Symetrické a vnější algebra

DEF. Nechť V je vektor. prostor. Nechť S_k je grupa permutací $\{1, 2, \dots, k\}$.

(i) Potom $\alpha \in V^k$ je symetrický, resp. antisymetrický, pokud $\forall f^1, \dots, f^k \in V^* \ \forall \pi \in S_k$:

$$\alpha(f^{\pi(1)}, \dots, f^{\pi(k)}) = \alpha(f^1, \dots, f^k),$$

resp. $\quad$ —〃— $\quad = (\operatorname{sgn} \pi)\, \alpha(f^1, \dots, f^k)$.

Označme $Sym^k(V)$ vekt. prostor všech symetr. $\alpha \in V^k$ a
$\Lambda^k(V)$ —〃— antisymetr. —〃—.

(ii) Pro $\alpha \in V^k$ definujeme symetrizaci

$$Sym_k(\alpha)(f^1, \dots, f^k) := \sum_{\pi \in S_k} \alpha(f^{\pi(1)}, \dots, f^{\pi(k)}),$$

$f^1, \dots, f^k \in V^*$

a antisymetrizaci

$$Alt_k(\alpha)(f^1, \dots, f^k) = \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sgn} \pi \cdot \alpha(f^{\pi(1)}, \dots, f^{\pi(k)}).$$

Pozn: Potom $\frac{1}{k!} Sym_k : V^k \to Sym^k(V)$ a $\frac{1}{k!} Alt_k : V^k \to \Lambda^k V$ jsou projekce.

DEF: Symetrickou algebrou vektor. prostoru V rozumíme algebru

$$\mathrm{Sym}(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{Sym}^k(V)$$

s násobením definovaným následovně:
Je-li $\alpha \in \mathrm{Sym}^k(V)$, $\beta \in \mathrm{Sym}^\ell(V)$, potom

$$\alpha \odot \beta := \frac{1}{k!\,\ell!}\, \mathrm{Sym}_{k+\ell}(\alpha \otimes \beta)$$

Na celou $\mathrm{Sym}(V)$ rozšíříme $\odot$ bilineárně.

DEF: Vnější algebrou vektor. prostoru V rozumíme algebru

$$\Lambda^*(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(V)$$

s násobením definovaným následovně:
Je-li $\alpha \in \Lambda^k(V)$, $\beta \in \Lambda^\ell(V)$, potom

$$\alpha \wedge \beta := \frac{1}{k!\,\ell!}\, \mathrm{Alt}_{k+\ell}(\alpha \otimes \beta)$$

Na celou $\Lambda^*(V)$ rozšíříme $\wedge$ bilineárně.

Pozn: Na rozdíl od zavedení $\Lambda^*(V)$ v Geom. 2 je tato definice zřejmě nezávislá na volbě báze V.

Vlastnosti $\Lambda^*(V)$

① Je-li $n = \dim V$, potom $\Lambda^k(V) = 0$ $\forall k > n$, tudíž
$$\Lambda^*(V) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(V).$$

② Vnější násobení $\wedge$ je asociativní a platí $\omega \wedge \tau = (-1)^{k \cdot \ell} \tau \wedge \omega \in \Lambda^{k+\ell}(V)$, je-li $\omega \in \Lambda^k(V)$ a $\tau \in \Lambda^\ell(V)$.

③ Nechť $e_1, \dots, e_n$ je báze V. Potom $\Lambda^k(V)$ má bázi
$$\hat{e}_I := e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k},$$
kde $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ a $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.
Spec. $\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}$.

Důkaz: (i) Nechť $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ je duální báze V^*, tj. $\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j$. Nechť $\alpha \in \Lambda^k(V)$. Potom $\alpha \in V^k$, tudíž

(*) $\alpha = \sum_A \alpha^A e_A$, kde $A = (a_1, \dots, a_k) \in \{1, \dots, n\}^k$,
$\alpha^A = \alpha(\varepsilon^{a_1}, \dots, \varepsilon^{a_k})$ a
$e_A = e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_k}$.

Nechť A má $a_i = a_j$ pro nějaké $i \neq j$. Potom

$$\alpha^A = \alpha(\ldots, \varepsilon^{a_i}, \ldots, \varepsilon^{a_j}, \ldots) = -\alpha^A, \text{ tj. } \alpha^A = 0.$$

Spec., je-li $k > n$, potom $\alpha = 0$. Dále proto předp., že $k = 1, \ldots, n$. Potom v (*) stačí sčítat jen přes A, ve kterých se indexy neopakují. Tedy

$$\alpha = \sum_{I,\pi} \alpha^{\pi(I)} e_{\pi(I)} = \sum_{I,\pi} \operatorname{sgn}\pi \cdot \alpha^I \cdot e_{\pi(I)} = \sum_I \alpha_I \hat{e}_I,$$

kde $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ s $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$, $\pi \in S_k$, $\pi(I) := (i_{\pi(1)}, \ldots, i_{\pi(k)})$ a $\hat{e}_I := \mathrm{Alt}_k(e_I)$.

Ukážeme, že $\hat{e}_I$, $|I| = k$ tvoří bázi $\Lambda^k(V)$. Stačí ukázat jejich lineární nezávislost. Nechť $\sum_I \alpha^I \hat{e}_I = 0$ s $\alpha_I \in \mathbb{R}$. Potom pro každé $J := \{j_1, \ldots, j_k\}$ s $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$ je

$$0 = \sum_I \alpha^I \underbrace{\hat{e}_I(\varepsilon^{j_1}, \ldots, \varepsilon^{j_k})}_{= \delta^J_I} = \alpha^J. \quad \times \blacksquare$$

(ii) Platí $\hat{e}_I \wedge \hat{e}_J = 0$, je-li $I \cap J \neq \emptyset$;

$$= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I \mid J \\ I \cup J \end{pmatrix} \cdot \hat{e}_{I \cup J}, \text{ je-li } I \cap J = \emptyset.$$

Zde $\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I\; J \\ I\cup J\end{pmatrix}$ je znaménko permutace

$$(\mathrm{o}) \quad \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_\ell \\ m_1, \quad \dots \quad, m_{k+\ell} \end{pmatrix}$$

kde $I = \underset{\text{rost.}}{\{i_1, \dots, i_k\}}$, $J = \underset{\text{rost.}}{\{j_1, \dots, j_\ell\}}$, $I \cup J = \underset{\text{rost.}}{\{m_1, \dots, m_{k+\ell}\}}$

Nechť $M = \underset{\text{rost.}}{\{m_1, \dots, m_{k+\ell}\}} \subset \{1, \dots, n\}$. Potom

$$(\times) \quad \hat{\varphi}_{I\cup J}(\varepsilon^{m_1}, \dots, \varepsilon^{m_{k+\ell}}) = \delta^M_{I\cup J}, \text{ je-li } I \cap J = \emptyset.$$

Dále $\hat{\varphi}_I \wedge \hat{\varphi}_J(\varepsilon^{m_1}, \dots, \varepsilon^{m_{k+\ell}}) = \frac{1}{k!\,\ell!} \sum_{\pi \in S_{k+\ell}} c(\pi)$, kde

$$c(\pi) := \operatorname{sgn}\pi \cdot \hat{\varphi}_I(\varepsilon^{m_{\pi(1)}}, \dots, \varepsilon^{m_{\pi(k)}}) \cdot \hat{\varphi}_J(\varepsilon^{m_{\pi(k+1)}}, \dots, \varepsilon^{m_{\pi(k+\ell)}}).$$

Ale $c(\pi) \neq 0$, právě když $\{m_{\pi(1)}, \dots, m_{\pi(k)}\} = I$ a $\{m_{\pi(k+1)}, \dots, m_{\pi(k+\ell)}\} = J$ $(\triangle)$.

(a) Je-li $I \cap J \neq \emptyset$, potom tedy $\hat{\varphi}_I \wedge \hat{\varphi}_J = 0$.

(b) Nechť $I \cap J = \emptyset$. Potom $\pi \in S_{k+\ell}$ splňujících $(\triangle)$ je právě $k!\,\ell!$ a pro takové π je

$$c(\pi) = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I\; J \\ I\cup J\end{pmatrix} \underbrace{\hat{\varphi}_I(\varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_k})}_{=1} \cdot \underbrace{\hat{\varphi}_J(\varepsilon^{j_1}, \dots, \varepsilon^{j_\ell})}_{=1} =$$

$$= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I\; J \\ I\cup J\end{pmatrix}$$

Skutečně, každá taková permutace π je permutace (o) složená s permutacemi indexů $i_1, \dots, i_k$ a $j_1, \dots, j_\ell$.

(iii) Zbylé vlastnosti se ukáží stejně jako v Geom. 2. $\blacksquare$

Pozn: Budeme psát často φ_I místo $\hat{\varphi}_I$, pokud nebude hrozit nedorozumění.

Vlastnosti $\mathrm{Sym}(V)$

(1.) $\mathrm{Sym}(V)$ je ∞-dimenzionální, asociativní a komutativní algebra s jednotkou.

(2.) Nechť $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ je báze V. Potom $\mathrm{Sym}^k(V)$ má bázi

$$\varphi_A := \varphi_{a_1} \odot \cdots \odot \varphi_{a_k},$$

kde $A = (a_1, \dots, a_k)$ a $1 \le a_1 \le \dots \le a_k \le n$.

Spec. $\dim \mathrm{Sym}^k(V) = \binom{n+k-1}{k}$.

Cv. $\mathrm{Sym}(V^*) \simeq \mathcal{P}(V)$, kde $\mathcal{P}(V)$ je algebra všech polynomů $P: V \to \mathbb{R}$. Spec. pro $V = \mathbb{R}^n$.

Nechť $e_1, \dots, e_n$ je báze V a $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ je duální báze V^*, tzn. $\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j$.

Pro tzv. multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ položme
$$\varepsilon^\alpha := \underbrace{\varepsilon^1 \odot \dots \odot \varepsilon^1}_{\alpha_1\text{-krát}} \odot \dots \odot \underbrace{\varepsilon^n \odot \dots \odot \varepsilon^n}_{\alpha_n \text{ krát}}.$$

Potom zřejmě $\{\varepsilon^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$ je báze $\mathrm{Sym}\, V^*$.

Tedy ~~pro~~ každé $P \in \mathrm{Sym}\, V^*$ lze psát jednoznačně jako $P = \sum_\alpha P_\alpha \varepsilon^\alpha$, kde $P_\alpha \in \mathbb{R}$ jsou nenulová pro konečně mnoho α.

Každému P odpovídá jediný polynom na V, a to
$$P(x) = \sum_\alpha P_\alpha \varepsilon^\alpha(\underbrace{x, \dots, x}_{|\alpha| \text{ krát}}) = \sum_\alpha P_\alpha x^\alpha, \quad x \in V,$$

kde $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ a $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.