NEKOMUTATIVNÍ HARMONICKÁ ANALÝZA

1. Univerzální obalující algebry
2. Verma moduly
3. Borel-Weil (-Bott)

1. Univerzální obalující algebry

· $\mathbb{k}$ těleso, $\mathfrak{g}$ Lieova algebra nad $\mathbb{k}$

· pro $\mathbb{k}$-vektorový prostor V definujme $\overbrace{T(V)}^{\text{tenzorová algebra nad } V} = T^0 \oplus T^1 \oplus T^2 \oplus \dots$, kde $T^0 := \mathbb{k}\cdot 1$, $T^1 := V$,

$T^2 := V \otimes V$, …, $T^k := \underbrace{V\otimes \dots \otimes V}_{k}$, přičemž $(v\otimes w)(\alpha,\beta) = \alpha(v)\cdot\beta(w)$ pro $v, w \in V$, $\alpha,\beta \in V^*$

atd. pro T^k

T^2: bilineární zobrazení (formy) $V^* \times V^* \longrightarrow \mathbb{k}$

T^k: k-lineární zobrazení (formy) $V^* \times \dots \times V^* \longrightarrow \mathbb{k}$

Tvrzení

Je-li A asociativní $\mathbb{k}$-algebra s 1kou a $\varphi: V \to A$ lineární, pak $\exists!\, \psi : T(V) \longrightarrow A$ hom. algeber

t.ž.
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook, "\subseteq"'] & A \\ T(V) \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$
komutuje.

Dk: $\psi(v_1\otimes\dots\otimes v_k) := \varphi(v_1)\cdot\varphi(v_2)\cdot\ldots\cdot\varphi(v_k)$ na homogenních čistých k-tenzorech

$\rightsquigarrow$ ověřit: dobře def. ~~,~~ $\square$

DEF.

Univerzální obalující algebra pro Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ je asoc. algebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/J$,

kde J je oboustranný ideál v $T(\mathfrak{g})$ generovaný množinou $\{ \underbrace{x\otimes y}_{\in T^2(\mathfrak{g})} - \underbrace{y \otimes x}_{\in T^2(\mathfrak{g})} - \underbrace{[x,y]}_{\in \mathfrak{g} = T^1(\mathfrak{g})} \mid x, y \in \mathfrak{g} \}$.

· značíme $\sigma: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\sigma(x) = x + J$

· je-li $\mathfrak{g}$ abelovská, pak $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/(x\otimes y - y\otimes x) = S(\mathfrak{g})$

Věta (univerzální vlastnost $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$)

Je-li A asociativní algebra s 1kou a $\varphi: \mathfrak{g} \longrightarrow \overbrace{A}^{[\,,\,]\dots\text{komutátor}}$ je homomorfismus Lieových algeber, pak

$\exists!\, \psi: \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$ hom. algeber t.ž. $\psi\circ\sigma = \varphi$, t.j.
$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma"'] & A \\ \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$
komutuje.

Důkaz

- $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ je generovaná $\sigma(\mathfrak{g})$ jako algebra $\rightsquigarrow$ definuje $\psi(\sigma(x)) = \varphi(x)$, $x \in \mathfrak{g}$
- pokud je ψ dobře def., pak je jediné také, že $\psi \circ \sigma = \varphi$, neboť $\sigma(\mathfrak{g})$ generuje $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$
- nechť $\tilde{\varphi}: T(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$ je hom. algeber z Tvrzení, t.j. $\tilde{\varphi}(x \otimes y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$, $x, y \in \mathfrak{g}$, atd.
- pak ψ je dobře def., pokud $J \subseteq \operatorname{Ker} \tilde{\varphi}$ ...

$$\begin{tikzcd} T(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"'] & A \\ \mathcal{U}(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/J \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

kanonická projekce

- pro generátory J to platí:

$$\tilde{\varphi}(x \otimes y - y \otimes x - [x,y]) = \varphi(x)\cdot\varphi(y) - \varphi(y)\cdot\varphi(x) - \varphi([x,y]) \stackrel{=}{=} [\varphi(x), \varphi(y)] - \varphi([x,y]) = 0$$

$\square$

Značení (k PBW větě)

1) $\{x_1, \dots, x_n\}$ ... báze $\mathfrak{g}$ nad $\Bbbk$, $y_i := \sigma(x_i) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, pro $I = (i_1, \dots, i_p) \subseteq \{1, \dots, n\}$ značí $y_I = \underbrace{y_{i_1} \cdots y_{i_p}}_{\text{násobení v } \mathcal{U}(\mathfrak{g})}$

   $\hookrightarrow \sigma: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$

2) $i \leq I \iff \forall k \in I: i \leq I$

3) $\mathcal{U}_p(\mathfrak{g}) := \pi(T^0 \oplus \dots \oplus T^p)$, kde $\pi: T(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/J$

   (taky $\mathcal{U}_p$)

4) $\mathcal{P} := \Bbbk[z_1, \dots, z_n]$, $\mathcal{P}_q :=$ polynomy stupně $\leq q$

Lemma

Nechť $\pi \in S_p$ je permutace, $a_i \in \mathfrak{g}$ pro $i = 1, \dots, p$. Pak $\sigma(a_1)\dots\sigma(a_p) - \sigma(a_{\pi(1)})\dots\sigma(a_{\pi(p)}) \in \mathcal{U}_{p-1}(\mathfrak{g})$

Důkaz

- nechť $\pi = (1\ 2)$ je transpozice
- pak $\sigma(a_1)\sigma(a_2)\dots\sigma(a_p) - \sigma(a_2)\sigma(a_1)\sigma(a_3)\dots\sigma(a_p) = \big(\sigma(a_1)\sigma(a_2) - \sigma(a_2)\sigma(a_1)\big)\sigma(a_3)\dots\sigma(a_p) =$

$$= [\sigma(a_1), \sigma(a_2)]\sigma(a_3)\dots\sigma(a_p) = \sigma(\underbrace{[a_1, a_2]}_{\in \mathfrak{g} = T^1(\mathfrak{g})})\sigma(a_3)\dots\sigma(a_p) \in \mathcal{U}_{p-1}$$

a podobně pro $\pi = (i\ i+1)$

- nechť $\pi = t_1 \dots t_m$ je součin transpozic, indukce na m
- pak $\sigma(a_1)\dots\sigma(a_p) - \sigma(a_{\pi(1)})\dots\sigma(a_{\pi(p)}) = \underbrace{\sigma(a_1)\dots\sigma(a_p) - \sigma(a_{t_m(1)})\dots\sigma(a_{t_m(p)})}_{\in \mathcal{U}_{p-1}} +$

$$+ \underbrace{\sigma(a_{t_m(1)})\dots\sigma(a_{t_m(p)}) - \sigma(a_{(t_1\dots t_{m-1})(t_m(1))})\dots\sigma(a_{(t_1\dots t_{m-1})(t_m(p))})}_{\in \mathcal{U}_{p-1} \text{ z IP}} \in \mathcal{U}_{p-1}$$

$\square$

Lemma

Množina $\{y_I \mid I \text{ neklesající}, |I| \leq p\}$ generuje vektorový prostor $\mathcal{U}_p(\mathfrak{g})$.

Důkaz

· indukce na p: $p=0 \to \mathcal{U}_0(\mathfrak{g}) = \pi(T^0(\mathfrak{g})) = \pi(\mathbb{k}\cdot 1) = \mathbb{k}\cdot 1$ -- generováno $y_\emptyset = 1$

$\hookrightarrow$ ideál $J \subseteq T(\mathfrak{g})$ je vlastní $\rightsquigarrow \mathbb{k} \cap J = 0$

· $p>0 \to \mathcal{U}_p = \pi(T^0 \oplus \dots \oplus T^p) = \pi(\mathbb{k}\cdot 1 \oplus \langle x_i\rangle_{\mathbb{k}} \oplus \langle x_i \otimes x_j\rangle_{\mathbb{k}} \oplus \dots \oplus \langle x_{i_1}\otimes\dots\otimes x_{i_p}\rangle_{\mathbb{k}}) =$

$= \mathbb{k}\cdot 1 + \langle y_i\rangle_{\mathbb{k}} + \langle y_i y_j\rangle_{\mathbb{k}} + \dots + \langle y_I\rangle_{\mathbb{k}, |I|=p}$

$\rightsquigarrow \mathcal{U}_p$ je generováno $\{y_I \mid |I| \leq p\}$ $\xrightarrow[+\,\mathrm{IP}]{\text{Lemma}}$ $\mathcal{U}_p$ je generováno $\{y_I \mid |I| \leq p,\ I \text{ neklesající}\}$ $\square$

Lemma

$\forall p \in \mathbb{N}_0\ \exists!\, f_p : \mathfrak{g} \otimes \mathcal{P}_p \longrightarrow \mathcal{P}$ lineární t.ž. $f_p|_{\mathfrak{g}\otimes\mathcal{P}_{p-1}} = f_{p-1}$ pro $p>0$ a platí:

a) $f_p(x_i \otimes z_I) = z_i z_I$ pro $i \leq I$, kde $|I| \leq p$ a $z_I = z_{i_1}\cdots z_{i_p}$ pro $I = (i_1, \dots, i_p)$,

b) $f_p(x_i \otimes z_I) - z_i z_I \in \mathcal{P}_{p-1}$ pro každé $i = 1,\dots,n$ a $z_I \in \mathcal{P}_p$, kde $\mathcal{P}_{-1} := \{0\}$,

c) $f_p(x_i \otimes f_{p-1}(x_j \otimes z_J)) - f_p(x_j \otimes f_{p-1}(x_i \otimes z_J)) = f_{p-1}([x_i, x_j] \otimes z_J)$ $\forall z_J \in \mathcal{P}_{p-1}$.

Důkaz

· $p=0 \rightsquigarrow$ def. $f_0(c x_i) = z_i$, $c \in \mathbb{k}$ $\rightsquigarrow$ a, b, c ✓

· $p>0$ (indukce):

· pro $i \leq I$ def. $f_p(x_i \otimes z_I) = z_i z_I$

· pokud $i \not\leq I$, pak píšeme $I = (i_1 \leq \dots \leq i_p)$ a položíme $j := i_1$, $J := (i_2 \leq \dots \leq i_p)$ $\rightsquigarrow j \leq J$ a $j < i$ $\rightsquigarrow j \leq \{i\} \cup J$

$\rightsquigarrow$ máme definováno $f_p(x_j \otimes \underbrace{z_{\{i\}\cup J}}_{= z_i z_J})$ a z IP máme f_{p-1} splňující a, b, c

· tedy můžeme definovat $f_p(x_i \otimes z_I) = f_p(x_i \otimes z_j z_J) \overset{\mathrm{IP}, a)}{=} f_p(x_i \otimes f_{p-1}(x_j \otimes z_J)) :=$ (def. pomocí c))

$:= \underbrace{f_p(x_j \otimes f_{p-1}(x_i \otimes z_J))}_{} + f_{p-1}([x_i, x_j] \otimes z_J)$

$\hookrightarrow$ def. z IP

$\hookrightarrow$ def., neboť $f_{p-1}(x_i \otimes z_J) = z_i z_J + w$ pro nějaké $w \in \mathcal{P}_{p-2}$,

tedy $f_p(x_j \otimes f_{p-1}(x_i \otimes z_J)) = f_p(x_j \otimes z_i z_J) + f_p(x_j \otimes w)$

$\hookrightarrow$ o.k. ($j \leq \{i\} \cup J$) $\qquad \hookrightarrow = f_{p-1}(x_j \otimes w)$ def. z IP

· máme tedy definováno f_p, které automaticky splňuje a) a pokud $i \not\leq I$, pak splňuje c)

$\rightsquigarrow$ zbývá ověřit b) pro $i \not\leq I$ (pro $i \leq I$ je zdarma z a)) a c) pro $i \leq I$

$\hookrightarrow f_p(x_i \otimes z_I) - z_i z_I = \underbrace{f_p(x_j \otimes z_i z_J)}_{\overset{a)}{=}\, z_j z_i z_J = z_i z_I} + \underbrace{f_p(x_j \otimes w) + f_{p-1}([x_i, x_j] \otimes z_J)}_{\in \mathcal{P}_{p-1}} - z_i z_I \in \mathcal{P}_{p-1}$

· ověřme c), možnosti: $(i \le J$ nebo $j \le J)$ nebo $(i \not\le J \wedge j \not\le J)$

· z konstrukce c) platí pro $j \le J \wedge i > j$

· budeme značit $x_i(x_j z_J) := f_p(x_i \otimes f_{p-1}(x_j \otimes z_J))$ $\rightsquigarrow$ c): $x_i(x_j z_J) = x_j(x_i z_J) + [x_i, x_j] z_J$

· pokud $i \le j \le J$, pak $x_i(x_j z_J) \overset{a)}{=} x_i(z_j z_J) \overset{a)}{=} z_i z_j z_J$

a $x_j(x_i z_J) + \underbrace{f_p([x_i,x_j]\otimes z_J)}_{\text{zn.} = [x_i,x_j]z_J} = \begin{cases} \overset{i=j,\ a)}{=} x_j(z_i z_J) + 0 \overset{a)}{=} z_j z_i z_J \ ✓ \\ \overset{i<j,\ c)\ \text{def.}}{=} x_i(x_j z_J) + \underbrace{[x_j,x_i]z_J + [x_i,x_j]z_J}_{=0} \overset{a)\times 2}{=} z_i z_j z_J \ ✓ \end{cases}$

a pokud $j < i \le J$, pak zaměníme i za j a máme c)

· teď nechť $i \not\le J \wedge j \not\le J$ a pišme $J = (k, K)$, pak $j > k$ a $i > k$

· počítáme $x_i(x_j z_J) = x_i(x_j z_k z_K) \underset{k \le (j,K)\ ✓}{\overset{a),\ i>k}{=}} x_i(x_j(x_k z_K)) \underset{k\le K,\ j>k\ ✓}{\overset{c)}{=}} x_i(x_k(x_j z_K) + [x_j,x_k] z_K) =$

$= x_i(x_k(x_j z_K)) + x_i([x_j,x_k]z_K) \overset{c)}{=} x_k(x_i(x_j z_K)) + [x_i,x_k](x_j z_K) + x_i([x_j,x_k]z_K) \overset{c),\ IP}{=}$ ↳ $|K| = p-2$

$= x_k(x_i(x_j z_K)) + [x_i,x_k](x_j z_K) + [x_j,x_k](x_i z_K) + [x_i,[x_j,x_k]]z_K$

· tedy $x_i(x_j z_J) - x_j(x_i z_J) \overset{\uparrow}{=} x_k(x_i(x_j z_K)) + [x_i,[x_j,x_k]]z_K - x_k(x_j(x_i z_K)) - [x_j,[x_i,x_k]]z_K$

$\overset{\text{Jacobi}}{=} x_k(x_i(x_j z_K)) - x_k(x_j(x_i z_K)) - [x_k,[x_i,x_j]]z_K \overset{\text{IP c)}}{=} x_k([x_i,x_j]z_K) - [x_k,[x_i,x_j]]z_K =$

$\overset{\text{IP c)}}{=} [x_i,x_j](\underbrace{x_k z_K}_{=z_k z_K}) + [x_k,[x_i,x_j]]z_K - [x_k,[x_i,x_j]]z_K \overset{a)}{=} [x_i,x_j]z_k z_K = [x_i,x_j]z_J$ □

Věta (PBW)

Je-li $\{x_1,\dots,x_n\}$ báze $\mathfrak{g}$, $\sigma: \mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ je strukturní zobrazení $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ a $y_i := \sigma(x_i)$, pak množina $\{y_I = y_{i_1}\cdots y_{i_p} \mid I=(i_1\le\dots\le i_p),\ p\in\mathbb{N}_0\}$ tvoří bázi $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Speciálně, σ je injektivní.

