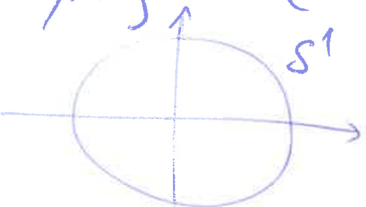
Najděte difeomorfismy mezi následujícími difeomorfními množinami!

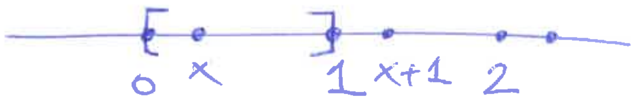
DIF1

① Kružnice:

$\sim$ je nejmenší ekvivalence na $\mathbb{R}$, pro kterou platí

- $S^1 \simeq \mathbb{R}/\sim$, kde $x \sim x+1$, tzn. $x \sim y \Leftrightarrow y-x \in \mathbb{Z}$





- $S^1 \simeq [0,1]/\sim$, kde $0 \sim 1$

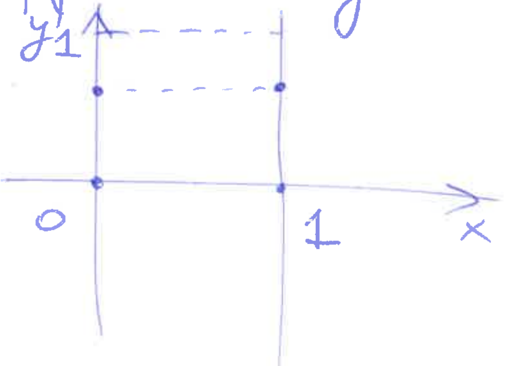
② Válcová plocha:

Nechť $V_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = \overset{r^2}{1},\ z \in \overset{\overset{\mathbb{R}}{(a,b)}}{(0,1)}\}$.

Potom V_2 je 2-plocha v $\mathbb{R}^3$ a

- $V_2 \simeq S^1 \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2/\sim$, kde $(x,y) \sim (x+1,y)$
- $V_2 \simeq \mathbb{C} \setminus \overset{(0,1)}{\{0\}}$ (užij exp v $\mathbb{C}$)
- $V_2 \simeq [0,1] \times (0,1)/\sim$, kde

  $(0,y) \sim (1,y)$

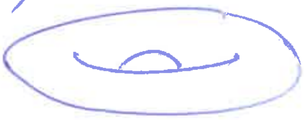


③ Torus:

Nechť $0 < r < R$ a

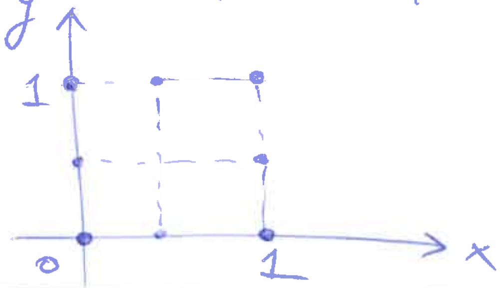
$T_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$. Potom

T_2 je 2-plocha v $\mathbb{R}^3$ a



- $T_2 \simeq S^1 \times S^1 \simeq \mathbb{R}^2/\sim$, kde $(x,y) \sim (x+1,y) \sim (x,y+1)$
- $T_2 \simeq [0,1]^2/\sim$, kde

  $(x,0) \sim (x,1)$ a $(0,y) \sim (1,y)$



Ad (3.):

D/F2

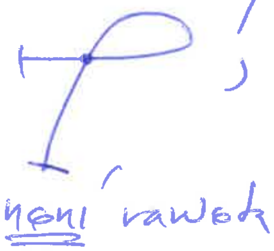
Pozn: (i) Ukažte, že $f: \mathbb{R}^2/\sim \longrightarrow Z$ je hladká, právě když ex. jediná hladká $F: \mathbb{R}^2 \to Z$ taková, že F je 1-periodická v obou proměnných (tzn. $F(x,y) = F(x+1,y) = F(x,y+1)$) a $f([(x,y)]) = F(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Podobně pro $\mathbb{R}/\sim$ z ① a $\mathbb{R}^2/\sim$ z ②.

(ii) Je-li X souvislý (resp. kompakt.) top. prostor, potom i $X/\sim$ je souvislý (resp. kompakt.) protože projekce $\pi: X \xrightarrow{na} X/\sim$ je spojitá.

