Matematická analýza NOFY151, ZS 24/25, Cvičení s L. Krumpem

Erratum – oprava chyby v řešení příkladu 7 ze sady 7.

Spočetli jsme tvar primitivní funkce

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx$$

jako

$$I(x) = x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x)$$

Protože však zadaná funkce je spojitá v $\mathbb{R}$, musí i její primitivní funkce být definována (a spojitá) v celém $\mathbb{R}$, z tvaru funkce $I(x)$ však vidíme, že je definovaná na množině $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, proto musíme provést lepení.

Spočteme jednostranné limity funkce $I(x)$ v bodech nespojitosti:

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2}+k\pi)+} I(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2}+k\pi)-} I(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

Zde jsem na tabuli udělal chybu v tom, že jsem tyto limity spočítal pouze v bodě $\frac{\pi}{2}$ (zprava i zleva) a pak prohlásil, že v dalších bodech nespojitosti jsou tyto limity stejné. To je ale špatně - obsahují přece zřejmě člen $k\pi$, na který jsem při výkladu zapomněl.

Dále se spočte skok jako rozdíl těchto dvou limit

$$skok = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2}+k\pi)+} I(x) - \lim_{x \to (\frac{\pi}{2}+k\pi)-} I(x) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

a ten už jsme měli správně, je totiž ve všech bodech nespojitosti stejný. Abychom dostali výslednou primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$, musíme ji tedy definovat v jednotlivých intervalech jako

$$x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) \implies F(x) = I(x) - k.skok = x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) - k\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(na intervalu s „číslem“ k posouváme funkci I(x) o k-násobek skoku) a ve spojovacích bodech definujeme funkci jako

$$F(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2}+k\pi)-} I(x) - k.skok = \frac{\pi}{2} + k\pi - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} - k\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

V této části je tedy opět doplněn původně chybějící člen $k\pi$.

Nakonec je k celé takto definované funkci možné připsat $+C$.

Můžete si porovnat takto zapsané řešení se zápisem v souboru Res7, kde je místo jedné společné konstanty C vyjádřená konstanta C_k na každém intervalu zvlášť a je mezi nimi rekurentní vztah.

Lukáš Krump, 11.12.2024