

I. TAYLORŮV POLYNOM

1. Najděte Taylorův polynom k -tého řádu v bodě 0 pro funkce:

- a) $\operatorname{tg}(x)$, $k = 3$ b) $\sin(\sin x)$, $k = 5$ c) $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$, $k = 4$ d) $\cos(\sin x)$, $k = 5$ e) $\sin(1 - \cos x)$, $k = 3$
 f) e^{2x-x^2} , $k = 5$ g) $\frac{x}{e^x-1}$, $k = 4$ h) $\log(\cos x)$, $k = 6$

2. Odhadněte absolutní chybu aproximace $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ na intervalu $[-1/2, 1/2]$.

3. Spočtěte $\sqrt{5}$ s přesností 10^{-2}

4. Spočtěte limity

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 - \cot^2\left(\frac{1}{n}\right) \right)$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\sin x) - \sin(2x) \sqrt[3]{1+x^2}}{x^5}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$
 e) $\lim_{x \rightarrow 0} n^4 \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \exp\left(-\frac{1}{2n^2}\right) \right)$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$ g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^{x^2}) - 1 - 1 + \cos(\sqrt{2}x)}{x^4}$
 h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\sin x)^x - \exp(x^2) + \frac{x^3}{2}}{x^4}$ i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[6]{n^5} \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{\sqrt[6]{n}} \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \right)$

Další příklady k procvičení lze nalézt například v sekci I zde:

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/archiv/MFF/MA/ma2-2015-16.pdf>.

Příklady zkouškové obtížnosti lze nalézt ve zkouškových písemkách z Matematiky III, které jsou vystaveny zde:

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis>

—————VÝSLEDKY—————

- 1.** a) $x + \frac{1}{3}x^3$ b) $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5$ c) $1 + 2x + 2x^2 - 2x^4$ d) $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$ e) $\frac{x^2}{2}$ f) $1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5$
 g) $1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4$ h) $-\frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6$
2. $\frac{1}{3840}$
3. $2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} + \frac{1}{2^9} - \frac{5}{2^{14}} = 2.23602294922$
4. a) $\frac{1}{120}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{1}{24}$ e) $-\frac{1}{12}$ f) $\frac{1}{3}$ g) $\frac{2}{3}$ h) $\frac{1}{6}$

II. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE, ÚVOD

Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

1. Příklady na integrování "přímo":

a) $\int x^9 + \frac{1}{x} - 5e^x + x^{-3} - \cos x \, dx$ b) $\int 2e^{3x} - \sqrt[5]{5-x} \, dx$ c) $\int \frac{x^2+3x+6}{x^4} \, dx$ d) $\int x(1-x)^{10} \, dx$

2. Příklady na integrování "per partes":

a) $\int x^3 \sin x \, dx$ b) $\int e^x \cos x \, dx$ c) $\int x^n e^x \, dx, n \in \mathbb{N}$ d) $\int x \log x \, dx$ e) $\int x e^x \cos x \, dx$

3. Příklady na integrování pomocí substituce:

a) $\int \cotg x \, dx$ b) $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3} \, dx$ c) $\int \frac{x}{1+x^4} \, dx$ d) $\int \frac{1}{x \log x} \, dx$ e) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \, dx$ f) $\int \frac{1}{x \log x \log(\log x)} \, dx$

4. Další příklady k procvičení:

a) $\int (1 - \frac{1}{x^2}) \sqrt{x} \sqrt{x} \, dx$ b) $\int (2^x + 3^x)^2 \, dx$ c) $\int \frac{1}{x^2} \sin(\frac{1}{x}) \, dx$ d) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} \, dx$ e) $\int \frac{x^2}{(8x^3+27)^{2/3}} \, dx$
 f) $\int \frac{\arctg x}{1+x^2} \, dx$ g) $\int \frac{2^{2x}}{9^x - 4^x} \, dx$ h) $\int \arctg x \, dx$ i) $\int x^2 \sin(2x) \, dx$ j) $\int \sqrt{x} \log^2 x \, dx$ k) $\int x^2 e^{-2x} \, dx$
 l) $\int \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 \, dx$ m) $\int x^5 e^{x^3} \, dx$ n) $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$ o) $\int x \sin \sqrt{x} \, dx$ p) $\int \cos^2 x \, dx$

