

### III. Analýza ve vektorách

- A. Tenzory
- B. Topologické prostory
- C. Vahsy

#### A. Multiplikační algebra - tenzory

Uvědomění: Všechny vektorové prostory jsou reálné a konečně dim., pokud nebude řečeno něco jiného

**Problém** Jak se dají násobit vektory?

Necht  $V, W$  jsou vektor. prostory.

① Necht  $\alpha \in V^*$  a  $\beta \in W^*$ , kde  $V^*$  je dual k  $V$ , tm.  $V^* := \{ f: V \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ lineární forma} \}$ .  
Kovektor

Potom definujeme

$$(\alpha \otimes \beta)(v, w) := \alpha(v) \cdot \beta(w), \quad v \in V \text{ a } w \in W.$$

Projeví se  $\alpha \otimes \beta: V \times W \rightarrow \mathbb{R}$  bilineárně.

Označme  $V^* \otimes W^*$  jako vektor. prostor všech bilineárních zobrazení  $\phi: V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ .

Označbu: Necht  $V_1, \dots, V_k$  jsou reáln. prostory.  
 Potom označme  $\mathcal{L}_k(V_1, \dots, V_k)$  jako reáln. prostor  
 všech  $k$ -lineárních zobrazení  $\phi: V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow \mathbb{R}$ ,

tm.  $\phi(V_1, \dots, V_{i-1}, \cdot, V_{i+1}, \dots, V_k) \in V_i^*$ ,

kdykoli  $i=1, \dots, k$  a  $v_j \in V_j$  pro  $j \neq i$ .

$$V \simeq (V^*)^* =: V^{**}$$

Kanovický vnoření  $\kappa: V \rightarrow V^{**}$  definujeme

$$\kappa(v)(f) := f(v), \quad v \in V \text{ a } f \in V^*$$

je izomorfismus  $V$  na  $V^{**}$ .

Trápíme je  $\kappa$  lineární, prostá a me, protože  
 $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$

2. Necht  $v \in V$  a  $w \in W$ . Potom

$$v \otimes w := \kappa(v) \otimes \kappa(w),$$

tedy

$$(v \otimes w)(f, g) := f(v) \cdot g(w), \quad f \in V^* \text{ a } g \in W^*.$$

Označme  $V \otimes W := \mathcal{L}_2(V^*, W^*)$ .

Cv. Dokaž  $\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$ .

Najdi bázi  $V \otimes W$ , pokud znáš báze  $V$  a  $W$ .

$$\begin{matrix} i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m \end{matrix} e_i \otimes f_j$$

$$\begin{matrix} e_i \\ i=1, \dots, m \end{matrix} \otimes \begin{matrix} f_j \\ j=1, \dots, n \end{matrix}$$

DEF. Necht  $V$  je reálný prostor.

(i) Je-li  $k$ -tou tenzorovou mocninou  $V^k$  definujeme  
jako  $V^k := \underbrace{\mathcal{L}_k(V^*, \dots, V^*)}$ ,

kde položíme  $V^0 := \mathbb{R}$  a stanovíme  
 $V^1 = V^{**} \cong V$ .

(ii) Je-li tenzorovou algebrou definujeme jako

$$T(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^k.$$

Násobení  $\otimes$  na  $T(V)$  definujeme následovně:

(a) Je-li  $\alpha \in V^k$  a  $\beta \in V^m$ , potom

$$(\alpha \otimes \beta)(f^1, \dots, f^k, f^{k+1}, \dots, f^{k+m}) := \alpha(f^1, \dots, f^k) \cdot \beta(f^{k+1}, \dots, f^{k+m})$$

$f^j \in V^*$  a  $j = 1, \dots, m+k$ .

[Projme  $\alpha \otimes \beta \in V^{k+m}$ .]

(b) násobení  $\otimes$  rozšíříme na  $T(V)$  bilineárně,  
tzn. je-li  $\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$  s  $\alpha_k \in V^k$  a  $\beta = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m$  s  $\beta_m \in V^m$ ,

$$\text{potom } \alpha \otimes \beta := \sum_{k,m=0}^{\infty} \alpha_k \otimes \beta_m.$$

Pozn: Řady v (b) mají jen konečně mnoho  
nemnulových členů.

Nechť  $V_\alpha, \alpha \in I$  (i nekonečno) jsou vektor.  
prostory. Potom se definuje

$$\bigoplus_{\alpha \in I} V_\alpha := \{ (v_\alpha)_{\alpha \in I} \mid v_\alpha \in V_\alpha, v_\alpha \neq 0 \text{ pro konečné množině } \alpha \in I \}$$

jako vektor. prostor s vektor. operacemi po složkách.

Vlastnosti  $T(V)$

①  $T(V)$  je  $s$ -dimen., nekmutat., asociat.  
algebra s jednotkou  $1 \in V^0 = \mathbb{R}$  [triviálně]

② Nechť  $V$  má bázi  $e_1, \dots, e_m$ . Potom  $V^k$  má  
bázi

$$\varphi_A := \varphi_{a_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{a_k}$$

kde  $A = (a_1, \dots, a_k) \in \{1, 2, \dots, m\}^k$ .

Speciálně,  $\dim V^k = (\dim V)^k = m^k$ .

