Matematika pro ekonomy
Domácí úkol 13
Průběh funkce II

Vyšetřete průběh funkce, tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitých bodech), limity v krajních bodech D_f, derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body, nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

Příklady jsou vybrány ze závěrečných testů z minulých let.

1. $\frac{e^{x+2}}{x-1}$	**5.** $\frac{\ln(x^2)}{x}$	**9.** $\frac{x}{x^2-4}$
2. $e^{-x^2+8x-14}$	**6.** $(x^2+2x+1)e^x$	**10.** xe^{-x^2}
3. $\frac{e^{-2x}}{e(x+1)}$	**7.** $\frac{1+\ln x}{x}$	**11.** $\sqrt{x}(2x-16\sqrt{x}+32)$
4. $\ln(4-x^2)$	**8.** $\frac{(x+2)^2}{e^x}$	**12.** $\sqrt{x}(x-3)^2$

Aplikace

13. Firma provozující kabelovou televizi zajišťuje příjem pro 25 000 domácností a účtuje si 850 Kč měsíčně. Výzkum trhu ukázal, že každá padesátikoruna, o kterou vzroste měsíční poplatek, způsobí ztrátu 1 000 zákazníků, naopak každý pokles ceny o 50 Kč přiláká 1 000 nových zákazníků. Předpokládejme, že výsledný výnos je součinem počtu zákazníků a nastavené ceny.

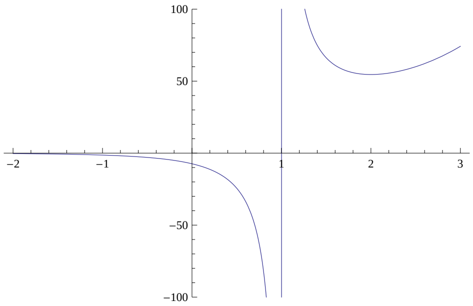
Zvolte vhodnou symboliku, příklad srozumitelně rozeberte a přehledně zpracujte. Sestavte tabulku zachycující několik souvisejících hodnot ceny, počtu zákazníků a výnosu. Odvoďte předpisy (ve všech vhodných tvarech) funkcí zachycujících (a) závislost počtu zákazníků na ceně, (b) závislost ceny na počtu zákazníků, (c) závislost výnosu na ceně a (d) závislost výnosu na počtu zákazníků; nezapomeňte vhodně omezit jejich definiční obory vzhledem k modelované situaci. Nakreslete grafy jednotlivých funkcí a vyneste do nich příslušné body z tabulky.

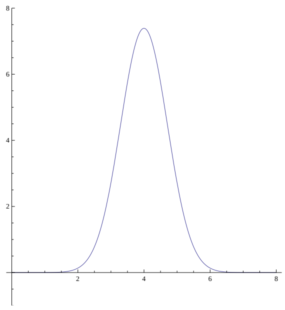
Zjistěte, pro kterou cenu dosáhne firma maximálního výnosu. U funkce (c) určete její maximum jednak ze znalosti jejího grafu, jednak s využitím její derivace. Nalezený bod vyznačte i v ostatních grafech a doplňte do tabulky. V grafu (b) vyznačte obdélník určený touto kombinací ceny a počtu zákazníků; uvědomte si, že velikost plochy obdélníka odpovídá příslušnému výnosu – z tohoto pohledu jsme tedy hledali maximální obdélník pod křivkou zachycující vztah ceny a počtu zákazníků. Derivujte funkci (a) a výsledek interpretujte vzhledem k zadání.

Řešení:

1. $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$, kořeny nejsou, $\lim_{x\to-\infty} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$, $\lim_{x\to 1-} = -\infty$, $\lim_{x\to 1+} = +\infty$, klesá v $(-\infty,1),(1,2)$, roste v $(2,+\infty)$, konvexní v $(1,+\infty)$, konkávní v $(-\infty,1)$, asymptota $y=0$ v $-\infty$.

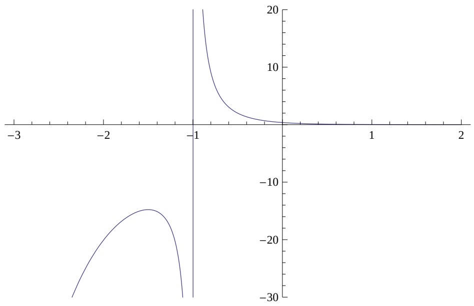
2. $D_f = \mathbb{R}$, kořeny nejsou, $f>0$ všude, $\lim_{x\to\pm\infty} = 0$, roste v $(-\infty,4\rangle$, klesá v $\langle 4,+\infty)$, konkávní v $(4-\frac{\sqrt{2}}{2}, 4+\frac{\sqrt{2}}{2})$, konvexní všude okolo, asymptota $y=0$ v $\pm\infty$.

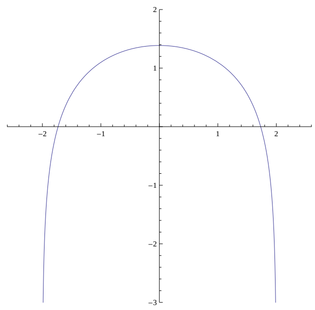
1. 