—————VÝSLEDKY—————

1. a) $\frac{x^{10}}{10} + \log|x| - 5e^x - \frac{1}{2x^2} - \sin x$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ b) $\frac{2}{3}e^{3x} + \frac{5(5-x)^{\frac{6}{5}}}{6}, x \in \mathbb{R}$
 c) $-\frac{1}{x} - \frac{3}{2x^2} - \frac{2}{x^3}$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ d) $-\frac{(1-x)^{11}}{11} + \frac{(1-x)^{12}}{12}$
 2. a) $-x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x, x \in \mathbb{R}$ b) $\frac{1}{2}(e^x \sin x + e^x \cos x), x \in \mathbb{R}$ c) $I_n := \int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n I_{n-1}; I_1 := x e^x - e^x, x \in \mathbb{R}$
 d) $\frac{1}{4}(2x^2 \log x - x^2), x \in (0, \infty)$ e) $\frac{1}{2}e^x(x \sin x + x \cos x - \sin x), x \in \mathbb{R}$
 3. a) $\log|\sin x|$ na každém z intervalů $(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$
 b) $\frac{1}{3} \operatorname{tg} x^3$ na každém z intervalů $(\sqrt[3]{-\frac{\pi}{2} + k\pi}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + k\pi}), k \in \mathbb{Z}$ c) $\frac{1}{2} \arctg x^2, x \in \mathbb{R}$
 d) $\log|\log x|$ na $(0, 1)$ a $(1, \infty)$ e) $\sqrt{x^2+5}, x \in \mathbb{R}$ f) $\log|\log(\log x)|$ na $(1, e)$ a (e, ∞)
 4. a) $\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}, D_f = (0, \infty)$ b) $\frac{4^x}{\log 4} + 2\frac{6^x}{\log 6} + \frac{9^x}{\log 9}, D_f = \mathbb{R}$ c) $\cos(\frac{1}{x}), D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 d) $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}, D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ e) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$
 f) $\frac{1}{2} \arctg^2 x, D_f = \mathbb{R}$ g) $-\frac{1}{2\log \frac{2}{3}} \log|1 - (\frac{2}{3})^{2x}|, D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 h) $x \arctg x - \frac{1}{2} \log(1+x^2), D_f = \mathbb{R}$ i) $-\frac{2x^2-1}{4} \cos(2x) + \frac{x}{2} \sin(2x), D_f = \mathbb{R}$
 j) $\frac{2}{3}x^{3/2}(\log^2 x - \frac{4}{3} \log x + \frac{8}{9}), D_f = (0, \infty)$ k) $-\frac{e^{-2x}}{2}(x^2 + x + \frac{1}{2}), D_f = \mathbb{R}$
 l) $-\frac{1}{x}(\log^2 x + 2 \log x + 2), D_f = (0, \infty)$ m) $\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}, D_f = \mathbb{R}$ n) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}, D_f = (0, \infty)$
 o) $2(6-x)\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - 6(2-x) \sin \sqrt{x}, D_f = (0, \infty)$ p) $\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}, D_f = \mathbb{R}$

II. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE, POKRAČOVÁNÍ

Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

5. Příklady na integrování pomocí druhé věty o substituci:

a) $\int \sqrt{4-x^2} dx$ b) $\int \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} dx$ c) $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}} dx$ ($a > 0$)

6. Příklady, kde se musí funkce "lepit":

a) $\int |x| dx$ b) $\int |\cos x| dx$ c) $\int \max\{x, x^2\} dx$ d) $\int \sqrt{x^6} dx$ e) $\int \sin |2x-1| dx$ f) $\int |\sin x + \cos x| dx$
g) $\int e^{-|x|} dx$ h) $\int |2x+1| dx$

7. Integrace racionálních funkcí:

a) $\int \frac{5x^6-20x^5+20x^4+x^2-4x+11}{(x-2)^2} dx$ b) $\int \frac{2x+1}{x^2+4x-5} dx$ c) $\int \frac{8x^3-5x^2-15x+24}{(x+1)^2(2x^2-6x+5)} dx$ d) $\int \frac{3x+1}{(9x^2-12x+6)^2} dx$
e) $\int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2} dx$ f) $\int \frac{1}{x} \frac{\log(2x)}{\log^2(x)+3} dx$

8. Goniometrické substituce:

a) $\int \frac{\sin^3 x + \sin x}{\cos^3 x + \cos x} dx$ b) $\int \frac{1}{(2+\cos x) \sin x} dx$ c) $\int \frac{1}{\cos^2 x (4 \sin^2 x - 1)} dx$ d) $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx$ e) $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx$ f) $\int \frac{1}{5 + \cos x} dx$
g) $\int \frac{1}{(\sin^2 x + 2 \cos^2 x)^2} dx$

—————VÝSLEDKY—————

5. a) $2 \arcsin \frac{x}{2} + \sin(2 \arcsin \frac{x}{2}) = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2}$, $D_f = (-2, 2)$ b) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $D_f = (-1, 1)$
c) $\frac{1}{a^2} \sin(\operatorname{arctg} \frac{x}{a}) = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2+x^2}}$, $D_f = \mathbb{R}$

6. a) $\frac{1}{2}|x|x$, $x \in \mathbb{R}$ b) $F(x) = \begin{cases} \sin x + 4k & x \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi], k \in \mathbb{Z} \\ -\sin x + 4k + 2 & x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 3\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

c) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^2}{2} & x \in [0, 1] \\ \frac{x^3}{3} + \frac{1}{6} & x \in (1, \infty) \end{cases}$ d) $\frac{1}{4}|x|x^3$, $x \in \mathbb{R}$ e) $F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \cos(2x-1) & x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \cos(2x-1) - 1 & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

f) $F(x) = (-1)^k (-\cos x + \sin x) + k2\sqrt{2}$, $x \in [-\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + (k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$

g) $F(x) = \begin{cases} e^x - 2 & x < 0 \\ -e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$ h) $F(x) = \begin{cases} -(x^2+x) & x < -\frac{1}{2} \\ x^2+x+\frac{1}{2} & x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$

7. a) $x^5 + x - \frac{7}{x-2}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ b) $\frac{3}{2} \log|x+5| + \frac{1}{2} \log|x-1|$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, -5\}$

c) $3 \log|x+1| - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2} \log(2x^2-6x+5) + 2 \operatorname{arctg}(2x-3)$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

d) $-\frac{1}{6(9x^2-12x+6)} + \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg}(\frac{3x-2}{\sqrt{2}}) + \frac{3x-2}{4(9x^2-12x+6)} = \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg}(\frac{3x-2}{\sqrt{2}}) + \frac{9x-8}{12(9x^2-12x+6)}$, $D_f = \mathbb{R}$

e) $-\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \log|e^x-1| + \frac{1}{6} \log(e^x+2)$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ f) $\frac{1}{2} \log(\log^2 x + 3) + \frac{\log 2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\frac{\log x}{\sqrt{3}})$, $D_f = (0, \infty)$

8. a) $\frac{3}{2} \log(\cos^2 x + 1) - 2 \log|\cos x|$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ b) $\frac{1}{3} \log(\cos x + 2) - \frac{1}{2} \log(\cos x + 1) + \frac{1}{6} \log(1 - \cos x) = \frac{1}{6} \log\left(\frac{(1-\cos x)(\cos x+2)^2}{(1+\cos x)^3}\right)$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}$ c) $\frac{1}{3} \operatorname{tg} x + \frac{2}{3\sqrt{3}} \log\left|\frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1}\right|$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi\}$

d) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\sin^2 x)$, $D_f = \mathbb{R}$

e) $F(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + k\pi(1 - 1/\sqrt{2}) & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k\pi(1 - 1/\sqrt{2}) & x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

f) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + k\frac{\pi}{\sqrt{6}} & \text{pro } x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2\sqrt{6}} + k\frac{\pi}{\sqrt{6}} & \text{pro } x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

g) $F(x) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\operatorname{tg} x}{4(\operatorname{tg}^2 x + 2)} + k\pi\frac{3\sqrt{2}}{8} & \text{pro } x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} \frac{3\sqrt{2}}{8} + k\pi\frac{3\sqrt{2}}{8} & \text{pro } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

II. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE, KONEC

Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

9. Příklady s odmocninou:

a) $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$ b) $\int \frac{x}{\sqrt{-x^2+2x+8}} dx$ c) $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x^2} dx$ d) $\int \sqrt{x^2+2x-3} dx$

—————VÝSLEDKY—————

9. a) $\log(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1) - \log\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right| - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, D_f = \mathbb{R} \setminus (-1, 1]$
b) $2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+2}{4-x}} - \sqrt{-x^2+2x+8}, D_f = (-2, 4)$
c) $\frac{1}{2} \log \left| \frac{2\sqrt{x^2+x+1}-x-2}{x} \right| - \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} + \log(2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1), D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
d) $\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x-3} - 2 \log(x+1+\sqrt{x^2+2x-3}), D_f = \mathbb{R} \setminus (-3, -1)$

Další příklady k procvičení lze nalézt například v kapitole 9 zde:

<http://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html>.