(iii) **POZOR:** Je-li X (top.) varieta, potom obecně $X/\sim$ nemusí být varieta.

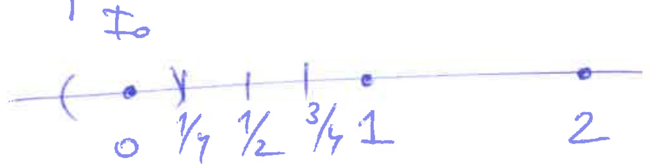
Např. $\mathbb{R}/\sim \; \simeq$



, kde $0 \sim 1$.

ad ① Zobrazení $\phi : \mathbb{R}/\sim \xrightarrow{na} S^1$ definované jako $\phi([t]) := e^{2\pi i t}$, $t \in \mathbb{R}$, je difeomorfismus.

A) $\mathbb{R}/\sim$ je hl. varieta: Nechť $\pi : \mathbb{R} \xrightarrow{na} \mathbb{R}/\sim$ je projekce, tzn. $\pi(t) := [t]$, kde $[t] = t + \mathbb{Z}$.



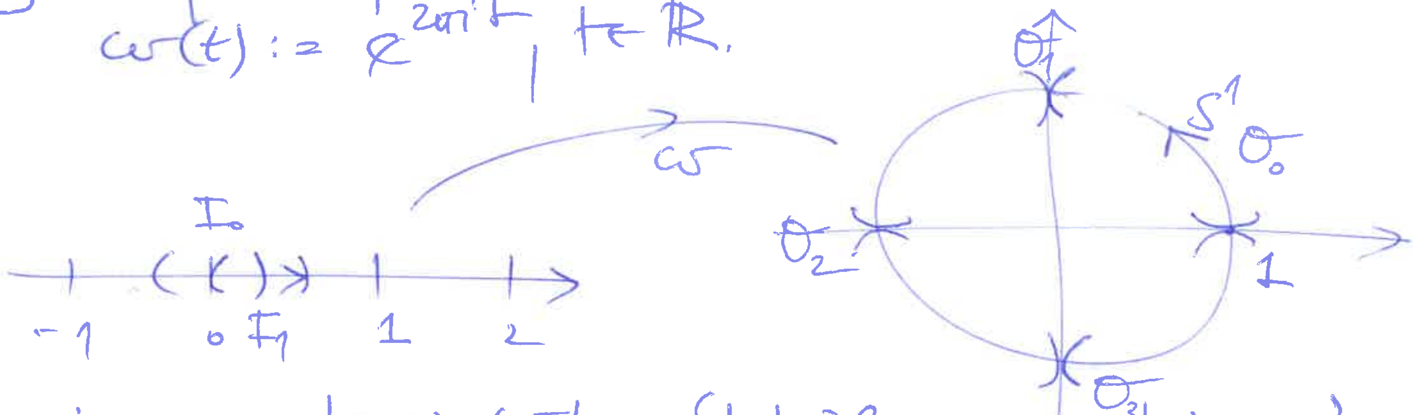
Položme $I_j := (j/4 - 1/4, j/4 + 1/4)$, $j = 0, 1, 2, 3$ a

$$U_j := \pi(I_j)$$

$$\varphi_j := (\pi|_{I_j})_{-1} : U_j \xrightarrow{na} I_j.$$

Víme, že $\mathcal{A} := \{(U_j, \varphi_j) \mid j = 0, 1, 2, 3\}$ je hladký atlas na $\mathbb{R}/\sim$.

