Vzorové řešení 1. náhradní písemky

rozšíření a dál vzorec pro $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x^2}-\sqrt[3]{8-x^2}}{x\left((x+1)^2-(x-1)^2\right)} \overset{\text{prst. okolí}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left[(8+x^2)^{\frac{1}{3}}-(8-x^2)^{1/3}\right]\left[(8+x^2)^{\frac{2}{3}}+\dots+(8-x^2)^{2/3}\right]}{x\,(4x)\left[(8+x^2)^{2/3}+\dots+(8-x^2)^{2/3}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(8+x^2)-(8-x^2)}{4x^2\left[(8+x^2)^{2/3}+(8+x^2)^{1/3}(8-x^2)^{1/3}+(8-x^2)^{2/3}\right]}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{4x^2\,[\text{ dtto }]} = \frac{1}{2}\;\frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{24}$$

Předposl. rovnost je VoAL, rovnost lim. na prstenc. okolí a spojitost fce v [ ] s dtto („řečeně, tohle" italsky). Lépe vypsat celé. Píšu to pro úsporu místa.

2. $\lim_{x\to 2^-} (x-1)^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x}$. Jde o 1^∞ (neurčitý výraz).

Takové přík. řešíme pomocí exponenciály. Spočteme

$e^{\lim_{x\to 2^-}\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}x)\ln(x-1)}$. Nejdřív $\lim_{x\to 2^-}\frac{\sin\frac{\pi x}{4}}{\cos\frac{\pi x}{4}\,(\searrow 0)}\ln(x-1)\;(\nearrow 0)$

(Jde tedy o $\frac{0}{0}$). Vhodné nejdřív „přesunout" do bodu, kde lim. známe. Subst. $y = 2-x$ (velmi podobné $x-2$)

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}y\right)}\ln(y+1) = \lim_{y\to 0^+}\frac{\ln(1-y)}{-y}\;\frac{-y}{\sin\left(\frac{\pi}{4}y\right)}$$

$$\overset{\text{VoAL}}{=} \lim_{y\to 0^+}\frac{\ln(1-y)}{-y}\;\lim_{y\to 0^+}\frac{-y}{\sin\frac{\pi y}{4}} \overset{\text{vzorec}}{=} 1\lim_{z\to 0}\frac{-\frac{4z}{\pi}}{\sin z} =$$

$z = \frac{\pi y}{4}$

$$= \lim_{z\to 0^+}\left(-\frac{4}{\pi}\right)\frac{\sin z}{z} = -\frac{4}{\pi}.$$ Celkem $e^{-\frac{4}{\pi}}$.

[I v 2^+ má lim. smysl a vyjde stejně]