III. NEWTONŮV INTEGRÁL

Vypočtěte následující integrály

1. a) $\int_0^2 |1-x| dx$ b) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+3x+2} dx$ c) $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx$ d) $\int_{\frac{1}{e}}^e |\log x| dx$ e) $\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x-1} dx$
f) $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$
2. a) $\int_{-1}^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}} dx$ b) $\int_0^{5\pi} \frac{1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx$ c) $\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{-x^2+4x-3}} dx$ d) $\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{\cos 2x}{|\sin x - \cos x|} dx$
e) $\int_0^{6\pi} x \frac{\sin(x^2)}{2+\sin(x^2)} dx$ (Hint: pro výpočet integrálu z $\frac{\sin(t)}{2+\sin(t)}$ se můžete podívat do poznámek k přednášce)
3. a) $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+1} dx$ b) $\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x dx$ c) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin x} dx$ d) $\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} dx$

Další příklady k procvičení lze nalézt například v sekci V zde:

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/archiv/MFF/MA/ma2-2016-17.pdf>

a také v sekcích VII, IX zde:

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ma215-cv.pdf>

a také v kapitole 10 zde:

<http://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html>

—————VÝSLEDKY—————

1. a) 1 b) $\log 2$ c) $200\sqrt{2}$ d) $2 - \frac{2}{e}$ e) $2 - \frac{\pi}{2}$ f) 4π
2. a) π b) $5\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ c) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ d) -1 e) $57\pi(1 - 2\frac{\sqrt{3}}{3}) + \frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(18\pi^2)) - \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}(18\pi^2)+1}{\sqrt{3}}\right)$
3. a) $\frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$ b) $\frac{1}{6}(\log 2 - 1 + \pi/2)$ c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}} \log\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \log(1+\sqrt{2})$

IV. KONVERGENCE NEWTONOVA INTEGRÁLU

1. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů

a) $\int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1} dx$ b) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} dx$ c) $\int_0^1 \frac{\log(1-\cos x)}{\sqrt[3]{x(x-1)}} dx$ d) $\int_1^\infty \frac{e^x}{x^4} dx$ e) $\int_8^\infty \frac{x+1}{(x+4)^3} \sin x dx$

2. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}} dx$ b) $\int_0^1 (\log x)e^{-x^2} dx$ c) $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^2} dx$ d) $\int_1^\infty \sin^2 \frac{1}{x} dx$ e) $\int_0^1 \frac{1}{e^x-\cos x} dx$
f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x \cos x}} dx$ g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x \sqrt{\cos x}}} dx$ h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx$ i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} dx$ j) $\int_0^1 x^{-10x} dx$ k) $\int_0^1 \frac{\log(1-x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx$
l) $\int_0^\infty \pi - 2 \arctan x dx$ m) $\int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^2(1/x)} dx$ n) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-\sqrt[3]{x}}} dx$

3. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů (příklady zkouškové obtížnosti)

a) $\int_1^\infty \sqrt[4]{e^{1/x^2} - e^{-1/x^2}} \frac{\log(x+1)}{x+1} dx$ b) $\int_0^1 \log(\operatorname{arctg} x) \frac{\pi/2 - \arcsin x}{(e^{1-x}-1)^2} dx$ c) $\int_0^5 \frac{\log(x^2-10x+26)}{xe^{1/x}(5-x)^{5/2}} dx$
d) $\int_1^\infty \frac{(1-\cos \frac{1}{x})^{3/4}}{\sqrt{\sin \frac{1}{x}}} \operatorname{arctg} \left(3 + \frac{\log x}{x} \right) dx$ e) $\int_0^1 \frac{e^{2x^2}-e^{x^2}}{x^3 \sqrt{\sin x}} \log(2 + \operatorname{arctg} x) dx$

—————VÝSLEDKY—————

1. a) K (konverguje) b) K c) K d) D (diverguje) e) K
2. a) K b) K c) D d) K e) D f) D g) K h) D i) K j) K k) K l) D m) D n) K
3. a) K b) D c) K d) D e) D