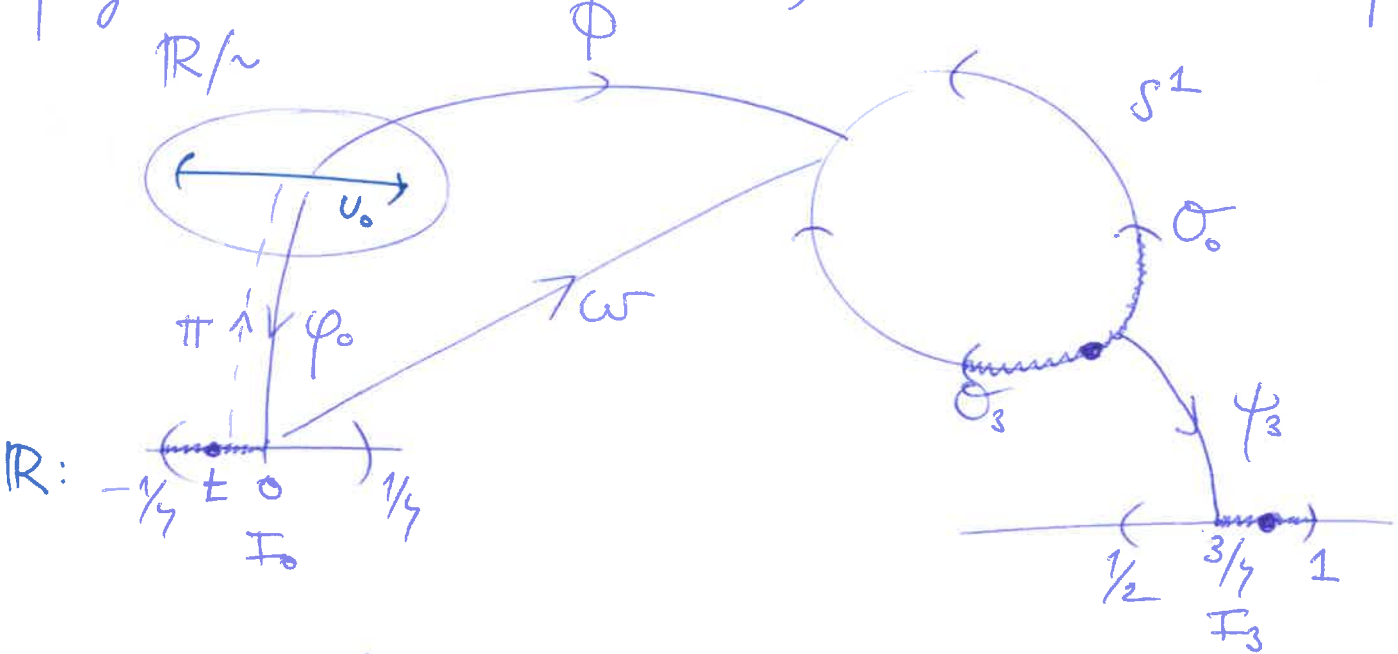
B) S^1 je 1-plocha v $\mathbb{R}^2$: Uvažme $\omega : \mathbb{R} \xrightarrow{na} S^1$, $\omega(t) := e^{2\pi i t}$, $t \in \mathbb{R}$.



Pro $j = 0, 1, 2, 3$ tvoří $\omega|_{I_j}$ 'lokál. parametrizaci' (tzn. 'atlas') na 1-ploše S^1, tzn.

$\mathcal{B} := \{(O_j, \psi_j) \mid j = 0, \dots, 3\}$, kde $\psi_j := (\omega|_{I_j})_{-1}$ a $O_j := \omega(I_j)$ je ot. oblouk na S^1, je hladký atlas na množinu S^1.

c) ϕ je difeomorfismus: Zřejmě je ϕ bijekce $\mathbb{R}/\sim$ na S^1. Navíc $\phi\circ\pi = \omega$. Zobrazení ϕ je hladké (difeom.). Skutečně, nejprve



máme $\psi_3\circ\phi\circ\varphi_0^{-1}(t) = \psi_3\circ\omega(t) = t+1$, $t\in(-1/4,0)$,

je hladké (difeom.).

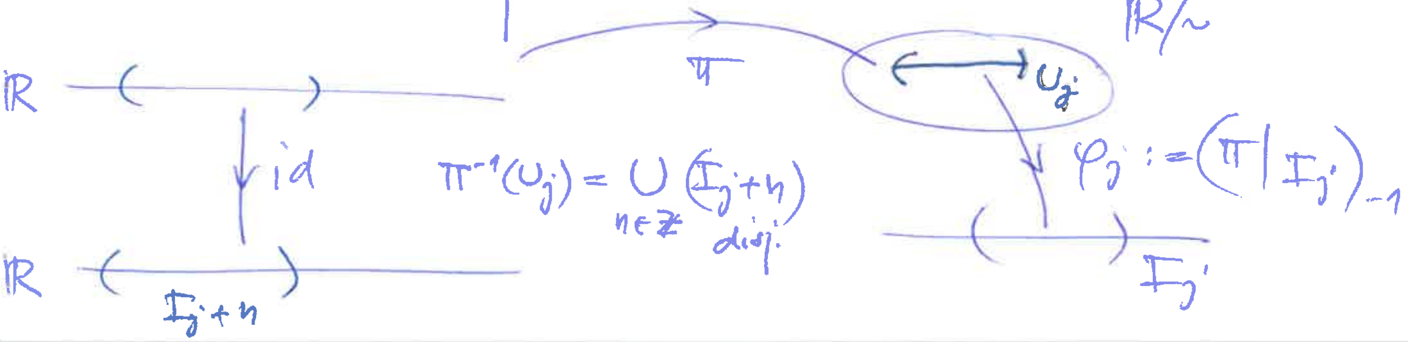
Obecně, $\psi_k\circ\phi\circ\varphi_j^{-1} \underset{\text{na } I_j}{=} \psi_k\circ\omega = \underbrace{\psi_k\circ\psi_j^{-1}}_{\text{přechod. funkce}}$

