

Příklady k procvičení, 3. série

V každé z následujících úloh proveďte projektivní, afinní a metrickou klasifikaci zadané regulární kvadriky, tj. určete její projektivní i afinní typ, u středových určete střed, směry os, reálné délky poloos, u nestředových pak směr osy, a v dimenzi 2 vrchol paraboly a rovnici vrcholové tečny.

1. $18x^2 + 8xy + 12y^2 - 44x - 52y + 57 = 0$

2. $2x^2 + 3xy - 2y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$

3. $9x^2 - 6xy + y^2 + 13x - y + 3 = 0$

4. $x^2 + 14xy - 6xz + y^2 + 6yz + z^2 + 1 = 0$

5. $3x^2 - 4xy - 2xz + 3y^2 + 2yz + 4z^2 - 6x - 6z + 8 = 0$

6. $2x^2 + 2xz + 2y^2 - 2yz + z^2 - x + z + \frac{1}{16} = 0$

U následujících kvadrik dokažte, že jsou singulární, najděte jejich vrchol a určete typ. Pokud je to možné, rozložte rovnici kvadriky na součin lineárních rovnic.

7. $2x^2 + xy + 5xz - y^2 - 4yz - 3z^2 = 0$

8. $2x^2 + 2xz + 2y^2 + 2yz + z^2 - 6x + 2y - 2z - 1 = 0$

Řešení

1. elipsa, střed $[8/10, 19/10]$, vl. čísla 20, 10, směry os $(1, -2), (2, 1)$, délky poloos $1, \sqrt{\frac{1}{2}}$

2. hyperbola, střed $[4/5, -2/5]$, vl. čísla (pro dvojnás. matici) 5, -5, směry os $(1, -3), (3, 1)$, délky poloos $\sqrt{2}, (i\sqrt{2})$

3. parabola, směr osy $(1, 3)$, vl. čísla (pro dvojnás. matici) 20, 0, vrchol $[-1/2, 1/2]$, vrcholová tečna $x + 3y = 1$

4. dvoudílný hyperboloid, střed $[0, 0, 0]$, vl. čísla -8, 3, 8, směry os $(3, -3, 2), (1, -1, -3), (1, 1, 0)$, délky poloos $\frac{1}{\sqrt{8}}, (i\frac{1}{\sqrt{3}}, i\frac{1}{\sqrt{8}})$

5. elipsoid, střed $[2, 1, 1]$, vl. čísla 6, 3, 1, směry os $(-1, 1, 1), (1, -1, 2), (1, 1, 0)$, délky poloos $\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1$

6. eliptický paraboloid, vl. čísla 3, 2, 0, směr osy $(1, -1, -2)$

7. 2 různoběžné roviny, rozklad $(x + y + 3z)(2x - y - z) = 0$, $V(Q) =$ průsečnice rovin $[0, 0, 0] + t(2, 7, -3)$

8. válcová plocha (eliptická), směr osy $= V(Q) = (1, 1, -2)$