V. RIEMANNŮV-STIELTJESŮV INTEGRÁL

1. Spočítejte hodnotu následujících Riemannových-Stieltjesových integrálů

a) $\int_0^1 x^2 dx^3$ b) $\int_0^1 x^2 de^x$ c) $\int_1^e (x+4) d(e^x + \log x)$
d) $\int_0^3 e^x dg(x)$, kde $g(x) := \begin{cases} 1 & \text{pokud } 0 \leq x < 1 \\ 3 & \text{pokud } 1 \leq x \leq 2 \\ -1 & \text{pokud } 2 < x \leq 3 \end{cases}$ e) $\int_1^3 x^2 dg(x)$, kde $g(x) := \begin{cases} 1 & \text{pokud } x = 1 \\ 2 & \text{pokud } 1 < x < 2 \\ 3 & \text{pokud } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

—————VÝSLEDKY—————

1. a) $\frac{3}{5}$ b) $e - 2$ c) $(e+3)e^e + 3 - 3e$ d) $2e - 4e^2$ e) 5

VI. OTEVŘENÉ A UZAVŘENÉ MNOŽINY, SPOJITOST, PARCIÁLNÍ DERIVACE

1. Pomocí vět z přednášky dokažte, že funkce $f(x, y) = (xy + \sin(e^{x+y}))^2$ je spojitá.

2. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené ev. uzavřené a určete vnitřek.

- a) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ b) $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y > 0\}$ c) $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + e^y > 17\}$
 d) $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : |x - y| = x - y\}$ e) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y > 0, x + y = 2, z \leq 0\}$

3. Spočtěte parciální derivace funkcí všude, kde existují

- a) e^{xy} b) $xy + yz + zx$ c) $|x| \cdot |y|$ d) $|y + \cos x|$ e) $f(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{-\pi}{x^2+3xy+3y^2}} & (x, y) \neq 0, \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

4. Určete a nakreslete definiční obor funkce f a vyšetřete její parciální derivace

- a) $f(x, y) = \arcsin \frac{|y|}{|x|+1}$ b) $f(x, y) = \sqrt{y^6 - x^3}$

Další příklady k procvičení lze nalézt například v sekci II zde:

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/archiv/FSV/m2-2015-16.pdf> a také v sekci IX zde:

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/archiv/MFF/MA/ma2-2016-17.pdf>

Příklady zkouškové obtížnosti lze čerpat ze zkouškových písemek z Matematiky II na FSV zde: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis>

—————VÝSLEDKY—————

2. a) Množina je uzavřená s prázdným vnitřkem b) Množina není uzavřená ani otevřená. Vnitřek je $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y > 0\}$ c) Množina není uzavřená, je otevřená d) Množina je uzavřená, není otevřená, vnitřek $\{[x, y] : x > y\}$ e) Ani uzavřená ani otevřená, vnitřek prázdný

3. a) $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$ pro $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. b) $\frac{\partial f}{\partial x} = y + z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x + y$, $\frac{\partial f}{\partial z} = x + y$ pro $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = |y| \operatorname{sgn} x$ pro $x \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = |x| \operatorname{sgn} y$ pro $y \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ pro $y \neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ pro $x \neq 0$ neexistují. d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\operatorname{sgn}(y + \cos x) \cdot \sin x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \operatorname{sgn}(y + \cos x)$, pokud $y \neq -\cos x$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, -\cos x)$ neexistuje pro $x \in \mathbb{R}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(k\pi, (-1)^{k+1}) = 0$ pro $k \in \mathbb{Z}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, -\cos x)$ neexistuje pro $x \neq k\pi$. e) $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-\frac{\pi}{x^2+3xy+3y^2}} \cdot \frac{\pi(2x+3y)}{(x^2+3xy+3y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-\frac{\pi}{x^2+3xy+3y^2}} \cdot \frac{\pi(3x+6y)}{(x^2+3xy+3y^2)^2}$ pro $(x, y) \neq (0, 0)$; v bodě $(0, 0)$ jsou obě parciální derivace nulové.

4. viz. výsledky zkouškových písemek z Matematiky II na FSV zde: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis>. Konkrétněji, viz. varianta A z roku 2004/2005 a varianta D z roku 2010/2011.

VII. IMPLICITNÍ FUNKCE

1. UkaŹte, Źe daná rovnice urřuje v jistém okolí bodu $M = (m_1, m_2)$ implicitně zadanou funkci $y = \varphi(x)$. Spočtěte $\varphi'(m_1)$ a $\varphi''(m_1)$.