je difeom. na $\psi_j(O_j\cap O_k)$.

d) (i) Nechť $f:\mathbb{R}/\sim\;\longrightarrow Y$ je hladké.

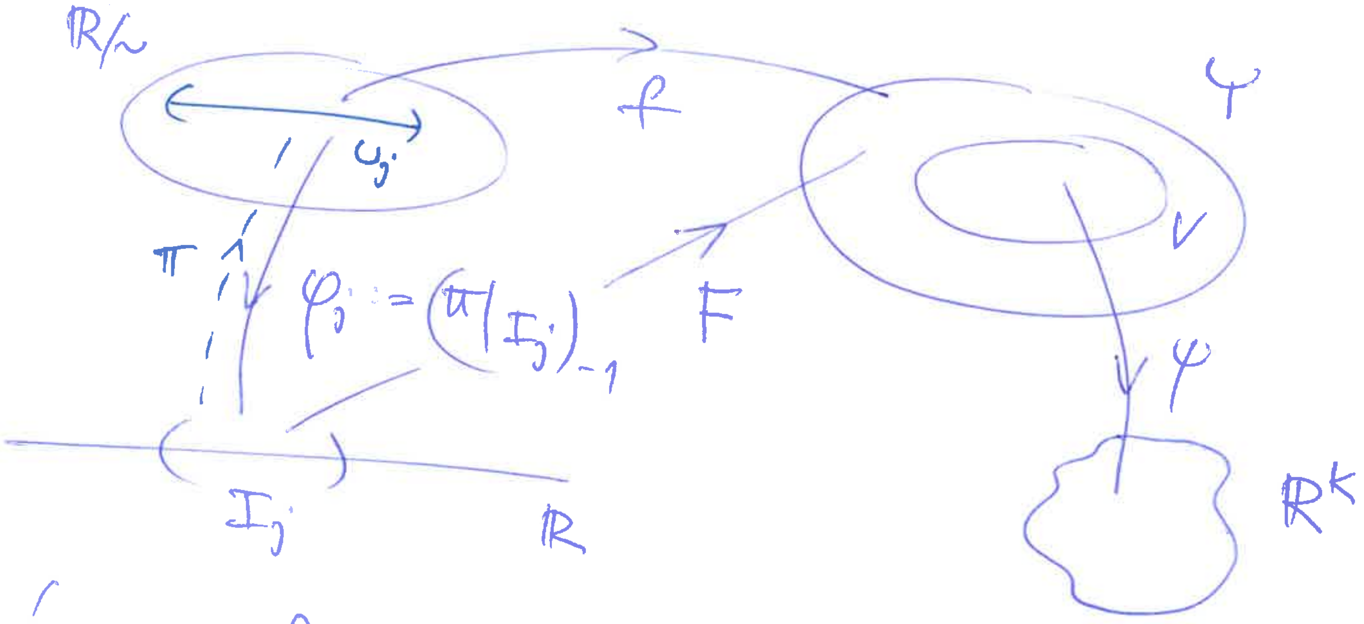
Potom $F := f\circ\pi : \mathbb{R}\longrightarrow Y$ je hladké, 1-period., protože

$\pi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}/\sim$ je hladké:



Máme $\varphi_j \circ \pi = \mathrm{id}$ na I_j ⇒ je difeom.

(ii) Nech $F : \mathbb{R} \to Y$ je hladké a $F(x+1) = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Potom zobrazenie $f : \mathbb{R}/\sim \to Y$, $f([x]) = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, je dobre definované a hladké.