Důkaz

· Lemma dává reprezentaci $\mathfrak{g}$ na prostoru polynomů $\mathcal{P} = \Bbbk[z_1,\dots,z_n]$:

· nechť $\rho: \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathcal{P})$, $\rho(X) z_J := f_p(X\otimes z_J)$, $X\in\mathfrak{g}$, $z_J \in \mathcal{P}_p$

· ρ je reprezentace: $\rho([X,Y])z_J = f_p([X,Y]\otimes z_J) \overset{c)}{=} f_{p+1}(X\otimes f_p(Y\otimes z_J)) -$

$- f_{p+1}(Y\otimes f_p(X\otimes z_J)) = \rho(X)(f_p(Y\otimes z_J)) - \rho(Y)(f_p(X\otimes z_J)) = \rho(X)\rho(Y)(z_J) - \rho(Y)\rho(X)(z_J)$

$= [\rho(X),\rho(Y)](z_J)$ ✓

· z univerzální vlastnosti $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ máme hom. algeber $\rho': \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}(P)$ t. ž. $\rho = \rho' \circ \sigma$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathrm{End}(P) \\ \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \arrow[ur, dashed, "\exists! \rho'"'] & \end{tikzcd}$$

· ρ' použijeme k ověření lineární nezávislosti $\{y_I \mid I \text{ neklesající}\}$:

· nechť $\sum_I c_I y_I = 0$ je konečná suma, $c_I \in \mathbb{k}$

· potom $0 = \sum_I c_I \rho'(y_I) = \sum_{\substack{I \\ \shortparallel \\ (i_1 \leq \ldots \leq i_p)}} c_I \rho'(y_{i_1}) \ldots \rho'(y_{i_p}) = \sum_{I=(i_1 \leq \ldots \leq i_p)} c_I \rho(x_{i_1}) \ldots \rho(x_{i_p})$

· aplikujeme nulový operátor na $1 \in P$: $0 = \sum c_I \rho(x_{i_1}) \ldots \rho(x_{i_p})(1) \overset{\text{Lemma a)}}{=} \sum c_I \rho(x_{i_1}) \ldots \rho(x_{i_{p-1}})(z_{i_p}) =$

$\overset{a)}{=} \sum c_I \rho(x_{i_1}) \ldots \rho(x_{i_{p-2}})(z_{i_{p-1}} z_{i_p}) \overset{a)}{=} \ldots \overset{a)}{=} \sum c_I z_I$

díky $I = (i_1 \leq \ldots \leq i_p)$

$\Rightarrow c_I = 0 \ \forall I = (i_1 \leq \ldots \leq i_p)$ díky lineární nezávislosti monomů z_I v P

□

Filtrace a gradace $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$

· platí $\mathcal{U}_0(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{U}_1(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{U}_2(\mathfrak{g}) \subseteq \ldots$, $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \bigcup_{p \in \mathbb{N}_0} \mathcal{U}_p(\mathfrak{g})$, $\mathcal{U}_p(\mathfrak{g}) \cdot \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{U}_{p+q}(\mathfrak{g})$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ je tzv. filtrovaná $\mathbb{k}$-algebra

· definujme $Gr_p := \mathcal{U}_p(\mathfrak{g}) / \mathcal{U}_{p-1}(\mathfrak{g})$ pro $p > 0$ a $Gr_0 := \mathcal{U}_0(\mathfrak{g}) = \mathbb{k}.1$

$\rightsquigarrow$ $Gr\, \mathcal{U}(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{p \in \mathbb{N}_0} Gr_p$ je asociovaná graduovaná algebra

· z PBW máme vnoření $\mathfrak{g} \overset{\sigma}{\hookrightarrow} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ $\rightsquigarrow$ dále identifikujeme $\mathfrak{g}$ s $\sigma(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{U}_1(\mathfrak{g})$

Věta

$Gr\, \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g})$ ... symetrická algebra na $\mathfrak{g}$

Důkaz

nechť $x_1, \ldots, x_n$ je báze $\mathfrak{g}$ a definujme $\varphi: S(\mathfrak{g}) \longrightarrow Gr\, \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\varphi(x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}) = [x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}]$,

kde pro $x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} \in \mathcal{U}_p(\mathfrak{g})$, t. ž. $\sum_{j=1}^n i_j = p$, píšeme $[x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}] := x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} + \mathcal{U}_{p-1}(\mathfrak{g}) \in Gr_p$

$\hookrightarrow$ stupeň filtrace $x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$ je p

· z PBW je φ lineární izomorfismus (převede bázi na bázi)

· φ je homomorfismus algeber; stačí ukázat, že $Gr\, \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ je komutativní:

· v $\mathcal{U}_2(\mathfrak{g})$ platí relace $x_i x_j = x_j x_i + \underbrace{[x_i, x_j]}_{\in \mathcal{U}_1(\mathfrak{g})}$ $\rightsquigarrow$ v Gr_2: $[x_i x_j] = [x_j x_i]$ (*)

· tedy nechť $\sum i_k = p$, $\sum j_k = m$ a počítejme $\underbrace{[x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n}]}_{\in Gr_m} \cdot \underbrace{[x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}]}_{\in Gr_p} =$

$= \underbrace{[x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}]}_{\in Gr_{m+p}} \overset{(*)}{=} [x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n - 1} x_1 x_n x_1^{i_1 - 1} \ldots x_n^{i_n}] \overset{(*)}{=} \ldots \overset{(*)}{=} [x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n}] = [x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}] \cdot [x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n}]$

□

Věta

$U(\mathfrak{g})$ je levo (i pravo) noetherovská.

Důkaz

- nechť $I_1 \subsetneq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$ je rostoucí řetězec levých ideálů v $U(\mathfrak{g})$
- pro ideál $I_i \subseteq U(\mathfrak{g})$ definujme $I_i^{(p)} := {}^{\textstyle (I_i \cap U_p(\mathfrak{g}))}\big/_{\textstyle U_{p-1}(\mathfrak{g})}$ a položme $J_i := \bigoplus_{p \in \mathbb{N}_0} I_i^{(p)} \subseteq Gr\, U(\mathfrak{g})$
- pak každý J_i je ideál v Gr: nechť $[\underbrace{j_0}_{\in Gr_0}] + \dots + [\underbrace{j_p}_{\in Gr_p}] \in J_i$ a $[X] \in Gr$, ~~tedy~~ $\cancel{[X] = [\underbrace{X_0}_{\in Gr_0}] + \dots + [\underbrace{X_m}_{\in Gr_m}]}$

  potom $X \cdot j_0 \in I_i, \dots, X \cdot j_p \in I_i$, neboť I_i je levý ideál v $U(\mathfrak{g})$

  $\rightsquigarrow [X]\cdot[j_0] + \dots + [X][j_p] \in J_i$

- lineární bijekce $U(\mathfrak{g}) \to Gr$, $y_I \mapsto [y_I]$ převede I_i na J_i $\rightsquigarrow$ máme řetězec $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots$ v $Gr \cong S(\mathfrak{g})$

  tedy se musí stabilizovat $\rightsquigarrow$ $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ se taky musí stabilizovat $\square$

Věta

$U(\mathfrak{g})$ je obor integrity.

Důkaz

- nechť $a = a_0 + \dots + a_p \in U_p(\mathfrak{g})$ je stupně filtrace p a $b = b_0 + \dots + b_m$ je stupně m
- indukcí na $p+m$ ukážeme, že $a \cdot b = 0 \implies a = 0$ nebo $b = 0$
- $p+m = 0 \to p = m = 0 \rightsquigarrow a, b \in U_0 = \mathbb{k} \to \checkmark$
- $p+m > 0 \rightsquigarrow a \cdot b = a_p b_m + \underbrace{\dots}_{\in U_{p+m-1}} = 0 \rightsquigarrow 0 = [a\cdot b] \underset{Gr_{p+m}}{=} [a_p b_m] = [a_p][b_m] \rightsquigarrow [a_p] = 0$ nebo $[b_m] = 0$

  $\rightsquigarrow a \in U_{p-1}$ nebo $b \in U_{m-1} \overset{IP}{\rightsquigarrow} a = 0$ nebo $b = 0$ $\square$

Kategoriální vlastnosti $U(\mathfrak{g})$

- nechť $\mathrm{Rep}\, \mathfrak{g}$ je kategorie reprezentací Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ (morfismy = splétající zobrazení) a $\mathrm{Mod}\, U(\mathfrak{g})$ je kategorie levých $U(\mathfrak{g})$-modulů
- pak máme ekvivalenci kategorií $\mathrm{Rep}\, \mathfrak{g} \overset{\simeq}{\rightleftarrows} \mathrm{Mod}\, U(\mathfrak{g})$

  $(\rho, V) \longmapsto (\tilde{\rho}, V)$ … univerzální vlastnost $U(\mathfrak{g})$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, hook, "\iota"'] & \mathrm{End}(V) \\ U(\mathfrak{g}) \arrow[ur, dashed, "\exists!\tilde{\rho}"'] & \end{tikzcd}$$

  $(\rho|_{\mathfrak{g}}, V) \longleftarrow\!\shortmid (\rho, V)$

  $\hookrightarrow$ $U(\mathfrak{g})$-modul s akcí $X \cdot v = \rho(X)v$, kde $\rho: U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(V)$, $X \in U(\mathfrak{g}), v \in V$

  restrikce má smysl, neboť $\mathfrak{g} \overset{\iota}{\subseteq} U(\mathfrak{g})$ (PBW)

· nechť Lie je kategorie Lieových algeber nad $\Bbbk$ a AssAlg$_1$ nechť je kategorie asoc. $\Bbbk$-algebar s 1kou

· pak $\mathcal{U}: \mathrm{Lie} \to \mathrm{AssAlg}_1$ je funktor: na objektech je $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ univerzální obalující algebra $\mathfrak{g}$;

je-li $T \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$, pak definujeme $\mathcal{U}(T): \mathcal{U}(\mathfrak{g}_1) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2)$

z univerzální vlastnosti pro diagram
$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g}_1 \arrow[r, "\sigma_2\circ T"] \arrow[d, hook, "\sigma_1"'] & \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2) \\ \mathcal{U}(\mathfrak{g}_1) \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\mathcal{U}(T)"'] & \end{tikzcd}$$
, kde $\sigma_2 \circ T: \mathfrak{g}_1 \xrightarrow{T} \mathfrak{g}_2 \overset{\sigma_2}{\hookrightarrow} \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2)$

... $\mathcal{U}$ je funktor: cvičení

· pro $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \in \mathrm{Lie}$ definujeme $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \in \mathrm{Lie}$ jako vektorový prostor $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ se závorkou

$$[a_1 + a_2, b_1 + b_2] := [a_1, b_1]_{\mathfrak{g}_1} + [a_2, b_2]_{\mathfrak{g}_2}, \quad \text{kde } a_1, b_1 \in \mathfrak{g}_1 \ \& \ a_2, b_2 \in \mathfrak{g}_2$$

· pro $A_1, A_2 \in \mathrm{AssAlg}_1$ definujeme násobení na $A_1 \otimes_{\Bbbk} A_2$ předpisem $(a_1 \otimes a_2)\cdot(b_1 \otimes b_2) = a_1 b_1 \otimes a_2 b_2$ rozšířeným lineárně na $A_1 \otimes_{\Bbbk} A_2$ $\rightsquigarrow$ máme $A_1 \otimes A_2 \in \mathrm{AssAlg}_1$

<u>Věta</u>

Pro $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \in \mathrm{Lie}$ platí $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g}_1) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2)$.

<u>Důkaz</u>

· nechť $x_1, \dots, x_n$ a $y_1, \dots, y_m$ jsou báze $\mathfrak{g}_1$ a $\mathfrak{g}_2$

· PBW: $\left.\begin{array}{l}\text{báze } \mathcal{U}(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2) \text{ jsou monomy tvaru } x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} y_1^{j_1} \dots y_m^{j_m} \\ \text{a báze } \mathcal{U}(\mathfrak{g}_1) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2) \text{ jsou tenzory tvaru } x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \otimes y_1^{j_1} \dots y_m^{j_m}\end{array}\right\}$ báze jsou v bijekci $\rightsquigarrow$ izo. vektorových prostorů ✓

· toto přiřazení je taky izo. algeber ... cvičení

$\square$

---

2. Verma moduly

DEF.

Nechť R je asoc. $\Bbbk$-algebra s 1kou, M je pravý R-modul a N je levý R-modul.

Definujeme $M \otimes_R N := M \otimes_{\Bbbk} N / \sim$, kde $m \otimes n \sim m' \otimes n' \iff \exists r \in R: (m' = m\cdot r \ \wedge \ n = r \cdot n')$ nebo $(m = m' \cdot r \ \wedge \ n' = r \cdot n)$.

Tedy $(m\cdot r) \otimes n = m \otimes (r \cdot n) \ \forall m \in M \ \forall n \in N \ \forall r \in R$.
v $M \otimes_R N$

<u>Struktura jednoduchých Lieových algeber nad $\mathbb{C}$</u>

· $\mathfrak{g}$ ... jednoduchá komplexní Lieova algebra (t.j. $\mathfrak{g}$ neobsahuje netriviální vlastní ideál a není abelovská)

· $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ... Cartanova podalgebra $\mathfrak{g}$ (t.j. maximální komutativní podalgebra)

· $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ je <u>kořen</u> pro $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, pokud $\alpha \neq 0$ a $\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}_H(X) = \alpha(H) X \ \ \forall H \in \mathfrak{h}\} \neq 0$

$\hookrightarrow \mathrm{ad}_H(X) := [H, X]$

· $\Phi := \{\text{kořeny pro } (\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\}$ ... kořenový systém

· platí $\mathfrak{g} = \left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha\right) \oplus \mathfrak{h}$, navíc $\mathfrak{h}^* = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\Phi$

· nechť $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\Phi$ je "reálná část" $\mathfrak{h}^*$, tedy platí $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$

· zvolme nenulový funkcionál $\varphi: \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ t.ž. $\Phi \cap \operatorname{Ker}\varphi = \emptyset$, tedy $\alpha \notin \operatorname{Ker}\varphi$ $\forall \alpha\in\Phi$

· řekneme, že kořen $\alpha\in\Phi$ je <u>kladný</u>, pokud $\varphi(\alpha) > 0$

↳ píšeme $\alpha > 0$, taky $\Phi^+ := \{\alpha\in\Phi \mid \alpha > 0\}$; platí $\Phi = \Phi^+ \cup (-\Phi^+)$

· $\Delta \subset \Phi^+$ je <u>systém jednoduchých kořenů</u>, pokud každý kořen $\alpha\in\Phi$ lze vyjádřit jednoznačně jako $\alpha = \sum n_i \alpha_i$ tak, že $\alpha_i \in \Delta$ a $\forall i: n_i > 0$, je-li $\alpha > 0$, nebo $\forall i: n_i < 0$, je-li $\alpha < 0$ $\rightsquigarrow$ Δ je báze $\mathfrak{h}^*$

<u>Př.</u> $(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$

· $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} A = 0\} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a\end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c\in\mathbb{C}\right\} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{E_{12}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{E_{21}}\right\}$

· $\mathfrak{h} := \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a\end{pmatrix} \,\middle|\, a\in\mathbb{C}\right\}$ ... Cartanova podalgebra

· kořeny: pro $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} \in \mathfrak{h}$ máme $\mathrm{ad}_H\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right] = \ldots = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\mathrm{ad}_H\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix} = \ldots = -2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ pro $H = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a\end{pmatrix} \in \mathfrak{h}$ máme $\mathrm{ad}_H(E_{12}) = 2a E_{12}$, $\mathrm{ad}_H(E_{21}) = -2a E_{21}$

$\rightsquigarrow$ dva kořeny: $\alpha\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a\end{pmatrix} := 2a$ $\to$ $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ a $\mathfrak{g}_\alpha = \mathrm{span}\{E_{12}\}$

$\to$ $-\alpha \in \mathfrak{h}^*$ a $\mathfrak{g}_{-\alpha} = \mathrm{span}\{E_{21}\}$ $\quad\to\quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$

· $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\alpha, -\alpha\} = \alpha\mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ volíme $\varphi: \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\text{lin.}} \mathbb{R}$, $\cancel{\varphi(\alpha)=1}$ $\varphi(\alpha) = 2$ $\rightsquigarrow$ $\Phi^+ = \{\alpha\} = \Delta$

<u>Pozorování</u>: $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ ... $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_\beta$, $H \in \mathfrak{h}$ $\rightsquigarrow$ $\mathrm{ad}_H([X,Y]) \overset{\text{Leibniz pro ad ... cvičení}}{=} [\mathrm{ad}_H(X), Y] + [X, \mathrm{ad}_H(Y)] =$
$= [\alpha(H)X, Y] + [X, \beta(H)Y] =$
$= (\alpha+\beta)(H)[X,Y]$ $\rightsquigarrow$ $[X,Y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$

· <u>Killingova forma</u> na $\mathfrak{g}$ ... $\kappa: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathbb{C}$, $\kappa(X,Y) = \operatorname{tr}(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y)$
... symetrická bilineární forma

· κ je $\mathfrak{g}$-invariantní, t.j. $\kappa([X,Y],Z) = \kappa(X,[Y,Z])$ ... cvičení (stopa je cyklická)

· je-li $\mathfrak{g}$ jednoduchá, pak je κ nedegenerovaná a její restrikce na $\mathfrak{h}$ taky

· taková bilin. forma indukuje izomorfismus $*: \mathfrak{h}^* \xrightarrow{\cong} \mathfrak{h}$, $\lambda \mapsto \lambda^*$, kde $\kappa(-, \lambda^*) = \lambda(-) \in \mathfrak{h}^*$

· <u>kokořen</u> $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ příslušný ke kořenu $\alpha \in \Phi$ pak definujeme jako $h_\alpha := \dfrac{2\alpha^*}{\kappa(\alpha,\alpha)} \in \mathfrak{h}$

(pak platí $\alpha(h_\alpha) = 2$ a $h_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$)

· nechť $r = \mathrm{rank}(\mathfrak{g}) := \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = |\Delta|$ a $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ jsou jednoduché kořeny (báze $\mathfrak{h}^*$)

⇝ uvažme jednoduché kokořeny $h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_r} \in \mathfrak{h}$ (báze $\mathfrak{h}$)

→ definujeme <u>fundamentální váhy</u> pro $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Delta)$ jako bázi ~~duální k~~ pro $\mathfrak{h}^*$ duální k $h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_r}$

t.j. fundamentální váhy jsou prvky $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_r \in \mathfrak{h}^*$ splňující $\tilde{\omega}_i(h_{\alpha_j}) = \delta_{ij}$ (Kronecker delta)

· <u>kořenová mříž</u> ... $Q(\mathfrak{g}) := \alpha_1 \mathbb{Z} + \dots + \alpha_r \mathbb{Z} \subseteq \mathfrak{h}^*$ (volná abelovská grupa na Δ)

↳ kladná kořenová mříž: $Q_+(\mathfrak{g}) = \alpha_1 \mathbb{N}_0 + \dots + \alpha_r \mathbb{N}_0 \subseteq \mathfrak{h}^*$

· <u>Váhová mříž</u> ... $P(\mathfrak{g}) := \tilde{\omega}_1 \mathbb{Z} + \dots + \tilde{\omega}_r \mathbb{Z} \subseteq \mathfrak{h}^*$ (tzv. integrální váhy)

↳ <u>dominantní váhy</u> ... $P_{++}(\mathfrak{g}) := \tilde{\omega}_1 \mathbb{N}_0 + \dots + \tilde{\omega}_r \mathbb{N}_0$

· platí $Q(\mathfrak{g}) \subset P(\mathfrak{g})$

· cíl: bijekce $P_{++}(\mathfrak{g}) \longleftrightarrow \{V : V$ ireducibilní kon.-dim. rep. $\mathfrak{g}\}/_{\cong}$ ... na to použijeme Verma moduly, nejprve zavedeme pomocné pojmy

DEF.

Nechť (ρ, V) je reprezentace $\mathfrak{g}$. <u>Váha</u> pro (ρ, V) je $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ t.ž. $\exists v \overset{\in V}{\neq} 0 : \rho(H)v = \lambda(H)v \ \forall H \in \mathfrak{h}$.

↳ nemusí být integrální!

Příslušný <u>váhový prostor</u> je $V_\lambda := \{v \in V \mid \rho(H)v = \lambda(H)v\}$.

Reprezentace V je <u>váhová</u>, pokud $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$

DEF.

Nechť Φ^+ je množina kladných kořenů pro $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ a $\mathfrak{n}_+ := \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{g}$.

→ recall: $\mathfrak{g} = \underbrace{\left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}\right)}_{\mathfrak{n}_-} \oplus \mathfrak{h} \oplus \underbrace{\left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha\right)}_{\mathfrak{n}_+}$

<u>Borelova podalgebra</u> $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$ je definována jako $\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$.

· značení: $\delta := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha \in \mathfrak{h}^*$ ... speciální dominantní váha $\left(\delta \overset{\text{platí}}{=} \tilde{\omega}_1 + \dots + \tilde{\omega}_r\right)$

· pro $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ chceme zadefinovat "univerzální $\mathfrak{g}$-modul s tzv. nejvyšší váhou λ", t.j. Verma modul $M(\lambda)$

· začneme 1-dimenzionální reprezentací $(\tau_\lambda, \mathbb{C})$ Borelovy podalgebry $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$:

· chceme, aby $\mathfrak{h}$ působila váhou $\lambda - \delta \in \mathfrak{h}^*$ a $\mathfrak{n}_+$ působila triviálně

· definujeme $\tau_\lambda : \mathfrak{b} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{C})$ předpisem $\tau_\lambda(H + N) = (\lambda - \delta)(H) \in \mathbb{C} \cong \mathrm{End}(\mathbb{C})$, kde $H \in \mathfrak{h}, N \in \mathfrak{n}_+$

⇝ Na komplexním čísle $z \in \mathbb{C}$ máme působení

$$\tau_\lambda(H)z = (\lambda - \delta)(H)\, z \quad \text{a} \quad \tau_\lambda(N)z = 0$$

· τ_λ je vskutku reprezentace: $\tau_\lambda([H_1 + N_1, H_2 + N_2]) = \tau_\lambda(\underset{\substack{\| \\ 0}}{[H_1, H_2]} + \overset{\in \mathfrak{n}_+}{N}) = \tau_\lambda(N) = 0$ ✓

0 ... $\mathfrak{h}$ je komutativní; End($\mathbb{C}$) je komutativní

⇝ $(\tau_\lambda, \mathbb{C})$ indukuje $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$-modul (levý), značme $\mathbb{C}_\lambda := \mathbb{C}$, kde

$\mathcal{U}(\mathfrak{b})$ působí reprezentací τ_λ

DEF.

<u>Verma modul</u> pro $\mathfrak{g}$ příslušný k $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ definujeme předpisem $M(\lambda) := \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$.

- definice dává smysl: $\mathbb{C}_\lambda$ je levý $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$-modul díky $\tau_\lambda : \mathfrak{b} \to \mathrm{End}(\mathbb{C}_\lambda)$
  a $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ je pravý $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$-modul ... $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ je $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-modul s násobením
  $\rightsquigarrow$ restrikce akce na $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$
- na $M(\lambda)$ máme strukturu levého $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-modulu díky násobení v $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$:

$$X \cdot (Y \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} z) := \underbrace{(XY)}_{\in \mathcal{U}(\mathfrak{g})} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} z, \quad X, Y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}),\ z \in \mathbb{C}_\lambda$$

$\rightsquigarrow M(\lambda)$ je reprezentace $\mathfrak{g}$

- připomenutí: $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$, kde $\mathfrak{n}_- = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$

<u>Tvrzení</u>

$M(\lambda) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$ jako vektorové prostory (taky i jako levé $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$-moduly).

<u>Důkaz</u>

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{b} \overset{PBW}{\rightsquigarrow} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{b})$

$\rightsquigarrow M(\lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda \cong (\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{b})) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda \cong \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-) \otimes (\mathcal{U}(\mathfrak{b}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-) \otimes \mathbb{C} \cong \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$

- explicitně, izomorfismus je dán předpisem

$$\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-) \to M(\lambda), \quad X \mapsto X \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} 1$$

$\square$

<u>Váhová struktura $M(\lambda)$</u>

- nejprve najdeme akci ad_H na prvcích $X_{\alpha_1}^{p_1} \dots X_{\alpha_k}^{p_k} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, kde $X_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ a $\alpha_i \in \Phi$:
  - $ad_H(X_\alpha) = \alpha(H) X_\alpha$ pro $\alpha \in \Phi$, $H \in \mathfrak{h}$, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ z definice Φ
  - $ad_H(X_\alpha X_\beta) = [H, X_\alpha X_\beta] = H X_\alpha X_\beta - X_\alpha X_\beta H = X_\alpha H X_\beta + [H, X_\alpha] X_\beta - X_\alpha X_\beta H = X_\alpha X_\beta H + X_\alpha [H, X_\beta] + \alpha(H) X_\alpha X_\beta - X_\alpha X_\beta H = X_\alpha \beta(H) X_\beta + \alpha(H) X_\alpha X_\beta = (\alpha+\beta)(H) X_\alpha X_\beta$, $\alpha, \beta \in \Phi$, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$, $H \in \mathfrak{h}$

obecně platí

$$(*) \quad ad_H(X_{\alpha_1}^{p_1} \dots X_{\alpha_k}^{p_k}) = \left(\sum_{i=1}^k p_i \alpha_i\right)(H) (X_{\alpha_1}^{p_1} \dots X_{\alpha_k}^{p_k}) \quad \text{pro } X_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}_{\alpha_i},\ \alpha_i \in \Phi,\ H \in \mathfrak{h}$$

