Matematická analýza NOFY151, ZS 24/25, Cvičení s L. Krumpem

Příklady k procvičení

A. Limity elementárně

Spočtěte zadanou limitu elementárně s použitím známých limit, bez použití l'Hospitalova pravidla a Taylorových polynomů.

A1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(e^x + x^3)}{\ln(e^{3x} + x^6)}$

A2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}),\ a \in \mathbb{R}$

A3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[4]{\cos x}}{\sin x \arcsin x}$

A4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \sin 2x - \cos 2x}{1 - \operatorname{cotg} x}$

A5. $\lim\limits_{x\to\pi\pm} \left(\dfrac{x}{\pi}\right)^{\frac{1}{(\cos x + 1)}}$

A6. $\lim\limits_{x\to 0+} (1 + \operatorname{tg}\sqrt{x})^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

B. Primitivní funkce

Spočtěte primitivní funkci na maximálním možném intervalu, tento interval vždy určete.

B1. $\displaystyle\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

B2. $\displaystyle\int \frac{32x^5}{(2x-1)^3} dx$

B3. $\displaystyle\int 3\sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$

B4. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 1} dx$

B5. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}} dx$

B6. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x(4\sin^2 x - 1)} dx$

B7. $\displaystyle\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 3} dx$

B8. $\displaystyle\int |\sin x| dx$, lichá prim. fce

C. Průběh funkce

V těchto příkladech proveďte vyšetření průběhu funkce, tj. určete:

(i) definiční obor

(ii) obor spojitosti

(iii) limity v krajních bodech D_f a v bodech nespojitosti

(iv) speciální vlastnosti (sudost/lichost, periodicita apod.)

(v) průsečíky s osami, případné další význačné body

(vi) první derivace, intervaly monotonie, extrémy, obor hodnot, jednostranné derivace, příp. limity derivací v problematických bodech

(vii) druhá derivace, konvexita/konkavita, inflexní body (pouze u příkladů označených (*))

(viii) asymptoty

(ix) graf

C1.* $\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+3}$

C2.* $|x|-|x^2-1|$

C3.* $\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x+2)^2}$

C4.* $x^2-4\sqrt[3]{x^2}$

C5. $8\exp\left(-\left|\dfrac{x}{x-2}\right|\right)$

C6. $\sin x+\cos^2 x$

C7. $\sin 2x+2|\cos x|$

C8.* x^x

C9.* $\ln|\ln x|$

C10. $\ln(1+|x-x^2|)$

C11.* $\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x^2}{1-x^2}}$

C12.* $x\operatorname{arccotg}\dfrac{1}{x}$

C13.* $\operatorname{arccotg}\dfrac{x}{x^2-1}$

C14. $\arccos(1-x^2)^2$

D. Taylorovy polynomy, l'Hospitalovo pravidlo

Spočtěte zadanou limitu pomocí Taylorových polynomů nebo pomocí l'Hospitalova pravidla, případně kombinací obou; porovnejte si, co je snazší.

D1. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\exp(-\frac{x^2}{2})}{x^4}$

D2. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^n}$

D3. $\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{(1-\cos\sqrt{x})^2}$

D4. $\displaystyle\lim_{x\to0\pm}\frac{\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1-\exp(-x^2)}}$

D5. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\cos x}-\sqrt{1-x\cos x}}{\ln(1-x)}$

D6. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(\cosh x^2-1)\ln(\cos x)}{\sin^3 x\operatorname{tg}^3 x}$

D7. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1+x-4x^2+x^3)e^x-\sqrt{1+4x-x^2}}{1-\sqrt{1+x^3}}$

D8. $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$

Řešení. **A1.** $\frac{1}{3}$. **A2.** 0 pro $a < \frac{1}{2}$, 1 pro $a = \frac{1}{2}$, $+\infty$ pro $a > \frac{1}{2}$. **A3.** $-\frac{1}{8}$. **A4.** 1. **A5.** $+\infty$ zprava, 0 zleva. **A6.** $e^{\frac{1}{2}}$.

U primitivních funkcí v B1.–B7. neuvádím „$+c$“.

B1. $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ v $\mathbb{R}$.

B2. $\frac{4}{3}x^3 + 3x^2 + 6x + 5\ln|2x-1| - \frac{5}{2(2x-1)} - \frac{1}{4(2x-1)^2}$, $x \neq \frac{1}{2}$.

B3. $2\sqrt{x^3}\operatorname{arctg}\sqrt{x} + \ln(x+1) - x$ v $\mathbb{R}^+$.

B4. $\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{3}}\right) + 2\left(\ln(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 1) - \sqrt{x}\right)$ v $\mathbb{R}^+$.

B5. $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}} - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2(x-1)}{2-x}}$ v $(1,2)$.

B6. $\frac{1}{3}\left(\operatorname{tg} x + \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\sin x - \cos x}{\sqrt{3}\sin x + \cos x}\right|\right)$ pro $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x \neq \pm\frac{1}{6} + k\pi$.

B7. $F(x) = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{2\sin x}{\cos x + 1}\right) + k\pi$ v $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $F(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pro $x = (2k+1)\pi$ je primitivní funkce v $\mathbb{R}$.

B8. $F(x) = \cos x + 4k - 1$ pro $x \in \langle -\pi, 0) + 2k\pi$, $F(x) = -\cos x + 4k + 1$ pro $x \in \langle 0, \pi) + 2k\pi$ je lichá primitivní funkce v $\mathbb{R}$.

C1.–C14. Řešení průběhů funkce si ověřte sami např. na https://www.wolframalpha.com/

D1. $-\frac{1}{12}$. **D2.** $\frac{1}{6}(n=3)$. **D3.** 1. **D4.** ± 1. **D5.** -1. **D6.** $-\frac{1}{4}$. **D7.** $\frac{44}{3}$. **D8.** e^2.