2. 

3. $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$, kořeny nejsou, $\lim\limits_{x\to+\infty} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1-} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1+} = +\infty$, roste v $(-\infty,-1)$, klesá v $(-\frac{3}{2},-1),(-1,+\infty)$, konvexní v $(-1,+\infty)$, konkávní v $(-\infty,-1)$, asymptota $y=0$ v $+\infty$.

4. $D_f = (-2,2)$, sudá, kořeny: $\pm\sqrt{3}$, $\lim\limits_{x\to\pm2} = -\infty$, roste v $(-2,0)$, klesá v $(0,2)$, konkávní všude.

3. 

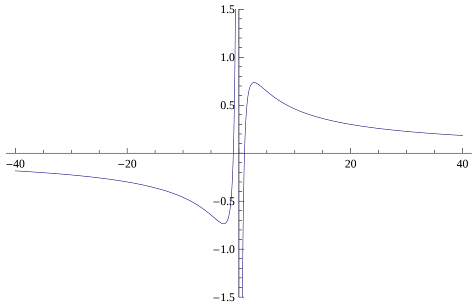
4. 

5. $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, lichá, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = 0$, $\lim\limits_{x\to0\pm} = \mp\infty$, roste v $(-e,0),(0,e)$, klesá v $(-\infty,-e),(e,+\infty)$, konvexní v $(-e^{3/2},0),(e^{3/2},+\infty)$, konkávní v $(-\infty,-e^{3/2}),(0,e^{3/2})$, asymptota v $\pm\infty$: $y=0$.

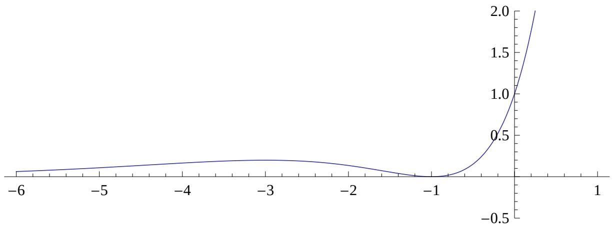
6. $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ v $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$, roste v $(-\infty,-3)$, $(-1,+\infty)$, klesá v $(-3,-1)$, konvexní v $(-\infty,-3-\sqrt{2}\rangle, \langle-3+\sqrt{2},+\infty)$, konkávní v $(-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2})$, asymptota v $-\infty$ je $y=0$, v $+\infty$ není.

7. $D_f = \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{x\to+\infty} = 0$, $\lim\limits_{x\to0+} = -\infty$, roste v $(0,1)$, klesá v $(1,+\infty)$, konvexní v $(e^{1/2},+\infty)$, konkávní v $(0,e^{1/2})$, asymptota v $+\infty$: $y=0$.

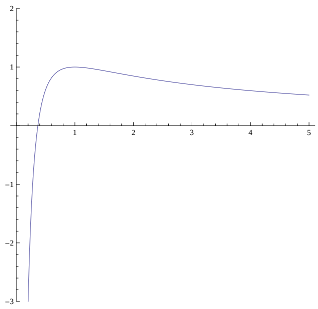
8. $D_f = \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} = 0$, roste v $(-2,0)$, klesá v $(-\infty,-2),(0,+\infty)$, konkávní v $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, konvexní jinde, asymptota v $+\infty$ je $y=0$.



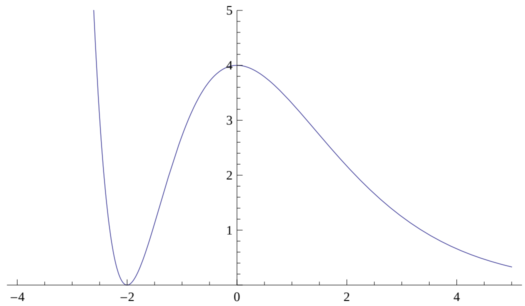
5.



6.



7.



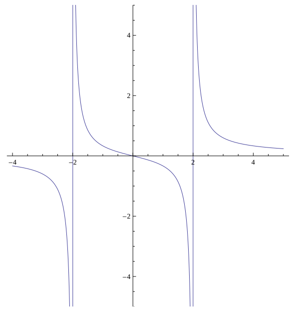
8.

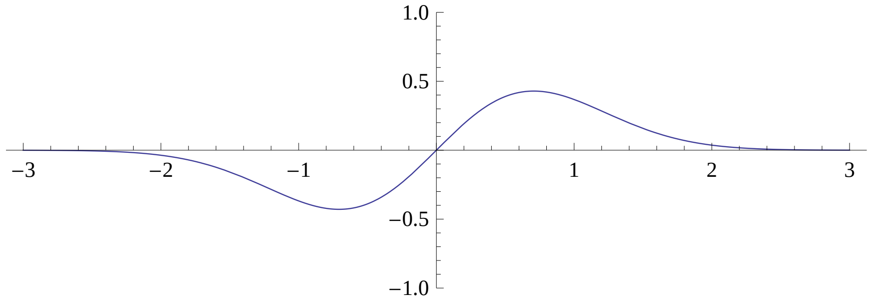
9. $D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$, lichá, $\lim\limits_{x \to \pm 2-} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \pm 2+} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = 0$, klesá v $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, +\infty)$, konvexní v $(-2, 0), (2, +\infty)$, konkávní v $(-\infty, -2), (0, 2)$, asymptota v $\pm\infty$ je $y = 0$.