- protože $M(\lambda) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$ jako vekt. prostory, zajímá nás akce $H \in \mathfrak{h}$ na prvcích $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$
  - nechť $\Phi^+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ jsou všechny kladné kořeny a $0 \neq X_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ $\forall i \rightsquigarrow X_1, \dots, X_k$ je báze $\mathfrak{n}_-$

  $\rightsquigarrow$ PBW: báze $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$ je tvořena prvky $X_1^{p_1} \dots X_k^{p_k} \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$
  - $(*)$ říká, že $ad_H(X_1^{p_1} \dots X_k^{p_k}) = \left(-\sum_{i=1}^k p_i \alpha_i\right)(H) X_1^{p_1} \dots X_k^{p_k}$ ... znaménko $-$ pochází z $X_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$
  - chceme popsat $M(\lambda)_\mu = \{a \in M(\lambda) \mid Ha = \mu(H) a\ \forall H \in \mathfrak{h}\}$ pro $\mu \in \mathfrak{h}^*$

· počítejme $H \cdot (X_1^{p_1} \dots X_k^{p_k} \otimes 1) = H X_1^{p_1} \dots X_k^{p_k} \otimes 1 = \Big(X_1^{p_1} \dots X_k^{p_k} H + \underbrace{[H, X_1^{p_1} \dots X_k^{p_k}]}_{= ad_H(X_1^{p_1} \dots X_k^{p_k})} \otimes 1\Big) =$

$$\overset{(*)}{=} \underbrace{X_1^{p_1} \dots X_k^{p_k} H \otimes 1}_{= X_1^{p_1} \dots X_k^{p_k} \otimes (H \cdot 1)} + \left(-\sum p_i \alpha_i\right)(H) X_1^{p_1} \dots X_k^{p_k} \otimes 1 =$$

$\hookrightarrow \otimes$ nad $\mathcal{U}(\mathfrak{b}) \ni H$

$$= X_1^{p_1} \dots X_k^{p_k} \otimes \underbrace{(\lambda - \delta)(H) 1}_{} - \left(\sum p_i \alpha_i\right)(H) X_1^{p_1} \dots X_k^{p_k} \otimes 1 = \left(\lambda - \delta - \sum p_i \alpha_i\right)(H)\left(X_1^{p_1} \dots X_k^{p_k} \otimes 1\right)$$

v $\mathbb{C}_\lambda$ působí H předpisem $H \cdot 1 = \tau_\lambda(H) 1 = (\lambda - \delta)(H) 1$

$\Rightarrow X_1^{p_1} \dots X_k^{p_k} \in M(\lambda)_\mu$ pro $\mu = \lambda - \delta - \sum p_i \alpha_i$ a naopak každý prvek $\sum p_i \alpha_i \in Q_+(\mathfrak{g})$ ($p_i \in \mathbb{N}_0$; $Q_+(\mathfrak{g})$ … kladná kořenová mříž)

~~je váha~~ dá váhu $\lambda - \delta - \sum p_i \alpha_i$ pro $M(\lambda)$

$\Rightarrow$ Váhy pro $M(\lambda)$ jsou přesně prvky $\lambda - \delta - Q_+(\mathfrak{g}) = \{\lambda - \delta - \mu \mid \mu \in Q_+(\mathfrak{g})\}$

· $M(\lambda)_{\lambda - \delta - \mu} = \operatorname{span}\{X_1^{p_1} \dots X_k^{p_k} \otimes 1 \mid \mu = \sum p_i \alpha_i\}$ pro $\mu \in Q_+(\mathfrak{g})$, speciálně $M(\lambda)_{\lambda - \delta} = \langle 1 \otimes 1 \rangle_{\mathbb{C}}$

Tvrzení

$M(\lambda) = \bigoplus_{\mu \in Q_+(\mathfrak{g})} M(\lambda)_{\lambda - \delta - \mu}$, tedy speciálně $M(\lambda)$ tvoří váhovou reprezentaci.

Důkaz

· $M(\lambda) = \sum_{\mu \in Q_+(\mathfrak{g})} M(\lambda)_{\lambda - \delta - \mu}$ z výpočtu výše a faktu, že $\{X_1^{p_1} \dots X_k^{p_k} \otimes 1 \mid p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{N}_0\}$ tvoří bázi $M(\lambda)$

· direktnost sumy z lineární nezávislosti vlastních vektorů příslušných různým "vlastním funkcionálům":

· nechť $\mu_1, \dots, \mu_m \in Q_+(\mathfrak{g})$ jsou vzájemně různé a ~~$a_1, \dots, a_m \in M(\lambda)_{\lambda-\delta-\mu_1}, \dots$~~

$0 \neq a_i \in M(\lambda)_{\lambda - \delta - \mu_i}$ $\forall i = 1, \dots, m$, pak $H \cdot a_i = (\lambda - \delta - \mu_i)(H) a_i$ $\forall i$ $\forall H \in \mathfrak{h}$

· nechť $A = \mathfrak{h} \setminus \bigcup_{i \neq j} \{H \in \mathfrak{h} \mid \mu_i(H) = \mu_j(H)\}$, pak $A \neq \emptyset$, neboť $\bigcup_{i \neq j}$ má míru 0 v $\mathfrak{h} \cong \mathbb{C}^r$

$\Rightarrow \exists H_0 \in A \Rightarrow \exists H_0 \in \mathfrak{h}: \mu_i(H_0) \neq \mu_j(H_0)$ pro každé $i \neq j$ $\Rightarrow a_1, \dots, a_m$ jsou vlastní nenulové vektory příslušné vzájemně různým vlastním číslům $(\lambda - \delta - \mu_1)(H_0), \dots, (\lambda - \delta - \mu_m)(H_0)$ $\Rightarrow a_1, \dots, a_m$ jsou LN $\square$

Shrnutí/poznámky

1) $1 \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} 1 \in M(\lambda)$ je speciální prvek, neboť je: · anihilován $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_+)$ … $\forall X \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}_+): X \cdot (1 \otimes 1) = X \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} 1 = 1 \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} X \cdot 1 = 0$

$\hookrightarrow \mathfrak{n}_+$ působí na $\mathbb{C}_\lambda$ triviálně

· leží v $M(\lambda)_{\lambda - \delta}$ … $\forall H \in \mathfrak{h}: H \cdot (1 \otimes 1) = H \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} 1 = 1 \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} (H \cdot 1) = 1 \otimes (\lambda - \delta)(H) 1 = (\lambda - \delta)(H)\, 1 \otimes 1$

· generuje $M(\lambda)$ jako $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$-modul: z izomorfismu $M(\lambda) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$, $X \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} 1 \mapsto X$

a tím spíše jako $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-modul

2) $\dim M(\lambda)_{\lambda-\delta} = 1$ ... $M(\lambda)_{\lambda-\delta} = \operatorname{span}\{X_1^{p_1}\dots X_k^{p_k}\otimes 1 \mid \sum_{i=1}^{k} p_i \alpha_i = 0\}$

- ale jediný způsob, jak vyjádřit $0 \in Q_+(\mathfrak{g})$ jako lin. kombinaci kladných kořenů $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ je triviální, t.j. $0 = \sum 0\cdot\alpha_i$ (vyjádři α_i jako součet jednoduchých kořenů a použi lin. nezávisbst jedn. kor.)

$\rightsquigarrow M(\lambda)_{\lambda-\delta} = \operatorname{span}\{1\otimes 1\}$

3) $\dim M(\lambda)_{\lambda-\delta-\mu} = \beta(\mu) :=$ # způsobů, jak vyjádřit $\mu \in Q_+(\mathfrak{g})$ jako lineární kombinaci prvků Φ^+

↳ tzv. Kostka number pro μ

<u>Věta</u> (univerzální vlastnost Verma modulu)

Nechť V je reprezentace $\mathfrak{g}$ (t.j. $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-modul). Nechť $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ a $v_0 \in V$ splňuje:

- $\mathfrak{n}_+ \cdot v_0 = 0$ (v_0 je anihilován $\mathfrak{n}_+$),
- $v_0 \in V_\lambda$, t.j. $\forall H \in \mathfrak{h}: H\cdot v_0 = \lambda(H) v_0$,
- $V = \mathcal{U}(\mathfrak{g})\cdot v_0$, t.j. v_0 generuje V jako $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-modul.

Potom:
1) $\exists!\, \varphi: M(\lambda+\delta) \twoheadrightarrow V$ surjektivní morfismus $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-modulů t.ž. $v_0 = \varphi(1\otimes 1)$.

2) $V = \bigoplus_{\mu\in\lambda-Q_+(\mathfrak{g})} V_\mu$, $\dim V_\mu < +\infty \ \forall \mu \in \lambda - Q_+(\mathfrak{g})$ a $\dim V_\lambda = 1$.

3) $V = \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)\cdot v_0$, t.j. v_0 generuje V i jako $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$-modul.

4) $\operatorname{End}_{\mathfrak{g}}(V) \cong \mathbb{C}$.

<u>Důkaz</u>

3) - nechť $v \in V$, pak $\exists X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}): v = X\cdot v_0$ $\rightsquigarrow$ PBW: píšme $X = \sum_j c_j \tilde{N}_1^{p_1}\dots\tilde{N}_k^{p_k} H_1^{r_1}\dots H_\ell^{r_\ell} N_1^{s_1}\dots N_k^{s_k}$

pro $\tilde{N}_i \in \mathfrak{n}_-$, $H_i \in \mathfrak{h}$, $N_i \in \mathfrak{n}_+$ $\rightsquigarrow$ z předpokladů $N_1^{s_1}\dots N_k^{s_k} \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}_+)$ prvek v_0 anihiluje

a $H_1,\dots,H_\ell$ působí na v_0 skalárem $\lambda(H_1),\dots,\lambda(H_\ell)$

$\rightsquigarrow v = \left(\sum_j c_j \tilde{N}_1^{p_1}\dots\tilde{N}_k^{p_k}\right)\cdot v_0$ pro vhodnou volbu c_j $\rightsquigarrow v \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)\cdot v_0$

1) - $M(\lambda+\delta)$ je <u>volný</u> $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$-modul s 1 generátorem $1\otimes 1$
- V je $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$-modul s 1 generátorem v_0

$\Big\}\ \exists!\, \varphi: M(\lambda+\delta) \twoheadrightarrow V$ ~~[illegible]~~
$1\otimes 1 \mapsto v_0$

$\varphi(X\cdot(1\otimes 1)) = \varphi(X\otimes 1) := X\cdot v_0 = X\cdot\varphi(1\otimes 1)$ ~~[illegible]~~ pro $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$

$\rightsquigarrow$ "~~[illegible]~~" φ je $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-morfismus ~~předpisem φ~~

2) - $\mathfrak{g}$-homomorfismus φ zachovává váhy:

- je-li ~~X~~ $X\otimes 1 \in M(\lambda+\delta)_\mu$, pak ~~[illegible]~~

$H\cdot\varphi(X\otimes 1) = \varphi(H\cdot(X\otimes 1)) = \varphi(\mu(H) X\otimes 1) = \mu(H)\varphi(X\otimes 1)$ $\forall H \in \mathfrak{h}$

$\rightsquigarrow \varphi(X\otimes 1) \in V_\mu$

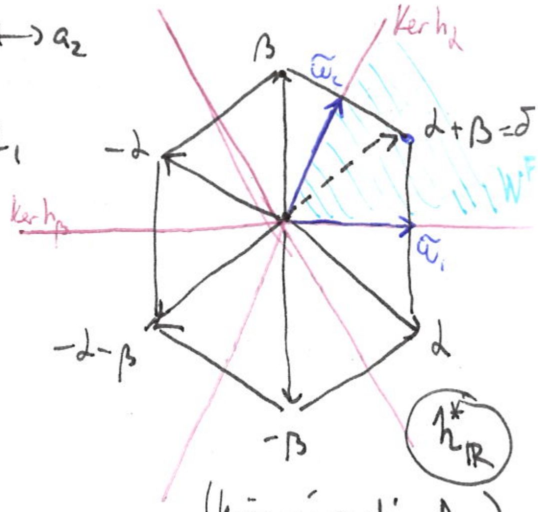
4) nechť $T \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V)$, pak T je jednoznačně určen hodnotou $T(v_0)$ $\big(T(v) = T(X \cdot v_0) = X \cdot T(v_0)$ pro $v = X \cdot v_0 \in V$, $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ $\big)$

- zároveň $T(v_0) \in V_\lambda$ ... $\mathfrak{g}$-morfismy zachovávají váhové prostory

$\rightsquigarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}: T(v_0) = \lambda v_0 \quad \rightsquigarrow T = \lambda \, id_V$ $\square$

Př.

- $\mathfrak{g} = sl(3,\mathbb{C}) = \{ A \in M_3(\mathbb{C}) \mid trA = 0 \} \rightsquigarrow \mathfrak{h} := \{ diag(a_1, a_2, -a_1-a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{C} \}$ je Cartanova podalgebra
- $\mathfrak{h}^*$ má bázi např. $\varepsilon_1 : \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & -a_1-a_2 \end{pmatrix} \mapsto a_1$, $\varepsilon_2 : \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & -a_1-a_2 \end{pmatrix} \mapsto a_2$



(kořenový systém A_2)

A_n ... kořenový systém pro $sl(n+1,\mathbb{C})$

$\rightsquigarrow$ jednoduché kořeny např. $\Delta = \{\alpha, \beta\}$ s $\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\beta = 2\varepsilon_2 - \varepsilon_1$

$\rightsquigarrow$ kladné kořeny: $\Phi^+ = \{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$

- Killingova forma na $\mathfrak{h}^*$ říká, že α a β svírají úhel $120°$
- $\sigma = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Phi^+} \gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \alpha+\beta) = \alpha+\beta$
- Weylova komora ... souvislá komponenta množiny $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} \setminus \bigcup_{\gamma \in \Phi^+} Ker\, h_\gamma$
  - $Ker\, h_\gamma = \{ \lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \kappa(\lambda, \gamma) = 0 \}$
- fundamentální Weylova komora ... ta, co obsahuje σ, tedy W^F
- cíl: $W^F \cap P(\mathfrak{g}) = P_{++}(\mathfrak{g}) = \mathbb{N}_0 \tilde{\omega}_1 + \mathbb{N}_0 \tilde{\omega}_2$ parametrizuje kon. dim. irreps pro $\mathfrak{g}$
  - fundamentální váhy: $\tilde{\omega}_i(h_\alpha) = \begin{cases} 1, & i=1 \\ 0, & i=2 \end{cases}$
    $\tilde{\omega}_i(h_\beta) = \begin{cases} 1, & i=2 \\ 0, & i=1 \end{cases}$ $\rightsquigarrow \tilde{\omega}_1 \perp \beta$, $\tilde{\omega}_2 \perp \alpha$

Značení: $M(\lambda)_+ := \bigoplus_{\mu \neq \lambda - \sigma} M(\lambda)_\mu$ ... $1 \otimes 1 \notin M(\lambda)_+$

Tvrzení

Je-li $F \subsetneq M(\lambda)$ vlastní $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-podmodul, pak $F \subseteq M(\lambda)_+$.

