Průběžný test ZS 2021/22
Varianta A

V každé úloze všechny kroky výpočtu podrobně zdůvodněte.

1. (2 body) Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-2n-1}.$$

2. (2 body) Zderivujte funkci

$$e^{3x^2+2x-1} + \frac{4x+1}{x^2-3x}$$

3. (6 bodů) Hyperbola je zadána jako graf funkce

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+2}.$$

Určete rovnici tečny ke grafu funkce v bodě $x_0 = -1$. Načrtněte tuto hyperbolu s vyznačenými průsečíky s osami, středem, asymptotami a se zadanou tečnou, u tečny určete a vyznačte její průsečíky s osami a bod dotyku s hyperbolou.

4. (10 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x - 5,$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami, limity v krajních bodech D_f, derivaci funkce a její nulové body, intervaly monotonie, lokální a globální extrémy, obor hodnot, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body. Nakreslete graf funkce.

Varianta A

1. $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-2n-1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1-(n^2-2n-1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-2n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{3}{2}$$

2. $$\left(e^{3x^2+2x-1}+\frac{4x+1}{x^2-3x}\right)' = (6x+2)\,e^{3x^2+2x-1}+\frac{4(x^2-3x)-(4x+1)(2x-3)}{(x^2-3x)^2}$$

$$= (6x+2)\,e^{3x^2+2x-1}+\frac{-4x^2-22x-3}{(x^2-3x)^2}$$

3. $$f(x)=\frac{3x-1}{x+2}\Bigg|_{x_0=-1}=-4$$

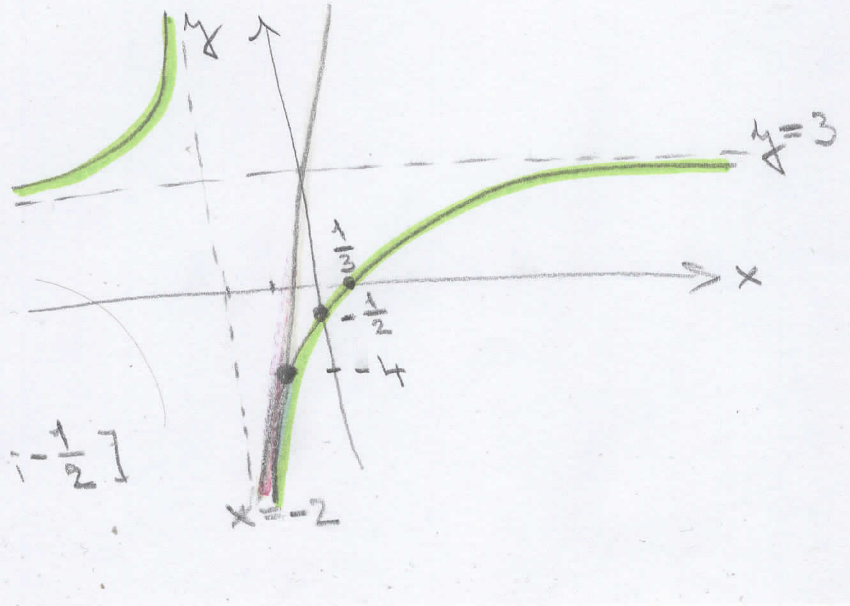
$$f'(x)=\frac{3(x+2)-(3x-1)}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}\Bigg|_{x_0=-1}=7=k$$

tečna: $t: y=7x+q$

$[-1,-4]\in t \quad -4=7(-1)+q \Rightarrow q=3$

$$\boxed{t: y=7x+3}$$

x	0	$-\frac{3}{7}$
y	3	0



průsečíky hyperboly s osami: $[\frac{1}{3};0]$, $[0;-\frac{1}{2}]$

4. $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ $\quad D = \mathbb{R}$

$f(1) = -1 - 3 + 9 - 5 = 0$

$(-x^3 - 3x^2 + 9x - 5) : (x-1) = -x^2 - 4x + 5$

$-(-x^3 + x^2)$

$-4x^2 + 9x - 5$

$-(-4x^2 + 4x)$

$5x - 5$

$-(5x - 5)$

0

$(-x^3 - 3x^2 + 9x - 5) = (x-1)(-x^2 - 4x + 5) = (x-1)(-1)(x-1)(x+5)$

průsečíky s osami: $[1;0]$ $[-5;0]$ $[0;-5]$

$f'(x) = -3x^2 - 6x + 9 = (-3)(x^2 + 2x - 3) = (-3)(x+3)(x-1)$

$f'(x) = 0 \iff x = 1 \vee x = -3$

$f'<0$ $\quad -3 \quad$ $f'>0$ $\quad 1 \quad$ $f'<0$

$\searrow \quad \nearrow \quad \searrow$

$f(1) = 0$ ... lok. maximum $[1;0]$

$f(-3) = 27 - 27 - 27 - 5 = -32$ ... lok. minimum $[-3;-32]$

$f''(x) = -6x - 6 = 0 \iff x = -1$

$\cup$ $\quad \cap$

$f''>0$ $\quad -1 \quad$ $f''<0$

$f(-1) = 1 - 3 - 9 - 5 = -16$

inflexní bod: $[-1;-16]$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot \left(-1 - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{5}{x^3}\right) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$