1. Rozviňte v řadu integrál $\int_0^\infty \cos x \, \log(1+e^{-x})\, dx$.

Řešení.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \cos x \, \log(1+e^{-x})\, dx &= \int_0^\infty \Big(\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} \frac{e^{-kx}\cos x}{k}\Big)\, dx \\ &= \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty (-1)^{k+1} \frac{e^{-kx}\cos x}{k}\, dx \\ &= \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k^2+1}.\end{aligned}$$

Odůvodnění záměny podle kritéria “$\sum \int |f_k| < \infty$”:

$$\sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty \Big|(-1)^{k+1} \frac{e^{-kx}\cos x}{k}\Big|\, dx \le \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-kx}}{k}\, dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} < \infty.$$

2. Spočtěte integrál

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\log(1+ax^2)}{x^2(1+x^2)}\, dx.$$

Řešení. Pro $a < 0$ je integrand nedefinován na intervalu, tudíž integrál nemá smysl. $F(0) = 0$. Pro $a > 0$ máme

$$F'(a) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+ax^2)(1+x^2)}\, dx. \tag{1}$$

Odůvodnění: majoranta $\frac{1}{1+x^2}$, pro $a = 1$ máme

$$\frac{\log(1+x^2)}{x^2(1+x^2)} \le \frac{1}{x^2+1},$$

takže integrál konverguje aspoň v jednom bodě (bod $a = 0$ se nedá použít, protože není v sledovaném intervalu). Integrand v (1) je spojitý, takže ta samá majoranta dává i spojitost derivace v $(0, \infty)$. Počítáme

$$(a-1)F'(a) = \int_0^\infty \Big(\frac{a}{1+ax^2} - \frac{1}{1+x^2}\Big)\, dx = \frac{\pi}{2}(\sqrt{a} - 1),$$

tedy

$$F'(a) = \frac{\pi/2}{\sqrt{a}+1} \tag{2}$$

platí pro $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Jak už jsme zmínili, F' je spojitá v 1, takže (2) platí i pro $a = 1$. Odtud $F(a) = \pi\big(\sqrt{a} - \log(1+\sqrt{a})\big) + C$. Jelikož F je spojitá v $0+$ (majoranta $\frac{\log(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}$ pro $a \in [0, 1]$) a přímý výpočet dává $F(0) = 0$, máme

$$F(a) = \pi\Big(\sqrt{a} - \log(1+\sqrt{a})\Big), \quad a \ge 0.$$

3. Spočtěte míru množiny:

$$M = \Big\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \ z\sqrt{x^2+y^2} < 2, \ \sqrt{x^2+y^2} < z+1, \ z > 0\Big\}.$$

Řešení. Ve válcových souřadnicích:

$$\lambda_3(M) = \int\limits_{\substack{0<hr<2\\ 0<r<h+1\\ -\pi\le\alpha<\pi}} r\,dr\,dh\,d\alpha = 2\pi\int_0^1\Big(\int_0^{h+1} r\,dr\Big)\,dh + 2\pi\int_1^\infty\Big(\int_0^{2/h} r\,dr\Big)\,dh$$

$$= \pi\int_0^1 (h^2+2h+1)\,dh + \pi\int_1^\infty \frac{4}{h^2}\,dh = \pi\Big(\frac{1}{3}+1+1+4\Big) = \frac{19}{3}\,\pi.$$

---

1. Spočtěte limitu $\lim_{n\to\infty} n\int_0^\infty (1+\frac{x}{n})^{-n}\sin\frac{x}{n}\,dx$.

Řešení.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty n\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{-n}\sin\frac{x}{n}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \Big(\lim_{n\to\infty}\Big(n\sin\frac{x}{n}\Big)\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{-n}\Big)\,dx = \int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \Gamma(2) = 1.$$

Záměna podle Lebesgueovy věty. Pokud $n\ge 3$, pak $\binom{n}{3}\ge\frac{n^3}{27}$ a tudíž podle binomické věty $(1+\frac{x}{n})^n\ge 1+\frac{x^3}{27}$. Dále $\sin\frac{x}{n}\le\frac{x}{n}$. Tedy majoranta integrandu je

$$\frac{27\,x}{27+x^3}.$$

2. Spočtěte

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-a^2x^2}}{x^2}\,dx.$$

Řešení. Máme

$$F'(a) = 2a\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx = 2\operatorname{sgn} a\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \pm\sqrt{\pi} \qquad (t=|a|\,x,\ a\ne 0).$$

Majoranta pro derivaci $qe^{-p^2x^2}$ pro $p<|a|<q$, $q>p>0$. Máme

$$F(a) = \sqrt{\pi}\,a + C_1,\quad a>0;\quad F(a) = -\sqrt{\pi}\,a + C_2,\quad a<0.$$

Přímým výpočtem dostaneme $F(0)=0$. Abychom odtud učinili závěr, že $F(a) = \sqrt{\pi}|a|$, $a\in\mathbb{R}$, musíme ještě ověřit spojitost F aspoň v nule. Majoranta pro spojitost je $\frac{1-e^{-q^2x^2}}{x^2}$ pro $|a|<q$, $q>0$.

3. Spočtěte integrál $\int_M \frac{x\,dx\,dy\,dz}{x^2+y^2}$**, kde**

$$M = \big\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : 0<xz<x^2+y^2<1,\ z>0\big\}.$$

Řešení. Ve válcových souřadnicích ($x=r\cos\alpha$, $y=r\sin\alpha$, $z=h$, Jakobián r) uvážíme, že podmínky $z>0$ a $xz>0$ dávají $x>0$ neboli $|\alpha|<\pi/2$. Máme

$$\int_M \frac{x\,dx\,dy\,dz}{x^2+y^2} = \int\limits_{\substack{0<h\cos\alpha<r<1\\ -\pi/2<\alpha<\pi/2}} \cos\alpha\,dr\,dh\,d\alpha$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(\int_0^1\Big(\int_0^{r/\cos\alpha}\cos\alpha\,dh\Big)\,dr\Big)\,d\alpha = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(\int_0^1 r\,dr\Big)\,d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$