Důkaz

- rozklad $M(\lambda) = M(\lambda)_{\lambda-\sigma} \oplus M(\lambda)_+$ se zúží na $F = (\underbrace{F \cap M(\lambda)_{\lambda-\sigma}}_{=0 \text{ (níže)}}) \oplus (F \cap M(\lambda)_+)$ (*)
  - nechť $f \in F$, pišme $f = x_0 + x_+$ pro $x_0 \in M(\lambda)_{\lambda-\sigma} = span\{1 \otimes 1\}$ a $x_+ \in M(\lambda)_+$
  - F je vlastní $\rightsquigarrow F \cap M(\lambda)_{\lambda-\sigma} = 0$, jinak $1 \otimes 1 \in F$ a $F = M(\lambda)$, neboť $1 \otimes 1$ generuje $M(\lambda)$ a F je $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-podmodul $\#$.
  - $\rightsquigarrow x_0 = 0 \quad \rightsquigarrow f = x_+ \in M(\lambda)_+ \quad \rightsquigarrow F \subseteq M(\lambda)_+$

(*): váhový rozklad $M(\lambda)$ se dědí na podmoduly F: nechť $f \in F$ a $n \in \mathbb{N}$ je minimální t.ž. $f = a_1 + \ldots + a_n$, kde $a_i \in M(\lambda)_{\mu_i}$, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ jsou vzájemně různé váhy a $a_i \notin F$

$\rightsquigarrow$ pro $H_0 \in \mathfrak{h}$ t.ž. $\mu_1(H_0) \neq \mu_2(H_0)$ platí $H_0 \cdot f - \mu_1(H_0) f = (\mu_2 - \mu_1)(H_0) a_2 + \ldots + (\mu_n - \mu_1)(H_0) a_n \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$ z minimality n (na levé straně je prvek F, pro který máme méně než n) plyne $a_2 \in F \rightsquigarrow$ spor $\square$

Tvrzení

$M(\lambda)$ obsahuje jediný maximální vlastní podmodul K, tedy $M(\lambda)/K$ je jednoduchý $U(\mathfrak{g})$-modul.
(= ireducibilní rep. $\mathfrak{g}$)

Důkaz

· položme $K := \sum_{\substack{N \subsetneq M(\lambda) \\ \text{vl. podmodul}}} N$ ... podmodul ✓

· K je vlastní: stačí ověřit $K \cap M(\lambda)_{\lambda-\delta} = 0$, co platí

(jinak $\exists N_1,\dots,N_k \subsetneq M(\lambda)$ $\exists n_1,\dots,n_k \in N_1,\dots,N_k$: $1\otimes 1 = n_1+\dots+n_k$ ↯.) □

DEF.

$L(\lambda) := M(\lambda)/K$ ... jediný ireducibilní kvocient $M(\lambda)$

· $1\otimes 1 + K \neq 0$, neboť $1\otimes 1 \notin K$ ⇝ $\underset{(+K)}{1\otimes 1}$ je nenulový prvek $L(\lambda)$

· $1\otimes 1$ generuje $L(\lambda)$, neboť generuje $M(\lambda)$ (volně jako $U(n_-)$-modul)

· $U(n_+)\cdot(1\otimes 1) = 0$ i v $L(\lambda)$

} vlastnosti přenesené kanon. projekcí $\pi : M(\lambda) \twoheadrightarrow L(\lambda)$

Věta ("o vektoru v_0")

Nechť $V \neq 0$ je ireducibilní $\mathfrak{g}$-modul t.ž. $V = U(\mathfrak{g})\cdot v_0$ pro nějaké $v_0 \in V$ splňující

$U(n_+)\cdot v_0 = 0$ a $H\cdot v_0 = (\lambda-\delta)(H)\,v_0$ $\forall H \in \mathfrak{h}$.

Potom $V \cong L(\lambda)$.

Důkaz

· z univerzální vl. $M(\lambda)$ máme surjekci $\varphi: M(\lambda) \twoheadrightarrow V$ $\Rightarrow$ $V \cong M(\lambda)/\ker\varphi$

· z ireducibility V máme maximalitu $\ker\varphi \subsetneq M(\lambda)$ ... vlastní díky $V \neq 0$

· z jednoznačnosti K máme $\ker\varphi = K$ → $V \cong L(\lambda)$ □

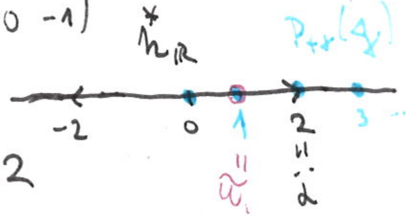
Věta: Je-li $\mathfrak{g}$ jednoduchá a V je kon. dim. rep. $\mathfrak{g}$, pak V je úplně rozbitelná,
t.j. $V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i$ pro nějaké ireducibilní $V_i \in \mathrm{Rep}\,\mathfrak{g}$.

[Bez důkazu.]

Reprezentace $sL(2,\mathbb{C})$

· nechť $\mathfrak{g} = sL(2,\mathbb{C}) = \mathrm{span}\{e,f,h\}$, kde $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

· viděli jsme, že $\mathfrak{h} = h\mathbb{C}$ je Cartanova podalgebra, kořeny jsou $\underset{\alpha\in\mathfrak{h}^*,\ \alpha: h\mapsto 2}{\underset{\shortparallel}{2}}$ a -2, kde



· fundamentální váha je $\tilde\omega_1 = 1$ ⇝ $P_{++}(\mathfrak{g}) = \mathbb{N}_0\tilde\omega_1 = \mathbb{N}_0$

⇝ cíl: $\{V \mid V \text{ kon. dim. irrep } \mathfrak{g}\}/_{\cong} \xleftrightarrow{1-1} \mathbb{N}_0 = P_{++}(\mathfrak{g})$, tedy kon. dim. iredu. rep.

jsou až na izomorfismus indexované $\{0,1,2,\dots\}$

proč? Chceme $\tilde\omega_1(h_\alpha) = 1$, víme ale, že $\alpha(h_\alpha) = 2$ ⇝ $\tilde\omega_1 = \frac{1}{2}\alpha$

↳ kokořen $h_\alpha = h$

· pro každé $r \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}$ definujeme reprezentaci $(\varrho_r, \mathbb{C}^{r+1})$ maticově:

$$\varrho_r(h) := \operatorname{diag}(r, r-2, r-4, \dots, -r+2, -r) \in M_{r+1}(\mathbb{C}) = \operatorname{End}(\mathbb{C}^{r+1})$$

$$\varrho_r(e) := \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 & & & 0 \\ & 0 & \mu_2 & & \\ & & 0 & \mu_3 & \\ & & & 0 & \ddots \\ & & & & \ddots \quad 0 \quad \mu_r \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \in M_{r+1}(\mathbb{C}), \text{ kde } \mu_i := i(r-i+1)$$

na hlavní diagonále jsou 0

$$\varrho_r(f) := \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{r+1}(\mathbb{C})$$

· pak ϱ_r je iredecibilní: $e_1 \underset{\varrho_r(e)}{\overset{\varrho_r(f)}{\rightleftarrows}} e_2 \underset{\varrho_r(e)}{\overset{\varrho_r(f)}{\rightleftarrows}} e_3 \overset{\varrho_r(f)}{\rightleftarrows} \dots \overset{\varrho_r(f)}{\rightleftarrows} e_{r+1}$, kde (e_i) je kanonická báze $\mathbb{C}^{r+1}$

nechť $W \subseteq \mathbb{C}^{r+1}$ je invariantní podprostor a $0 \neq w \in W$

souřadnice vzhledem k (e_i)

· píšeme $w = \sum_{i=k}^{r+1} c_i e_i$, kde k je minimální i t.ž. $w_i = c_i \neq 0$

· aplikujme $\varrho_r(f)$ na w opakovaně $\rightsquigarrow$ $w \xrightarrow{\varrho_r(f)} \sum_{i=k}^{r} c_i e_{i+1} \xrightarrow{\varrho_r(f)} \dots \xrightarrow{\varrho_r(f)} c_i e_{r+1}$

$\rightsquigarrow c_i e_{r+1} \in W \rightsquigarrow e_{r+1} \in W \to$ aplikujme $\varrho_r(e) \to \dots \to e_i \in W \ \forall i$

$\rightsquigarrow W = \mathbb{C}^{r+1}$

$\rightsquigarrow$ máme přiřazení $\mathbb{N}_0 \longleftrightarrow \{V \mid V \text{ kon. dim. irrep}\}/_{\cong}$

$r \longmapsto [(\varrho_r, \mathbb{C}^{r+1})]_{\cong}$, násl. věta dá ~~[illegible]~~ surjektivitu

Věta

Je-li (ϱ, V) iredecibilní reprezentace $sL(2,\mathbb{C})$ dimenze $r+1$, pak $(\varrho, V) \cong (\varrho_r, \mathbb{C}^{r+1})$.

Důkaz (sketch)

· najdeme $v_0, v_1, \dots, v_r \in V$ t.ž. $v_0 \underset{\varrho(e)}{\overset{\varrho(f)}{\rightleftarrows}} v_1 \underset{\varrho(e)}{\overset{\varrho(f)}{\rightleftarrows}} \dots \underset{\varrho(e)}{\overset{\varrho(f)}{\rightleftarrows}} v_r$, a $v_0, v_1, \dots, v_r$ tvoří bázi V

a $\varrho(h) v_i = r - 2i$

· jak na to? Operátor $\varrho(h) \in \operatorname{End}(V)$ má vlastní číslo λ $\rightsquigarrow$ nechť $0 \neq w_0 \in V$ je vlastní vektor $\varrho(h)$

$\rightsquigarrow$ nechť s je maximální t.ž. $\varrho(e)^s w_0 \neq 0$ (existuje také s, neboť $\dim V < \infty$)

$\rightsquigarrow$ polož $v_0 := \varrho(e)^s w_0$ a ověř všechny detaily pro $v_i := \varrho(f)^i v_0$

(využije se komutační relace $[e,f] = h$, $[e,h] = -2e$, $[f,h] = 2f$ atd.) $\square$

Důsledek

každá kon. dim. rep. (ϱ, V) nad $sL(2,\mathbb{C})$ se rozkládá na $\bigoplus_i (\varrho_{r_i}, \mathbb{C}^{r_i+1})$.

· souvislost s Verma moduly: $(\varrho_r, \mathbb{C}^{r+1}) \cong L(r+\delta)$, kde $r \in \mathbb{N}_0 \cong P_{++}(\mathfrak{g})$ chápeme jako prvek $r \in \mathfrak{h}^*$, tedy $r : h \mapsto r$; máme rozklad $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ = f\mathbb{C} \oplus h\mathbb{C} \oplus e\mathbb{C}$, neboť $e \in \mathfrak{g}_\alpha$ pro $\alpha = 2 \in \Phi^+$

a $f \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ $\rightsquigarrow \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-) \underset{PBW}{\cong} 1\mathbb{C} \oplus f\mathbb{C} \oplus f^2\mathbb{C} \oplus \dots$

$\rightsquigarrow M(r+\sigma)$ má bázi $1 \underset{U(b)}{\otimes} 1,\ f \underset{U(b)}{\otimes} 1,\ f^2 \underset{U(b)}{\otimes} 1, \dots$ (připomenutí: $b = h \oplus n_+ = h\mathbb{C} \oplus e\mathbb{C}$)

kde $h \cdot (1 \otimes 1) = h \underset{U(b)}{\otimes} 1 = 1 \underset{U(b)}{\otimes} (h \cdot 1) = r(1 \otimes 1)$

$\hookrightarrow$ h působí váhou $(r+\sigma) - \sigma = r$ v $M(r+\sigma)$ na $1 \otimes 1$

$$\underbrace{1\otimes 1 \xrightarrow{f} f\otimes 1 \xrightarrow{f} f^2 \otimes 1 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} f^r \otimes 1}_{\cong\ (\rho_r, \mathbb{C}^{r+1}) \ \cong\ M(r+\sigma)/K \ =\ L(r+\sigma)} \xrightarrow{f} f^{r+1}\otimes 1 \xrightarrow{f} \dots$$

váha: r, $r-2$, $r-4$, $\dots$, $-r$, $-r-2$

$\downarrow$ vl. čísla h indexované množinou $r - Q_+(g)$

ale $Q_+(g) = \mathbb{N}_0 \alpha = 2\mathbb{N}_0$

zde začíná maximální podmodul $K \subsetneq M(r+\sigma)$ (nutno ověřit $ef^{r+1} \otimes 1 \in K$ a jiné detaily)

Tvrzení (váhovost k.-dim. rep.)