(i) $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$, $M = (0, 1)$

(ii) $(x^2 + y^2)^2 - 3x^2y - y^3 = 0$, $M = (0, 1)$

(iii) $x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$, $M = (1, 1)$

(iv) $x^y + y^x = 2y$, $M = (1, 1)$

(v) $\cos(x + y^2) + \sin(x^2 + y) = 1$, $M = (-1, -1)$

(vi) $\log(x + y^3) + e^{x+2y} = 1$, $M = (2, -1)$

2. UkaŹte, Źe rovnice $y - \frac{1}{2} \sin y = x$ urřuje v jistém okolí bodu (π, π) implicitně zadanou funkci $y = \varphi(x)$. Najděte rovnici tečny v bodě (π, π) .

—————VÝSLEDKY—————

1. (i) $\varphi'(0) = 2$, $\varphi''(0) = -14$, (ii) $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = 2$, (iii) $\varphi'(1) = -1$, $\varphi''(1) = -\frac{2}{3}$, (iv) $\varphi'(1) = 1$, $\varphi''(1) = 4$,
 (v) $\varphi'(-1) = 2$, $\varphi''(-1) = 7$, (vi) $\varphi'(2) = -\frac{2}{5}$, $\varphi''(2) = \frac{24}{125}$
 2. $y = \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}$

VIII. LOKÁLNÍ EXTRÉMY

1. Nalezněte lokální extrémy následujících funkcí:

- (i) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$
- (ii) $f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2$
- (iii) $f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$
- (iv) $f(x, y) = (x - y + 1)^2$
- (v) $f(x, y) = e^{x^2 - y}(5 - 2x + y)$
- (vi) $f(x, y) = 2x^3 + 9xy^2 + 15x^2 + 27y^2$

2. Určete, zda jsou následující množiny kompaktní:

- (i) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 \leq 1\}$
- (ii) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1\}$
- (iii) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 5y^2 \leq 3\}$
- (iv) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^6 \leq y^6\}$
- (v) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5, y > 0\}$
- (vi) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$
- (vii) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}\}$

————VÝSLEDKY————

1. (i) $(1, 1)$ – ostré lokální minimum, (ii) $(0, 2)$ – ostré lokální minimum, (iii) není extrém, (iv) neostré lokální minimum na množině $\{(x, y) : y = x + 1\}$, (v) není extrém, (vi) $(0, 0)$ – ostré lokální minimum, $(-5, 0)$ – ostré lokální maximum
2. (i) ano, (ii) ne, (iii) ano, (iv) ne, (v) ne, (vi) ano, (vii) ne

IX. GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

1. Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M :

- (i) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 = 0\}$
- (ii) $f(x, y) = xy$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + y^2 = 6\}$
- (iii) $f(x, y) = 4x + 3y - 4$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1\}$
- (iv) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y + 3y^3$, $M = [-1, 1]^2$
- (v) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - x + 18y + 4$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 4\}$
- (vi) $f(x, y) = x^4y$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 16, x \geq -1\}$
- (vii) $f(x, y) = 2x + 4y$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$
- (viii) $f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-2x^2 - y^2}$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$

—————VÝSLEDKY—————

1. (i) maximum 2 v bodech $(1, 1)$, $(-1, -1)$, minimum $\frac{1}{2}$ v bodech $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; (ii) maximum $\sqrt{3}$ v bodech $(1, \sqrt{3})$, $(-1, -\sqrt{3})$, minimum $-\sqrt{3}$ v bodech $(-1, \sqrt{3})$, $(1, -\sqrt{3})$; (iii) maximum 11 v bodě $(\frac{9}{5}, \frac{13}{5})$, minimum 1 v bodě $(\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$; (iv) maximum 3 v bodě $(0, 1)$, minimum -3 v bodě $(0, -1)$; (v) maximum 40 v bodě $(4, 4)$, minimum 4 v bodě $(0, 0)$; (vi) maximum $\frac{128}{5\sqrt[4]{5}}$ v bodě $(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}})$, minimum $-\frac{128}{5\sqrt[4]{5}}$ v bodě $(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}})$; (vii) maximum 4 v bodě $(0, 1)$, minimum 0 v bodě $(0, 0)$; (viii) maximum $\frac{7}{4}e^{-\frac{1}{4}}$ v bodech $(0, \frac{1}{2})$, $(0, -\frac{1}{2})$, minimum 0 v bodě $(0, 0)$