Máme $\underbrace{\psi \circ f \circ \varphi_j^{-1}}_{\text{na } I_j} = \psi \circ F$ na $F^{-1}(V) \cap I_j$

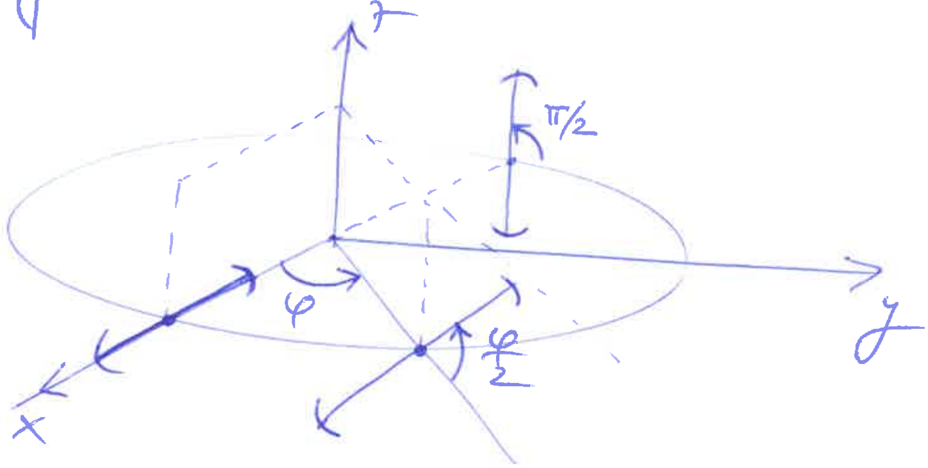
je hladké. ▨

ZÁVER: $f : \mathbb{R}/\sim \to Y$ je hladké, práve keď ex. jediné hladké $F : \mathbb{R} \to Y$ také, že F je 1-periodické (tzn. $F(x) = F(x+1)$) a $f \circ \pi = F$.

④ Möbiův list:

DIF3

Uvažme jednotkovou úsečku v $\mathbb{R}^3$, jejíž střed obíhá stejnoměrně po S^1 v rovině xy. Zároveň se tato úsečka stejnoměrně otáčí kolem svého středu v rovině, která je dána tímto středem a osou z. Při jednom oběhu středu se úsečka otáčí o úhel π. Označme 2-plochu v $\mathbb{R}^3$, kterou tato úsečka vykreslí, jako M_2.

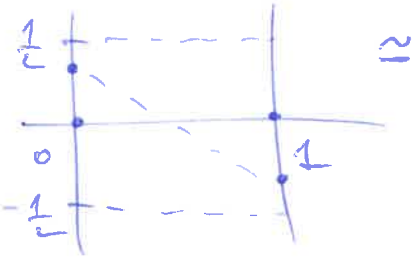


Potom M_2 je (např.) množina bodů $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ takových, ~~že~~ $(x,y,z) = \phi(\varphi,t)$, kde

$$x = \cos\varphi \cdot (1 + t \cdot \cos(\varphi/2)),$$
$$y = \sin\varphi \cdot (1 + t \cdot \cos(\varphi/2)), \qquad \varphi \in \mathbb{R}$$
$$z = t \cdot \sin(\varphi/2). \qquad t \in (-1/2, 1/2)$$

Potom $M_2 \simeq \overset{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}{\mathbb{R}\times(-1/2,1/2)}/\sim$, kde $(x+1,-y)\sim(x,y)$;

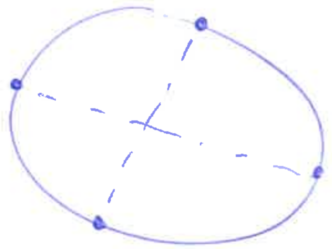
$\simeq [0,1]\times(-1/2,1/2)/\sim$, kde $(0,y)\sim(1,-y)$.



(J.) Reálna projektívna rovina:

Pripomeňme, že $P_2 = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim$, kde $y \sim x \iff \exists t \in \mathbb{R}, t \neq 0: y = tx$. Potom

- $P_2 \simeq S^2/\sim$, kde $x \sim (-x)$, tzn. ztotožňujeme protiľahlé body na S^2
- $P_2 \simeq \mathbb{D}/\sim$, kde $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ a $x \sim (-x)$, $x \in S^1$



—— x ——

NÁVOD: Zobr. $\phi : S^2/\sim \xrightarrow{na} P_2$ definované jako $\phi([\![x]\!]) := [x]$, $x \in S^2$, $[\![x]\!] := \{\pm x\}$ a $[x] := \{tx \mid t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$, je difeomorfizmus.