Nechť g je jednoduchá Lieova algebra a V je kon. dim. reprezentace g.
Pak $V = \bigoplus_{\mu \in h^*} V_\mu$ a každá váha $\mu \in h^*$ t.ž. $V_\mu \neq 0$ leží v $P(g) = \{\nu \in h^* \mid \nu(H_\alpha) \in \mathbb{Z}\ \forall \alpha \in \Delta\}$.

kokořen

jednoduché kořeny

integrální váhy ($= \mathbb{Z}\tilde{\omega}_1 + \dots + \mathbb{Z}\tilde{\omega}_n$)

Důkaz

· pro $\alpha \in \Phi^+$ máme $g_\alpha \oplus H_\alpha\mathbb{C} \oplus g_{-\alpha} \cong sl(2,\mathbb{C})^{(\alpha)}$

$\rightsquigarrow$ $\forall \alpha \in \Phi^+$ tvoří V reprezentaci této podalgebry (restrikce akce) $\rightsquigarrow$ rozložme $V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_{r_i}^{(\alpha)}$ $\forall \alpha \in \Phi^+$,

kde $V_{r_i}^{(\alpha)}$ je ireducibilní $sl(2,\mathbb{C})$-rep. $\cong (\rho_{r_i}, \mathbb{C}^{r_i+1})$, ty jsou váhové vzhledem k $H_\alpha\mathbb{C}$ (Cartan v $sl(2,\mathbb{C})$)

$\rightsquigarrow$ pro $v \in V$ píšeme $v = v_1^{(\alpha)} + \dots + v_k^{(\alpha)}$ a značme $\mu_{ij}^{(\alpha)} = r_i - 2j$ .. váhy pro $V_{r_i}^{(\alpha)}$, t.j. $H_\alpha v_i^{(\alpha)} = \mu_{ij}^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)}$ je-li $v_i^{(\alpha)} \in (V_{r_i}^{\alpha})_{r_i - 2j}$

$\rightsquigarrow$ každý $v_i^{(\alpha)}$ lze rozbít na jednoznačný součet $\sum_{j=0}^{r_i} v_{ij}^{(\alpha)}$, kde $H_\alpha v_{ij}^{(\alpha)} = \mu_{ij} v_{ij}^{(\alpha)}$

$\rightsquigarrow$ v lze rozbít na součet váhových vektorů vůči H_α

$\rightsquigarrow$ je-li $H = \sum_\alpha c_\alpha H_\alpha \in h \overset{\text{Cartan}}{\subseteq} g$, pak $\rho(H)v = \sum c_\alpha \underbrace{\rho(H_\alpha)v}_{\text{rozklad na váhové vektory}}$ ✓

· integralita, t.j. $\mu \in P(g)$ pro $V_\mu \neq 0$, plyne z integrality $\mu_{ij}^{(\alpha)}$ $\square$

Věta (o nejvyšší váze)

Nechť V je ireducibilní kon. dim. reprezentace g. Pak:

i) $\exists! \lambda \in h^*$: $V \cong L(\lambda + \sigma)$.

ii) $\lambda \in P_{++}(g) = \{\mu \in P(g) \mid \mu(H_\alpha) \geq 0\ \forall \alpha \in \Delta\} = \mathbb{N}_0\tilde{\omega}_1 + \dots + \mathbb{N}_0\tilde{\omega}_n$ (t.j. λ je dominantní integrální).

iii) $\dim V_\lambda = 1$.

iv) $\forall \mu \in h^*$ t.ž. $V_\mu \neq 0$ platí $\mu \leq \lambda$, t.j. $\lambda - \mu \geq 0$.

funkcionál φ na $h_{\mathbb{R}}^*$ $\downarrow$ dá částečné uspořádání na $h_{\mathbb{R}}^*$: $\lambda \geq 0 \overset{\text{def.}}{\iff} \varphi(\lambda) \geq 0$ pro $\lambda \in h_{\mathbb{R}}^*$

Důkaz

$\cdot$ V je váhový, tedy $V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}} V_\mu$, značme $P(V) = \{\mu \in \mathfrak{h}^* \mid V_\mu \neq 0\}$ ... konečná množina vah pro V ... $P(V) \subseteq \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ z integrality vah (níže)

$\cdot$ $P(V)$ konečná $\rightsquigarrow \exists \lambda \in P(V)\ \forall \alpha \in \Phi^+ : \lambda + \alpha \notin P(V)$ ... $\lambda := \max_{\leq_{\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}}} P(V) \implies$ i) ✓

$\cdot$ jednoznačnost λ ... $\leq_{\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}}$ je lineární uspořádání: $\forall \mu, \nu \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} : \varphi(\mu - \nu) \geq 0$ nebo $\varphi(\nu - \mu) \geq 0$

↳ tzv. nejvyšší váha pro V — kde $\varphi : \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ je funkcionál definující Φ^+ (kladné kořeny)

ii) pohled na $sl(2,\mathbb{C})$ trojice v $\mathfrak{g}$ $\rightsquigarrow$ celočíselné váhy $r_i, r_i - 2, r_i - 4, \dots, -r_i + 2, -r_i$

$\cdot$ ty nejvyšší (vzhledem k $sl(2,\mathbb{C})$, ale taky i vzhledem k $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ a $\mathfrak{g}$)

jsou $r_i \geq 0$ $\rightsquigarrow \lambda \in P_{++}(\mathfrak{g})$ jako „lineární kombinace" vah r_i

(tím myslíme $\lambda(H_\alpha) = r_i^{(\alpha)} \geq 0$ pro $H_\alpha \in \mathfrak{h}, \alpha \in \Phi^+$)

$\rightsquigarrow \lambda \in \mathfrak{h}^*$ je dominantní integrální — dá $sl(2,\mathbb{C})$ trojici $\mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus H_\alpha\mathbb{C} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$

i) ověříme předpoklady Věty o $V \cong L(\lambda + \delta)$:
(„o vektoru $v_0 \in V$")

$\cdot$ $V = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) v_0$ pro každý $0 \neq v_0 \in V$ z ireducibility (jinak $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot v_0 \subsetneq V$)

$\cdot$ zvolme $0 \neq v_0 \in V_\lambda$, tzv. „vektor nejvyšší váhy" v rep. V, pak platí $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_+) \cdot v_0 = 0$:

$\cdot$ nechť $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{n}_+$ pro $\alpha \in \Phi^+$

$\cdot$ pak $H_\alpha \cdot (X_\alpha \cdot v_0) = X_\alpha \cdot \underbrace{(H_\alpha \cdot v_0)}_{= \lambda(H_\alpha) v_0,\ v_0 \in V_\lambda} + \underbrace{[H_\alpha, X_\alpha]}_{= 2X_\alpha} \cdot v_0 = (\lambda(H_\alpha) + 2)(X_\alpha \cdot v_0) = 0$

jinak má $X_\alpha \cdot v_0$ vyšší váhu než v_0

$\overset{\lambda(H_\alpha) \geq 0}{\implies} X_\alpha \cdot v_0 = 0 \overset{\forall \alpha \in \Phi^+}{\implies} \mathfrak{n}_+ \cdot v_0 = 0 \implies \mathcal{U}(\mathfrak{n}_+) \cdot v_0 = 0$

$\cdot$ z volby v_0 máme automaticky $H \cdot v_0 = \lambda(H) v_0 \quad \forall H \in \mathfrak{h}$

$\overset{\text{Věta}}{\implies} V \cong L(\lambda + \delta) \implies$ iii) plyne z $L(\lambda + \delta)_\lambda = \operatorname{span}\{1 \otimes 1\}$

↳ generátor $M(\lambda+\delta)$, v $L(\lambda+\delta)$ zůstává nenulový

iv) z def. λ

$\square$

Důsledek

Existuje bijekce $P_{++}(\mathfrak{g}) \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \{V \mid V \text{ kon. dim. irrep } \mathfrak{g}\}/_{\cong}$, je-li $\mathfrak{g}$ jednoduchá komplexní Lieova algebra.

$\lambda \longmapsto L(\lambda + \delta)$

λ z Věty $\longleftarrow\!\shortmid V$

Pozn.

$\cdot$ $W := \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Phi^+ \rangle \subseteq \operatorname{Aut}(\mathfrak{h}^*)$, kde $s_\alpha : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$, $s_\alpha(\lambda) = \lambda - 2\dfrac{\kappa(\alpha,\lambda)}{\kappa(\alpha,\alpha)}\lambda$ (kořenové reflexe)

↳ Weylova grupa $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — podgrupa generovaná s_α

$\cdot$ W má dvě přirozené akce na $\mathfrak{h}^*$ — „definující" ... $w \cdot \lambda := w(\lambda)$ pro $w \in W \subseteq \operatorname{Aut}(\mathfrak{h}^*)$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$; afinní ... $w \cdot \lambda := w(\lambda + \delta) - \delta$

$\cdot$ Harish-Chandra izomorfismus: $Z(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \cong S(\mathfrak{h}^*)^W$ ($\mathfrak{g}$ jednoduchá) — $(w \cdot f(\lambda) := f(w^{-1} \cdot \lambda),\ f \in S(\mathfrak{h}^*),\ \lambda \in \mathfrak{h}^*)$

↳ centrum; ↳ polynomy v $S(\mathfrak{h}^*)$ invariantní vzhledem k afinní akci W

3. Věta Borel-Weil (-Bott)

Vlajkové variety

$\mathbb{k} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, V...vektorový prostor nad $\mathbb{k}$, $n = \dim_{\mathbb{k}} V$

- vlajka v prostoru V ... $f = (\underset{\substack{\neq \\ 0}}{V_1} \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_n = V)$, kde V_i je podprostor V $\forall i$
- vlajková varieta $Fl(d_1, \dots, d_n) := \{ f \mid f = (V_1 \subseteq \dots \subseteq V_n) \text{ vlajka}, \dim V_i = d_i \}$

  ...topologie se dědí z $\underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{n}$: $U = \{ f \in Fl \mid f = (V_1 \subseteq \dots \subseteq V_n)\} \subseteq Fl$ je otevřená

  $\iff \bigcup_{f \in U} V_1 \times \bigcup_{f \in U} V_2 \times \dots \times \bigcup_{f \in U} V_n \subseteq V \times \dots \times V$ je otevřená

  (zde $\bigcup_{f \in U} V_i := \{ v \in V \mid v \in V_i \text{ pro nějaké } f = (V_1 \subseteq \dots \subseteq V_i \subseteq \dots \subseteq V_n) \in U \}$)

- úplná vlajka ... prvek $Fl(1, 2, \dots, n)$
- Grassmanián k-rovin v $\mathbb{k}^n$ ... $Gr_{\mathbb{k}}(k,n) := Fl(k, k, \dots, k, k, n)$ pro $V = \mathbb{k}^n$
- projektivní prostor na $\mathbb{k}^n$ ... $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{k}) = P(\mathbb{k}^n) := Gr_{\mathbb{k}}(1,n) = \{ \text{přímky v } \mathbb{k}^n \text{ procházející } 0 \}$
  - alternativně, $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{k}) := \mathbb{k}^n \setminus 0 / \sim$, kde $u \sim v \iff \exists \lambda \in \mathbb{k} : u = \lambda v$
- vlajkové variety jako homogenní prostory:
  - nechť $f \in Fl(d_1, \dots, d_n)$, $f = (V_1, \dots, V_n) := (V_1 \subseteq \dots \subseteq V_n)$
  - nechť $G = GL(V)$, pak G působí na Fl : pro $g \in G$ máme $g \cdot f := (gV_1, \dots, gV_n) \in Fl(d_1, \dots, d_n)$
  - tato akce je tranzitivní: nechť $v, w \in Fl$, pišme $v = (V_1, \dots, V_n)$, $w = (W_1, \dots, W_n)$ a

  zvolme báze $e_1, \dots, e_n$ a $f_1, \dots, f_n$ pro V t.ž. $V_i = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_i\}$ a $W_i = \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_i\}$
    - pak $gv = w$ pro $g :=$ matice přechodu od (e_i) k (f_i)

  $\rightsquigarrow$ $\operatorname{Orbit}(v_0) = Fl(d_1, \dots, d_n)$ pro libovolnou vlajku $v_0 \in Fl$

  $\rightsquigarrow$ $Fl(d_1, \dots, d_n) \cong GL(V) / \operatorname{Stab}(v_0)$, kde $\operatorname{Stab}(v_0) = \{ g \in GL(V) \mid gv_0 = v_0 \}$ ... uzavřená podgrupa $GL(V)$

  $\rightsquigarrow$ Fl je varieta
  - přeškálováním $g \mapsto \frac{g}{\det g}$ dostaneme $Fl \cong SL(V) / \operatorname{Stab}(v_0)_{SL}$

Př.

$Gr_{\mathbb{C}}(k,n)$: $v \in Gr_{\mathbb{C}}(k,n) \rightsquigarrow v = (\underset{\substack{\parallel \\ V}}{\langle e_1, \dots, e_k \rangle_{\mathbb{C}}}, \underset{\substack{\parallel \\ \mathbb{C}^n}}{\langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{C}}})$ pro nějakou ortonormální bázi $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{C}^n$

- volba ortonormální báze $\rightsquigarrow$ působení unitární grupy $U(n)$ na $Gr(k,n)$
- stabilizátor k-roviny $v_0 = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ je unitární transformace zachovávající v_0 a $\langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$

$\rightsquigarrow$ blok.-diag. matice $\in \left(\begin{array}{c|c} U(k) & 0 \\ \hline 0 & U(n-k) \end{array} \right)$ $\rightsquigarrow$ $\operatorname{Stab}(v_0) = U(k) \times U(n-k)$

$\rightsquigarrow$ $Gr_{\mathbb{C}}(k,n) \cong U(n) / U(k) \times U(n-k)$ $\rightsquigarrow$ $\dim Gr_{\mathbb{C}}(k,n) = n^2 - (k^2 + (n-k)^2) = \dots = 2k(n-k)$

(reálné dimenze) $\rightsquigarrow$ $\dim U(n) = n^2$, kde $U(n)$ chápeme jako reálnou Lie.gr.

Př.

$Gr_{\mathbb{R}}(k,n)$ ... stejný argument jak nad $\mathbb{C}$ dá $Gr_{\mathbb{R}}(k,n) \cong \dfrac{O(n)}{O(k)\times O(n-k)}$

- $\dim_{\mathbb{R}} O(n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$: věta o implicitních funkcích pro $\varphi: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow SM_n(\mathbb{R})$ (symetrické $n\times n$ matice), $A \longmapsto A^T A$
  - ověření: $\operatorname{rank} d\varphi_A = \dfrac{n(n+1)}{2}$ pro $A \in \varphi^{-1}(I_n) = O(n)$, $\dim SM_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

  $\Rightarrow O(n)$ je varieta dimenze $\dim M_n(\mathbb{R}) - \dim SM_n(\mathbb{R}) = n^2 - \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

$\Rightarrow \dim Gr_{\mathbb{R}}(k,n) = \dfrac{n(n-1)}{2} - \left(\dfrac{k(k-1)}{2} + \dfrac{(n-k)(n-k-1)}{2}\right) = \ldots = k(n-k)$ [polovina reálné dimenze $Gr_{\mathbb{C}}(k,n)$]

Grassmannián $Gr_2(\mathbb{C}^4) = Gr_{\mathbb{C}}(2,4)$

(první "neprojektivní" netriviální Grassmannián ... $Gr(2,3) \cong Gr(1,3)$, rovina $\longmapsto (\text{rovina})^{\perp}$)

- Plückerovo zobrazení ... $pl: Gr_2(\mathbb{C}^4) \longrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4)$

  ($\Lambda^2\mathbb{C}^4$ ... druhá vnější mocnina $\mathbb{C}^4$)

  $\operatorname{span}\{u,v\} \longmapsto [u\wedge v] := \operatorname{span}\{u\wedge v\}$ pro $u,v\in\mathbb{C}^4$ lin. nezávislé

- pl je dobře def.: nechť (u,v) a $(\alpha u+\beta v, \gamma u+\delta v)$ jsou dvě báze pro $\operatorname{span}\{u,v\} =: \varrho \in Gr_2\mathbb{C}^4$

  pak $\det(\text{matice přechodu}) = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ a spočteme, že

  $\operatorname{span}\{(\alpha u+\beta v)\wedge(\gamma u+\delta v)\} = \operatorname{span}\{\alpha\delta\, u\wedge v - \beta\gamma\, u\wedge v\} = \operatorname{span}\{(\alpha\delta-\beta\gamma)u\wedge v\} = \operatorname{span}\{u\wedge v\}$

  tedy $pl(\varrho)$ nezávisí na volbě báze pro $\varrho \in Gr_2\mathbb{C}^4$

- pozorování: $\operatorname{Im}(pl) = \{[\omega] \mid \omega \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4), \omega \neq 0, \omega \text{ rozložitelný}\}$

  $\rightsquigarrow$ ukážeme, že pl je prosté a hezky popíšeme rozložitelné bivektory, pak $Gr_2(\mathbb{C}^4) \cong \operatorname{Im}(pl)$

Lemma (Cartan)

Nechť V je vek. prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ a nechť $\varphi\wedge\eta = 0$ pro nějaké $0\neq\varphi\in V$ a $\eta\in\Lambda^k(V)$.

Potom $\exists\, \xi \in \Lambda^{k-1}(V): \eta = \varphi\wedge\xi$.

Důkaz

- zvolme skalární součin g na V a uvažme isomorfismus $\flat: V \longrightarrow V^*$, $v \longmapsto g(-,v)$

$\rightsquigarrow \varphi^\flat \in V^*$ a máme kontrakci $i_{\varphi^\flat}: \Lambda^k V \longrightarrow \Lambda^{k-1}V$

$$v_1\wedge\ldots\wedge v_k \longmapsto \sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell}\varphi^\flat(v_\ell)\, v_1\wedge\ldots\wedge\hat{v}_\ell\wedge\ldots\wedge v_k,$$

($\hat{v}_\ell$ ... vynecháno v_ℓ)

která splňuje graduované Leibnizovo pravidlo, speciálně na $\Lambda^{k+1}V$ splňuje

$$i_{\varphi^\flat}(\varphi\wedge\omega) = i_{\varphi^\flat}(\varphi)\wedge\omega \pm \varphi\wedge i_{\varphi^\flat}(\omega) \quad \text{pro } \omega\in\Lambda^k(V)$$

... znaménko je $-$ (závisí na stupni φ, co je 1)

- pro $\omega = \eta$ dostaneme $0 = i_{\varphi^\flat}(\varphi\wedge\eta) = i_{\varphi^\flat}(\varphi)\wedge\eta \pm \varphi\wedge i_{\varphi^\flat}(\eta) \Rightarrow \eta = \dfrac{\pm 1}{g(\varphi,\varphi)}\left(\varphi\wedge i_{\varphi^\flat}(\eta)\right)$
- $i_{\varphi^\flat}(\varphi) = \varphi^\flat(\varphi) = g(\varphi,\varphi) > 0$ $\rightsquigarrow$ polož $\xi = \dfrac{1}{g(\varphi,\varphi)} i_{\varphi^\flat}(\eta)$ $\square$

Lemma (rozložitelné bivektory)

Nechť $\underset{\neq 0}{\omega} \in \Lambda^2(V)$. Pak ω je rozložitelný $\Leftrightarrow$ $\omega \wedge \omega = 0$.

Důkaz

$\Rightarrow$ ✓ $\Leftarrow$: nechť $\omega\wedge\omega = 0$ a $\Theta \in V^*$ je libovolné $\rightsquigarrow$ $i_\Theta : \Lambda^k(V) \longrightarrow \Lambda^{k-1}(V)$ t.ž. $i_\Theta(\omega) \neq 0$ -- existuje pro $\omega \neq 0$

$\rightsquigarrow 0 = i_\Theta(\omega\wedge\omega) = i_\Theta(\omega)\wedge\omega + \omega \wedge i_\Theta(\omega) = 2\, i_\Theta(\omega)\wedge\omega \overset{\text{Cartan}}{\Rightarrow} \exists \xi \in \Lambda^1(V): \omega = i_\Theta(\omega)\wedge\xi$ □

$\hookrightarrow (-1)^2$ -- stupeň ω $\hookrightarrow \in V \cong \Lambda^1(V)$

· tedy $\mathrm{Im}(pl) = \{[\omega] \in \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4) \mid \omega\wedge\omega = 0\}$ ...hezký (algebraický) popis $\mathrm{Im}(pl)$

= <u>Kleinova kvadrika</u>:

· najdeme rovnici v souřadnicích na $\Lambda^2\mathbb{C}^4$ pro $\omega\wedge\omega = 0$.

· $\Lambda^2\mathbb{C}^4$ má bázi $e_1\wedge e_2, e_1\wedge e_3, e_1\wedge e_4, e_2\wedge e_3, e_2\wedge e_4, e_3\wedge e_4$, zde píšeme $e_{ij} := e_i\wedge e_j$

· nechť $\omega = \sum_{i<j} z^{ij} e_i\wedge e_j \in \Lambda^2\mathbb{C}^4$ splňuje $\omega\wedge\omega = 0$ $\rightsquigarrow e_{ij}\wedge e_{km} \neq 0$ jen pro $\{i,j\}\cap\{k,m\} = \emptyset$

· potom $0 = (z^{12}e_{12} + z^{13}e_{13} + z^{14}e_{14} + z^{23}e_{23} + z^{24}e_{24} + z^{34}e_{34}) \wedge (z^{12}e_{12} + \dots + z^{34}e_{34})$

$= z^{12}z^{34}e_{12}\wedge e_{34} + z^{13}z^{24}e_{13}\wedge e_{24} + z^{14}z^{23}e_{14}\wedge e_{23} + z^{23}z^{14}e_{23}\wedge e_{14} + z^{24}z^{13}e_{24}\wedge e_{13} + z^{34}z^{12}e_{34}\wedge e_{12}$

$= 2(z^{12}z^{34} - z^{13}z^{24} + z^{14}z^{23})\underbrace{e_{12}\wedge e_{34}}_{= e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4}$

$\rightsquigarrow \mathrm{Im}(pL) = \left\{ \left[\begin{pmatrix} z^{12} \\ z^{13} \\ \vdots \\ z^{34}\end{pmatrix}\right] \in \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4) \,\middle|\, z^{12}z^{34} - z^{13}z^{24} + z^{14}z^{23} = 0 \right\}$ ... Kleinova kvadrika

$\hookrightarrow$ souřadnice na $\Lambda^2\mathbb{C}^4$ ... algebraická varieta v $\mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4)$

· teď zbývá dokázat, že $pl: Gr_2\mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4)$ je prosté:

· nechť $u, v \in \mathbb{C}^4$ jsou lin. nezávislé a $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{C}^4$ jsou lin. nezávislé

· nechť $pl(\mathrm{span}\{u,v\}) = pl(\mathrm{span}\{\tilde{u},\tilde{v}\})$, tedy $[u\wedge v] = [\tilde{u}\wedge\tilde{v}]$ v $\mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4)$,

potom $\exists c \in \mathbb{C}\setminus 0$: $\tilde{u}\wedge\tilde{v} = c(u\wedge v) = cu\wedge v = u\wedge cv$ (*)

· volme nedegenerovanou bilin. formu $g: \mathbb{C}^4\times\mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}$ t.ž. $g(v,v) = 0$ (v je izotropní) a $g(v,u) \neq 0$

a pro $w \in V$ píšeme $i_w \in V^*$, $i_w(x) = g(w,x)$, pak i_w splňuje Leibnizovo pravidlo a tedy pro $w=v$

máme $i_v(\tilde{u}\wedge\tilde{v}) = \underset{\in\mathbb{C}}{i_v\tilde{u}}\,\tilde{v} + \tilde{u}\,\underset{\in\mathbb{C}}{i_v\tilde{v}} = \underbrace{i_v(u)}_{\neq 0}cv + u\,\underbrace{i_v(cv)}_{=0} \rightsquigarrow v \in \mathrm{span}\{\tilde{u},\tilde{v}\}$

· podobně volbou potenciálně jiné formy g pro u dostaneme $u \in \mathrm{span}\{\tilde{u},\tilde{v}\}$

$\Rightarrow \mathrm{span}\{u,v\} \subseteq \mathrm{span}\{\tilde{u},\tilde{v}\} \overset{\dim = 2}{\Longrightarrow} \mathrm{span}\{u,v\} = \mathrm{span}\{\tilde{u},\tilde{v}\}$

· ZÁVĚR: $pl: Gr_2(\mathbb{C}^4) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4)$ realizuje $Gr_2(\mathbb{C}^4)$ jako Kleinovu kvadriku v $\mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4)$,

speciálně, $Gr_2(\mathbb{C}^4)$ tvoří algebraickou varietu

Sféra $S^2 \cong \mathbb{C}P^1$

$\cdot\, S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{C}P^1 := \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$

$\hookrightarrow$ přímka $[\binom{z_1}{z_2}] \in \mathbb{C}P^1 \longleftrightarrow \begin{cases} \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C}, & \text{je-li } z_2 \neq 0 \\ \infty, & \text{je-li } z_2 = 0 \end{cases}$

$\rightsquigarrow S^2$ je vlajková varieta $FL(1,2)$ nad $\mathbb{C}$

$\rightsquigarrow S^2 \cong SL(2,\mathbb{C}) / \mathrm{Stab}(v_0)$ pro libovolný $v_0 \in S^2$ ... $SL(2,\mathbb{C})$ akce na $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ je $g \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$, $z \in \mathbb{C}$, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$

$g \cdot \infty = \frac{a}{c}$

$\cdot$ spočteme $\mathrm{Stab}(\infty)$: jako prvek $\mathbb{C}P^1$ je $\infty = [\binom{1}{0}]$, nechť $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$,

pak $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} [\binom{1}{0}] = [\binom{a}{c}] = [\binom{1}{0}] \iff c = 0$

$\rightsquigarrow \mathrm{Stab}_{SL}(\infty) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}) \,\middle|\, c = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{C}^\times, b \in \mathbb{C} \right\} \cong \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}$

~~Pozn./~~ $\cdot$ pozorování: Lieova algebra podgrupy $B := \mathrm{Stab}_{SL}(\infty)$ je $\mathfrak{b} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{C} \right\}$,

co je přesně Borelova podalgebra $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ \subseteq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

$\hookrightarrow = \begin{pmatrix} \mathbb{C} & 0 \\ 0 & -\mathbb{C} \end{pmatrix}$, $\mathfrak{n}_+ \to \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{C} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Komplexní variety a vektorové bundly

DEF.

Nechť M je reálná hladká varieta dimenze $2n$ s atlasem $\mathcal{A}$. Řekneme, že M je <u>komplexní varieta</u>, pokud existuje podatlas $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ t.ž. přechodové funkce jsou biholomorfní, t.j. $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{A}'$: $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{C}^n \rightarrowtail \mathbb{C}^n$ je biholomorfní.

