Projektivní geometrie II NMTD206, LS 23/24

Příklady k procvičení, 1. série

1. Dvě přímky v rovině jsou dány rovnicemi $2x + 3y = 7,\ 5x - y = 9$. Najděte jejich průsečík (a) klasicky řešením soustavy rovnic, (b) převedením do homogenních souřadnic a výpočtem determinantu. Interpretujte tento výpočet také duálně, tj. jako hledání spojnice dvou bodů (kterých?).

2. Najděte spojnici bodů $A = [2 : 3 : -1]$ a $B = [-1 : 4 : 0]$, dokažte, že na ní leží body $C = [1 : 7 : -1]$ a $D = [0 : 11 : -1]$. Spočtěte hodnotu dvojpoměru $(ABCD)$.

3. Určete matici projektivity na $\mathbb{R}P^1$, která zobrazuje

$$[1 : 0] \to [2, -1],\ [2 : 1] \to [5 : 1],\ [1 : 1] \to [3 : 2]$$

4. Určete matici projektivity na $\mathbb{R}P^2$, která zobrazuje

$$[1 : 1 : 0] \to [1 : 3 : -1],\ [0 : 1 : 1] \to [3 : 1 : 0],\ [1 : 0 : 1] \to [4 : 2 : 1],\ [1 : 1 : 1] \to [4 : 3 : 0]$$

5. Určete vlastní čísla, vlastní vektory, Jordanův kanonický tvar a matici R pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ověřte vynásobením matic, že platí rovnost $A = R \cdot J_A \cdot R^{-1}$.

6. Najděte samodružné body projektivity na $\mathbb{R}P^1$ zadané maticí

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

a určete její charakteristiku w.

7. Ukažte, že projektivita zadaná maticí

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

je involuce, najděte její samodružné body a určete typ involuce (eliptická nebo hyperbolická).

8. Najděte samodružné body a přímky projektivity na $\mathbb{R}P^2$ zadané maticí

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení

1. průsečík přímek je $[1 : 2 : 1]$, duálně jde o spojnici bodů $[-7 : 2 : 3]$, $[-9 : 5 : -1]$, a to je přímka $(1 : 2 : 1)$

2. $(ABCD) = \frac{1}{2}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

5. Např. $J_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

6. $[1 : -1]$, $[1 : -5]$, $w = \frac{7}{3}$

7. Je vidět, že $\operatorname{Tr} A = 0$, nebo také že A^2 je násobek jednotkové matice. Samodružné body jsou $[5 : 3 \pm 4i]$, je to eliptická involuce.

8. Samodružné body najdeme jako vlastní vektory matice A, jsou to bod $B = [1 : 2 : 0]$ a všechny body na přímce dané body $\langle [1 : 0 : 1], [0 : 1 : 0] \rangle$. Samodružné přímky najdeme jako vlastní vektory matice A^T, jsou to přímka $q = (1 : 0 : -1)$ a všechny přímky procházející bodem daným přímkami $(2 : -1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$, snadno ovšem ověříme, že to je přesně bod B, a podobně přímka uvedená v první větě je právě přímka q. Z pohledu bodů i přímek tedy dostáváme tu samou jednu (silně samodružnou) přímku a jeden silně samodružný bod.