Důkaz: ② Nechť  $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$  je dualní báze  $V^*$ ,

$$\text{tm. } \varepsilon^i(\varphi_j) = \delta_j^i = 1, \quad i=j; \\ = 0, \quad i \neq j.$$

i) Nechť  $\sum_A \alpha^A \varphi_A = 0$  s  $\alpha^A \in \mathbb{R}$ . Potom

$$0 = \sum_A \alpha^A \varphi_A(\varepsilon^{b_1}, \dots, \varepsilon^{b_k}) = \alpha^B,$$

je-li  $B = (b_1, \dots, b_k)$ , protože  $\varphi_A(\varepsilon^{b_1}, \dots, \varepsilon^{b_k}) =$

$$\varepsilon^{b_1}(\varphi_{a_1}) \dots \varepsilon^{b_k}(\varphi_{a_k}) = \delta_A^B.$$

$\exists \beta \int_A \beta = 1$  pro  $A = B,$   
 $\Rightarrow$  pro  $A \neq B.$

Neboli  $\varphi_A, A \in \{1, \dots, m\}^k$  jsou lineární endomorfismy.  
 (ii) Nodati  $\alpha \in V^k$ . Pro  $j=1, \dots, k$  uedi

$$f^j = \sum_{a=1}^m f_a^j \varepsilon^a \in V^*$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_m$   
 $\mathbb{R}$

$$\text{Potom } \alpha(f^1, \dots, f^k) = \sum_{a_1=1}^m \dots \sum_{a_k=1}^m f_{a_1}^1 \dots f_{a_k}^k \alpha(\varepsilon^{a_1}, \dots, \varepsilon^{a_k})$$

!! om.  
 $\alpha(a_1, \dots, a_k)$

Tedy  $\alpha = \sum \alpha^A \varphi_A$  protože

$$\varphi_A(f^1, \dots, f^k) = f^1(a_{a_1}) \dots f^k(a_{a_k}) = f_{a_1}^1 \dots f_{a_k}^k. \quad \square$$

### Tenzory typu $\binom{s}{r}$

Nodati  $\alpha \in V^s$  a  $\beta \in (V^*)^r$ . Potom dedujeme

$$(\alpha \otimes \beta)(f^1, \dots, f^s, v_1, \dots, v_r) := \alpha(f^1, \dots, f^s) \cdot \beta(v_1, \dots, v_r),$$

$f^i \in V^*$  a  $v_j \in V.$

$$\text{Potom } V^s \otimes (V^*)^r := \mathcal{L}_{r+s} \left( \underbrace{V^* \dots V^*}_{s \times} \mid \underbrace{V \dots V}_{r \times} \right).$$

Dimenze: tenzory  $r$ -krát kontravariantní a  $s$ -krát kovariantní

(Cv.) typu  $\binom{1}{1}$ :  $V \otimes V^* \simeq \text{End}(V) := \{L: V \rightarrow V \mid L \text{ lineární}\}$

(Cr.) Každý  $\alpha \in V^s \otimes (V^*)^r$  lze jednoduše popsat

$$\alpha = \sum \alpha_{\substack{a_1, \dots, a_s \\ b_1, \dots, b_r}} \underbrace{\varphi_{a_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{a_s}}_{\text{báze}} \otimes \underbrace{\varepsilon^{b_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{b_r}}_{\text{báze}}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{souřadnice}} \quad \mathbb{R} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{báze}}$

Kde sčítáme přes všechny indexy od 1 do  $n$

Einstudiuj součetů kursuce:  $V^s$  tensorových

počet vynecháme symbol  $\sum$  pro každý index od 1 do  $n$ , který je ulevová i dle  
 [nebudeme mít]

Změne souřadnice toutoím pn změne báze

Necht  $\varphi'_1, \dots, \varphi'_n$  je jiné báze  $V$  a ucht

$E = (E_b^a)$  je matice přechodu od  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  k  $\varphi'_1, \dots, \varphi'_n$ , tm.

$$(1) \quad \varphi'_b = \sum_{a=1}^n E_b^a \varphi_a.$$

Potom  $F := E^{-1}$  je matice přechodu mezi  
 příslušným dvěma báze  $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^m$  a  $\varepsilon'^1, \dots, \varepsilon'^m$  prostom  $V^*$ , tm.

$$(2) \quad \varepsilon'^b = \sum_{a=1}^m F_a^b \varepsilon^a$$

[Víme z LA.]

— 48 —

Suadno z (1), (2).

Nadř  $\alpha \in V^s \otimes (V^*)^r$  a  $\alpha = \sum_{A, B} \alpha_{A, B}^{\alpha} e_A \otimes e^B =$   
 $= \sum_{C, D} \alpha'_{C, D} e'_C \otimes e'^D$ . Potom máme

$$(3) \alpha'_{d_1, \dots, d_r}^{c_1, \dots, c_s} = \sum \alpha_{b_1, \dots, b_r}^{a_1, \dots, a_s} \cdot F_{d_1}^{b_1} \dots F_{d_r}^{b_r} \cdot F_{a_1}^{c_1} \dots F_{a_s}^{c_s}$$

kde sečítáme od 1 do  $m$  přes  $a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_r$ .

DŮKAZ: Dosažeme (1), (2) do

$$\alpha'_{d_1, \dots, d_r}^{c_1, \dots, c_s} = \alpha(e^{c_1}, \dots, e^{c_s}, e_{d_1}, \dots, e_{d_r}). \quad \square$$

### Převod (fyzikální) dekvace

Tenzor  $\alpha$  typu  $\binom{s}{r}$  je přiváženo, utvoř  
 keřtdu báři  $V$  pořadu řadu čísel

$$\alpha_{b_1, \dots, b_r}^{a_1, \dots, a_s}$$

utvoř se přv měně báři transformujř  
 řáku  $\nu$  (3).