$\cdot$ zde ztotožňujeme $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + i y_1 \\ \vdots \\ x_n + i y_n \end{pmatrix}$$

$\cdot$ zobrazení $f : \mathbb{C}^n \rightarrowtail \mathbb{C}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, je <u>holomorfní</u>, pokud $\forall u \in D(f)$ (def. obor f) $\exists U \subseteq \mathbb{C}^n$ ot. okolí u

t.ž. $f_i(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha^{(i)} (z_1 - u_1)^{\alpha_1} \dots (z_n - u_n)^{\alpha_n}$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in U$, $a_\alpha^{(i)} \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, m$

$\cdot\, f : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}^2$ je holomorfní $\iff \exists$ reálný $(df)_p$ $\forall p \in D(f)$ a platí (CR) $\partial_x f_1 = \partial_y f_2$, $\partial_x f_2 = -\partial_y f_1$, je-li $f = (f_1, f_2)$

$\cdot$ formulace (CR) pomocí Dolbeaultových derivací:

$\partial_z := \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$, $\partial_{\bar z} := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$ $\rightarrow$ pak $\partial_{\bar z} f = 0 \iff f$ splňuje (CR), kde $f = (f_1, f_2) = f_1 + i f_2$

$\cdot$ <u>pozn.</u>: $4 \partial_z \partial_{\bar z} = \dots = \partial_x^2 + \partial_y^2 = \Delta$ na $C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$\hookrightarrow$ speciálně, každá holomorfní $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ je harmonická: $\partial_{\bar z} f = 0 \Rightarrow \Delta f = 0$

· vektorový bundle s fibrem V (vek. prostor) je hladká submerze $p: \mathcal{V} \longrightarrow M$

↳ varieta

t.ž. $\exists (U_\alpha)_\alpha$ otevřené pokrytí M splňující, že

↳ surjekce t.ž. $(dp)_x$ má rank $= \dim M$ $\forall x \in \mathcal{V}$

diagram
$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, "p"'] & & U_\alpha \times V \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$
komutuje, $p^{-1}(m) \xrightarrow{\varphi_\alpha} \{m\} \times V$ je lineární izomorfismus $\forall m \in U_\alpha$

↳ každý $p^{-1}(m)$, $m \in M$, má strukturu vektorového prostoru V

↳ fibre

· je-li $f: M \longrightarrow M$ difeomorfismus, pak řekneme, že vekt. bundle $p_1: \mathcal{V}_1 \longrightarrow M$, $p_2: \mathcal{V}_2 \longrightarrow M$ jsou f-izomorfní, pokud $\exists F: \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{V}_2$ difeomorfismus t.ž. diagram
$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}_1 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p_1"'] & \mathcal{V}_2 \arrow[d, "p_2"] \\ M \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$
komutuje

a $\forall m \in M: F: p_1^{-1}(m) \longrightarrow p_2^{-1}(m)$ je lineární

· pokud $H \leq G$ Lieovy grupy, pak zobrazení $G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} G/H$ tvoří tzv. homogenní H-bundle,

↳ uzavřená

t.j. fibre je $\pi^{-1}(gH)$ ~~≅~~ difeomorfní H (tedy ne vektorový prostor, ale geometricky grupa H)

Př. S^2 tvoří homogenní $SO(2)$-bundle:

$S^2 \cong SO(3)/SO(2)$

↳ stabilizátor bodu $x \in S^2$ (rotace ~~...~~ podle osy $\vec{O}x$)

↳ má tranzitivní akci na S^2

⇝ máme $SO(2)$-bundle

$\pi: SO(3) \twoheadrightarrow S^2 \cong SO(3)/SO(2)$

$\pi^{-1}(x) \overset{\text{difeo.}}{\cong}$ ~~...~~ $SO(2)$

Lieova grupa

· hlavní G-bundle ... $p: \mathcal{G} \longrightarrow M$ (submerze) s pravou akcí G na $\mathcal{G}$ (free), která zachovává fibre $p^{-1}(m)$ $\forall m \in M$

tedy zobrazení $r: \mathcal{G} \times G \longrightarrow \mathcal{G}$, $(x, g) \longmapsto x \cdot g$ t.ž. $r\left(p^{-1}(m) \times G\right) \longrightarrow p^{-1}(m)$, $\forall m \in M$

které navíc splňuje, že $\exists (U_\alpha, \varphi_\alpha)$ pokrytí M t.ž.
$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, "p"'] & & U_\alpha \times G \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$
komutuje

a $pr_2\left(\varphi_\alpha(x g)\right) = pr_2\left(\varphi_\alpha(x)\right) \cdot g \in G$ $\forall x \in \mathcal{G}$ $\forall g \in G$

(homogenita)

Př.

(M, g) Riemannova varieta ($\dim M = n$) $\rightsquigarrow \mathcal{G} := \{B \mid B$ je ON báze $T_m M$, $m \in M\}$

$\rightsquigarrow \mathcal{G}$ je hlavní $O(n)$-bundle

<u>DEF.</u>

Nechť $H \leq G$ jsou Lieovy grupy a $\rho : H \to \mathrm{Aut}(V)$ je reprezentace, V kon. dim.
uuz.

Potom <u>asociovaný bundle</u> k ρ je ~~...~~ vektorový bundle $\mathcal{V} := G \times_\rho V := {}^{G\times V}/_{\simeq}$

na varietě G/H, kde $(g,v) \simeq (gh, \rho(h^{-1})v)$ $\forall g \in G, h \in H, v \in V$

a strukturní submerze je $p : \mathcal{V} \to G/H$.

$$[(g,v)]_\simeq \mapsto gH$$

<u>Zpět k rep. Lieových grup</u>

· G kompaktní Lieova grupa $\rightsquigarrow$ <u>maximální torus</u> $T \leq G$ je maximální komutativní Lieova podgrupa G

$\rightsquigarrow$ pak $T \cong S^1 \times \dots \times S^1$

pro vhodný # násobků

<u>Př.</u>

$SO(2)$ ... komutativní $\rightsquigarrow$ $T = SO(2) \cong S^1$

$SO(3)$ ... $T = SO(2) \subseteq SO(3)$ ... ~~T~~

$\,\begin{array}{c}\wr\wr \\ S^1\end{array}$

$$\underset{\in SO(2)}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \longmapsto \left(\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \in SO(3)$$

$SO(2n)$ má max. torus $\underbrace{SO(2) \times \dots \times SO(2)}_{n}$:

$$\begin{pmatrix} \boxed{SO(2)} & & & O \\ & \boxed{SO(2)} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \boxed{SO(2)} \end{pmatrix} \subseteq SO(2n)$$

<u>Fakt</u>

Každá kompaktní Lieova grupa G je maticová,

tedy $\exists \rho : G \hookrightarrow \mathrm{Aut}(V)$, V kon. dim., ρ prostý homomorfismus (= věrná reprezentace).

Pokud je navíc G jednoduchá, tak $G^{\mathbb{C}} \subseteq \mathrm{Aut}(V^{\mathbb{C}})$ je algebraická, kde $V^{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ je komplexifikace

a $G^{\mathbb{C}}$ je tzv. komplexifikace G (technický

Zariski-uzavřená
v $\mathrm{Aut}(V^{\mathbb{C}})$, tedy množina řešení
komplexní polynomiálních rovnic

<u>Př.</u>

$SO(n,\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ $\rightsquigarrow$ $SO(n,\mathbb{C})$ = zero set

pro rovnice
$A^T A = I_n$
nad $\mathbb{C}$

$\|$

$\{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid A^T A = I_n\}$

↳ polyno

$= \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^T A = I_n\}$

"Iwasawův"

<u>Fakt</u> (rozklad grupy G)

Je-li G kompaktní s max. torem T, pak $\exists A, N \leq G$ Lieovy podgrupy, A abelovská, t.ž.

$$\exp : \underset{\substack{\| \\ \mathrm{Lie}(N)}}{\mathfrak{n}_+} \to N \quad \text{a} \quad \exp : \underset{\substack{\| \\ \mathrm{Lie}(A)}}{\mathfrak{a}} \to A \quad \text{jsou bijekce,} \quad \mathfrak{a} = i\mathfrak{t}$$

↳ $\mathrm{Lie}(T)$

a zobrazení
$$T \times \mathfrak{a} \times \mathfrak{n}_+ \to G$$
$$(t, a, n) \mapsto T \cdot \exp(a) \cdot \exp(n)$$
je difeomorfismus

Fakt

Jsou-li G, H Lieovy grupy t.ž. $H \leq G$ a uvážíme asociovaný bundle $G\times_\varrho V$ pro rep. (ϱ, V) grupy H,

pak $\Gamma(G/H, G\times_\varrho V) \cong C^\infty(G,V)^H$,

kde $\Gamma(G/H, G\times_\varrho V)$ je prostor C^∞-sekcí bundlu $G\times_\varrho V \xrightarrow{p} G/H$, t.j. $s: G/H \to G\times_\varrho V$ t.ž. $p\circ s = id$

a $C^\infty(G,V)^H = \{ f\in C^\infty(G,V) \mid f(gh) = \varrho(h^{-1})f(g)\ \forall g\in G\ \forall h\in H\}$.

↳ H-invariantní funkce na G

Důkaz (sketch)

definujme $C^\infty(G,V)^H \longrightarrow \Gamma(G/H, G\times_\varrho V)$, kde $s_f(gH) := [(g, f(g))] \in G\times_\varrho V$

$f \longmapsto s_f$

$f_s \longleftarrow s$

... dobře def.: pro $h\in H$ platí

$s_f(ghH) = [(gh, f(gh))] \underset{\downarrow}{=} [(gh, \varrho(h^{-1})f(g))]$ invariance f ✓

$\underset{\text{def. } G\times_\varrho V}{=} [(g, f(g))]$

$f_s(g) := g^{-1}\cdot \underbrace{s(gH)}_{\in (G\times_\varrho V)_{gH}}$, kde $\tilde g\cdot[(g,v)] := [(\tilde g g, v)]$

$\rightsquigarrow g^{-1}\cdot s(gH) \in (G\times_\varrho V)_{g^{-1}gH} = (G\times_\varrho V)_{1H} \cong V$

↓ fixovaná identifikace fibru nad $1H$ s V (nekanonická, ale volí se u definice $G\times_\varrho V$)

- nechť G je kompaktní Lieova grupa, $T\leq G$ max. torus, $\mathfrak{a} = i\mathfrak{t}$ je Lieova algebra abel. podgrupy $A\subseteq G$ z rozkladu grupy G
- nechť $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ a $W_\mathfrak{g}$ je Weylova grupa $\mathfrak{g}$, $w_0 \in W_\mathfrak{g}$ je (jediný) prvek $W_\mathfrak{g}$, který zobrazí fundamentální Weylovu komoru C na $-C$
- potom $\Gamma_{hol}(G/T, G\times_{\varrho_\lambda}\mathbb{C}_\lambda) \cong \begin{cases} L(w_0\cdot\lambda)^*, & -\lambda \text{ je dominantní} \\ 0, & \text{jinak}\end{cases}$ pro $\lambda\in\mathfrak{a}^*$, kde $w_0\cdot\lambda = w_0(\lambda+\delta)-\delta$ je afinní akce

↳ holomorfní sekce

Borel-Weil

a $\varrho_\lambda: T \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\lambda)$, $\varrho_\lambda(t)z = e^{\lambda(i t)}z$, $z\in\mathbb{C}_\lambda = \mathbb{C}$, $t\in T$

[Fakt: i) G/T tvoří komplexní varietu.]

ii) $G/T \cong G^\mathbb{C}/B^\mathbb{C}$ $\quad B = A\cdot N \subseteq G$ z rozkladu G

↳ Borelova podgrupa v $G^\mathbb{C}$ $\rightsquigarrow \mathrm{Lie}(B^\mathbb{C}) = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{a}$ (Borelova algebra v $\mathfrak{g}^\mathbb{C} = \mathrm{Lie}(G^\mathbb{C})$)

Pozn.: $G\times_{\varrho_\lambda}\mathbb{C}_\lambda \cong G^\mathbb{C}\times_{\varrho_\lambda^\mathbb{C}}\mathbb{C}_\lambda$, kde $\varrho_\lambda^\mathbb{C}: B^\mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\lambda)$

$A \longrightarrow \exp(\lambda \ldots)$

$N \longrightarrow 1$

} "po derivaci": $\tau_\lambda: \mathfrak{b} \to \mathrm{End}(\mathbb{C}_\lambda)$

$\mathfrak{n}_+ \mapsto 0$

$\mathfrak{h} \mapsto (\lambda-\delta)$

při definici Vermova modulu

$\rightsquigarrow$ asociovaný bundle $G\times_{\varrho_\lambda}\mathbb{C}_\lambda$ je "integrovaná" verze (po komplexifikaci) Vermova modulu $M(\lambda+\delta) = \mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})}\mathbb{C}_\lambda$, nebo lépe jeho podílu $L(\lambda+\delta)$

Věta (Borel-Weil)

Nechť $T \leq G$, $\quad \mathfrak{a} = i\mathfrak{t}$ ... "Cartanova podalgebra" $\mathfrak{g}$ (t.j. $\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$ je Cartanova podalgebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$)

max. torus (T), kompaktní (G), $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$

Potom
$$\Gamma_{hol}\left(G/T,\ G \times_{\rho_\lambda} \mathbb{C}_\lambda\right) \cong \begin{cases} L(w_0 \cdot \lambda), & \text{je-li } \lambda \in P_{++}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}), \\ 0, & \text{jinak}. \end{cases}$$

P_{++} … dominantní

kde $G \times_{\rho_\lambda} \mathbb{C}_\lambda$ je T-bundle asociovaný k rep. $\rho_\lambda : T \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\lambda)$
$$t \longmapsto \left(e^{\lambda(it)}\right)$$

a w_0 je prvek Weyl grupy $W_{\mathfrak{g}}$,

který zobrazí fundamentální Weylovu ~~oblast~~ komoru C na $-C$.

Pozn.

- podobně jako pro C^∞-sekce můžeme psát $\Gamma_{hol}\left(G^{\mathbb{C}}/B^{\mathbb{C}},\ G^{\mathbb{C}} \times_{\rho_\lambda^{\mathbb{C}}} \mathbb{C}_\lambda\right) \cong \mathcal{H}(G^{\mathbb{C}}, \mathbb{C}_\lambda)^{B^{\mathbb{C}}} = \begin{cases} L(w_0 \cdot \lambda) \\ 0 \end{cases}$

  po komplexifikacích $T \rightsquigarrow B^{\mathbb{C}}$

  $G \rightsquigarrow G^{\mathbb{C}}$

  $\rho_\lambda \rightsquigarrow \rho_\lambda^{\mathbb{C}}$

  $\mathcal{H}$ … holomorfní funkce invariantní vůči akci $B^{\mathbb{C}}$ na $\mathbb{C}_\lambda$:
  $$f(gb) = \rho_\lambda^{\mathbb{C}}(b^{-1}) f(g)$$

- Bott-Borel-Weil $\rightsquigarrow$ místo Γ_{hol} říká o kohomologii H^k asociovaného bundlu $G \times_{\rho_\lambda} \mathbb{C}_\lambda$