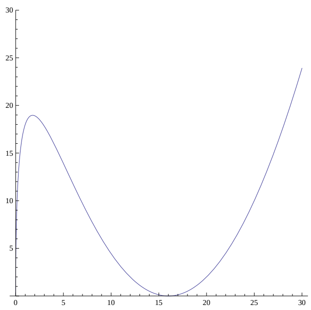
10. $D_f = \mathbb{R}$, lichá, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = 0$, roste v $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, klesá v $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$, konkávní v $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}), (0, \sqrt{\frac{3}{2}})$, konvexní ve zbylých intervalech, asymptota v $\pm\infty$: $y = 0$.

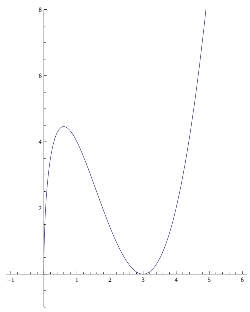
11. $D_f = \langle 0, +\infty)$, kořeny: $0, 16$, $\lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty$, roste v $(0, \frac{16}{9}), (16, +\infty)$, klesá v $(\frac{16}{9}, 16)$, konkávní v $(0, \frac{16}{3}$, konvexní v $(\frac{16}{3}, +\infty)$, asymptota není.

12. $D_f = \langle 0, +\infty)$, kořeny: $0, 3$, $\lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty$, roste v $(0, \frac{3}{5}), (3, +\infty)$, klesá v $(\frac{3}{5}, 3)$, konkávní v $(0, \frac{3+2\sqrt{6}}{5}$, konvexní v $(\frac{3+2\sqrt{6}}{5}, +\infty)$, asymptota není.

9. 

10. 

11. 

12. 

13. Tabulka:

cena	klientů	výnos
700	28 000	19 600 000
750	27 000	20 250 000
800	26 000	20 800 000
850	25 000	21 250 000
900	24 000	21 600 000
950	23 000	21 850 000
1000	22 000	22 000 000
1050	21 000	22 050 000
1100	20 000	22 000 000
1150	19 000	21 850 000
1200	18 000	21 600 000

Z tabuky to vypadá, že by mohl být nejvyšší výnos pro cenu 1050 Kč. Ale víme to jistě? Co když to je třeba pro 1060 Kč? Abychom nehádali a věděli to přesně, sestavíme funkce.

Označme c cenu, k počet klientů, v měsíční výnos. Tyto veličiny můžeme interpretovat jako nezávislé i jako závislé (na některé z ostatních veličin). Označme dále zadané hodnoty (odpovídající „stávajícímu stavu“) $c_0 = 850$ Kč, $k_0 = 25000$ klientů.

Zadání lze interpretovat tak, že každá koruna navíc (tedy $c - c_0$) odebere ze stávajícího počtu 20 klientů (a naopak). Tedy (a)

$$k(c) = k_0 - 20(c - c_0) = 25000 - 20(c - 850) = 42000 - 20c,$$

což má smysl uvažovat pro $c \in \langle 0, 2100 \rangle$. Odsud (b)

$$c(k) = 2100 - \frac{k}{20}$$

pro $k \in \langle 0, 42000 \rangle$. Pak (c) výnos jako funkce ceny je

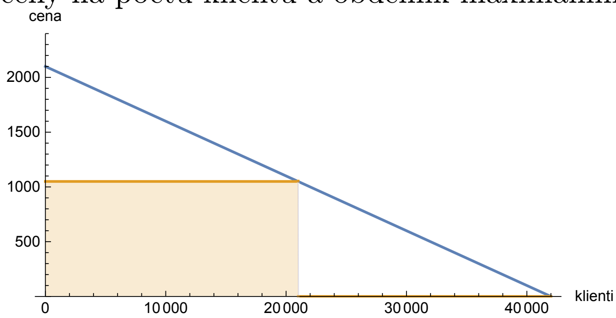
$$v(c) = c \cdot k(c) = c \cdot (42000 - 20c) = -20c^2 + 42000c$$

a (d) výnos jako funkce počtu klientů je

$$v(k) = c(k) \cdot k = (2100 - \frac{k}{20}) \cdot k = -\frac{k^2}{20} + 2100k.$$

Derivováním funkce $v(c)$ dostaneme $v'(c) = -40c + 42000$ a tedy funkce v bodě $c =$ 1050 Kč má funkce $v(c)$ stacionární bod, o němž snadno ukážete, že jde o maximum, a dopočítáte, že to odpovídá 21 000 klientů, a maximální zisk pak činí 22 050 000 Kč. Téhož výsledku dosáhneme derivováním funkce $v(k)$.

Závislost ceny na počtu klientů a obdélník maximálního výnosu:



Závislost výnosu na ceně a bod maxima: