n$ náhodný výběr z nějakého rozdělení s distribuční funkci F. Definujme náhodné veličiny $X_{(1)}$ a $X_{(n)}$ jako

$$X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\} \quad \text{a} \quad X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

(t.j., nejmenší (t.j. minimum) a největší (t.j. maximum) pozorování v náhodném výběru).
Označme $W_n = X_{(n)} - X_{(1)}$ rozpětí dat (*range*) a $M_n = \frac{X_{(1)}+X_{(n)}}{2}$ prostředek dat (*midpoint*).
Takhle zavedené značení uvažujte při počítaní nasledujících příkladů.

A Příklady na cvičení

A1. Nechť X_i jsou reálne náhodné veličiny s distribuční funkci F.

- Určete distribuční funkce $X_{(1)}$ a $X_{(n)}$.
- Nechť X_i má hustotu f vzhledem k Lebesguově míře. Najděte hustoty $X_{(1)}$ a $X_{(n)}$.
- Uveďte hustoty $X_{(1)}$ a $X_{(n)}$, když X_i má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda > 0$.

A2. Nechť X_i jsou reálne náhodné veličiny s distribuční funkci F.

- Určete sdruženou distribuční funkci (reálneho) náhodného vektoru $(X_{(1)}, X_{(n)})^\top \in \mathbb{R}^2$.
- Nechť X_i má hustotu f vzhledem k Lebesguově míře. Najděte sdruženou hustotu $(X_{(1)}, X_{(n)})^\top$.

A3. Nechť X_i má spojité rozdělení s distribuční funkcí F a hustotou f.

- Určete sdruženou hustotu rozmezí W_n a minima $X_{(1)}$.
- Nechť X_i má exponenciální rozdělení. Ukažte, že W_n a $X_{(1)}$ jsou nezávislé.
  Určete rozdělení náhodné veličny $\exp\{-\lambda W_n\}$.

A4. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $\mathsf{R}(0,1)$ (t.j., rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0,1]$). Spočítejte hustotu náhodných veličín W_n, $\mathsf{E}\, W_n$ a $\mathsf{var}\, W_n$.

A5. Náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé. X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[-1,1]$ a Y má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0,1]$. Spočtěte následující podmíněné střední hodnoty:

- $\mathsf{E}\left[X^2 + Y | Y\right]$
- $\mathsf{E}\left[X | X + Y\right]$
- $\mathsf{E}\left[X^2 + Y | X + Y\right]$

B Doplňující příklady (nahrazování, samostatné procvičování)

Z následujúcich príkladov je potrebné samostatne spočítať **aspoň dva** príklady (podľa vlastného výberu) a riešenie zaslať emailom na adresu cvičiaceho (t.j., `maciak@karlin.mff.cuni.cz`), prípadne doručiť osobne na začiatku druhého cvičenia.

B1. Pro nezávislé veličiny $X \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$ a $Y \sim \mathsf{Exp}(\nu)$

(a) určete rozdělení $Z = \min\{X, Y\}$,

(b) spočtěte $\mathsf{E}\, Z$,

(c) spočtěte $\mathrm{P}\,[X < Y]$.

B2. Nechť $F_{X,Y}$ je sdružená distribuční funkce náhodného vektoru $(X, Y)^{\mathsf{T}}$. Určete distribuční funkci $Z = \max(X, Y)$.

B3. Pro nezávislé stejně rozdělené veličiny $X, Y \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$ určete hustotu

$$U = \frac{\min\{X, Y\}}{\max\{X, Y\}}.$$

B4. Pro náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0, 1)$ definujme *rozpětí* výběru

$$V = \max\{X_1, \ldots, X_n\} - \min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Spočtěte střední hodnotu náhodné veličiny V.

B5. Uvažme funkci $F(x, y) = \max\{x, y\}$ pro $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Doplňme F na $\mathbb{R}^2$ tak, aby splňovala základní vlastnost distribuční funkce ($0 \le F(x, y) \le 1$). To lze udělat např. takto:

$$F(x, y) = \min\Big[\max\big\{\max(x, y), 0\big\}, 1\Big], \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}.$$

Nyní tedy máme funkci $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, 1]$. Zjistěte, zda je F distribuční funkcí nějakého náhodného vektoru.

B6. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z $\mathsf{R}(0, \theta)$, kde $\theta > 0$. Ukažte, že W_n/θ má beta rozdělení a určete jeho parametry.

B7. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z libovolného spojitého rozdělení s distribuční funkcí F a hustotou f. Dokažte, že prostředek dat M_n má distribuční funkci

$$H(x) = n \int_{-\infty}^{x} [F(2x - y) - F(y)]^{n-1} f(y)\, dy.$$

B8. Nechť $X_i \sim \mathsf{N}(0, 1)$, $i = 1, \ldots, n$, jsou nezávislé. Ukažte, že pro $n = 2$ jest $\mathsf{E}\, W_n = \pi^{-1/2}$ a pro $n = 3$ jest $\mathsf{E}\, W_n = \frac{3}{2}\pi^{-1/2}$.

B9. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr nezáporných spojitých náhodných veličin s distribuční funkcí F. Dokažte, že

$$\mathsf{E}\, W_n = \int_0^{\infty} \{1 - F^n(x) - [1 - F(x)]^n\}\, dx.$$

[Návod: Použijte vztah $\mathsf{E}\, X = \int_0^{\infty} [1 - F(x)]\, dx$*, který platí pro libovolnou spojitou náhodnou veličinu takovou, že* $\mathrm{P}\,[X \ge 0] = 1$*.]*

B10* Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělené $\mathsf{R}(0, \theta)$, kde $\theta > 0$. Ukažte, že

$$n \left[1 - \frac{W_n}{\theta}\right] \xrightarrow{\mathsf{D}} Y, \quad n \to \infty,$$

kde Y má gama rozdělení.