Sada příkladů 1/11

Taylorův polynom

1. Napište Taylorův polynom funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x-x^2}$ stupně 3 v bodě 0.
2. Napište Taylorův polynom funkce $f(x) = \sqrt{x}$ stupně 3 v bodě 1.
3. Spočtěte přibližně $\sqrt[5]{250}$.
4. Spočtěte přibližně $\arcsin 0,45$.
5. Energie volné částice je v teorii relativity dána vztahem $E = mc^2 = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Ukažte, že pro $v \ll c$ představuje veličina $T = E - m_0 c^2$ kinetickou energii newtonovské mechaniky.

   Použitím Taylorova rozvoje spočtěte limity

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$, $a \in \mathbb{R}^+$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x \sin x - x(x+1)}{x^3}$

Taylorův polynom

Definice: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$ .... Taylorův polynom st. n fce f v bodě x_0.

Věta (Peanova): Existuje právě jeden polynom Q_n stupně nejvýše n tak, že $f(x) - Q_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$

Tento polynom je právě Taylorův polynom, tj $Q_n = P_n$.

Píšeme $f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$, kde $R_{n+1}(x)$ je zbytek, který lze psát takto:

Lagrangeův tvar zbytku: $R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$ pro nějaký bod $\xi \in (x_0, x)$
[případně $\xi \in (x, x_0)$ dle znaménka $x - x_0$]

Cauchyův tvar zbytku: $R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)$ pro nějaký bod $\xi \in (x_0, x)$

Základní Taylorovy rozvoje (na okolí $x_0 = 0$)

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \qquad \cosh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \qquad \sinh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n), \text{ kde } \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \text{ pro } k \in \mathbb{N}$$
$$= 1 \text{ pro } k = 0$$

---

1) $f(x) = e^{2x-x^2} \to f(0) = 1$

$f'(x) = e^{2x-x^2} \cdot (2-2x) \to f'(0) = 2$

$f''(x) = e^{2x-x^2} \cdot \left((2-2x)^2 - 2\right)$
$= e^{2x-x^2} \cdot (4x^2 - 8x + 2) \to f''(0) = 2$

$f'''(x) = e^{2x-x^2} \cdot \left((2-2x)(4x^2-8x+2) + 8x - 8\right) \to f'''(0) = -4$

$$\underline{\underline{P_3(x) = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3}}$$

---

2) $f(x) = \sqrt{x} \to f(1) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} \to f'(1) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} \to f''(1) = -\frac{1}{4}$

$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2} \to f'''(1) = \frac{3}{8}$

$$\underline{\underline{P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3}}$$

3) $\sqrt[5]{250}$ .... Je 250 poblíž nějaké páté mocniny přirozeného čísla? (2)

Ano! $3^5 = 243$.

Proto $\sqrt[5]{250} = \sqrt[5]{243+7} = 3\cdot\sqrt[5]{1+\frac{7}{243}}$ a označme $f(x) = 3\cdot(1+x)^{1/5}$

Dle rozvojů základních funkcí:

$$f\left(\frac{7}{243}\right) = 3\cdot\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{243} + \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{243}\right)^2 + \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{9}{5}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{7}{243}\right)^3\right) + R_4\left(\frac{7}{243}\right)$$

$$\left|R_4\left(\frac{7}{243}\right)\right| \le \left|3\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{9}{5}\right)\left(-\frac{14}{5}\right)\cdot\frac{1}{4!}\left(\frac{7}{243}\right)^4\right|$$

protože z Lagrangeova tvaru zbytku existuje $\xi\in\left(0,\frac{7}{243}\right)$ tak, že

$$R_4\left(\frac{7}{243}\right) = 3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{9}{5}\right)\left(-\frac{14}{5}\right)\cdot\frac{1}{4!}\cdot\underbrace{(1+\xi)^{\alpha-4}}_{<1 \text{ pro } \xi>0}\cdot\left(\frac{7}{243}\right)^4$$

a

Celkem dostáváme: $\sqrt[5]{250} = 3{,}01708824 \pm 0{,}00000007$

Ve skutečnosti $\sqrt[3]{250} = 3{,}017088168$

---

4) arcsin 0,45 .... Je 0,45 poblíž nějaké hodnoty, která je sinem něčeho, co známe?

Ano! $\sin \pi/6 = 1/2$

Proto zvolíme $x_0 = 1/2$, $x = 0{,}45$, $x - x_0 = -0{,}05 = -\frac{1}{20}$

$f(x) = \arcsin x \quad \rightarrow f(1/2) = \pi/6$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \quad \rightarrow f'(1/2) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$f''(x) = -1/2\cdot(1-x^2)^{-3/2}\cdot(-2x) = x\cdot(1-x^2)^{-3/2} \quad \rightarrow f''(1/2) = \frac{4}{3\sqrt{3}}$

$\arcsin 0{,}45 = \pi/6 + \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{1}{20}\right) + \frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{20}\right)^2 + R_3\left(-\frac{1}{20}\right)$, kde $R_3\left(-\frac{1}{20}\right) = \frac{1}{6}f'''(\xi)\cdot\left(-\frac{1}{20}\right)^3$ pro $\xi\in(0{,}45\,;\,0{,}5)$

$= 0{,}4668326 + R_3\left(-\frac{1}{20}\right)$

Ve skutečnosti $\arcsin 0{,}45 = 0{,}466765$

---

5) $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ m_0, c konstanty, $v \ll c$, tj. $v/c \ll 1$

$f(x) = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + o(x)$

$E = m_0c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_0c^2 - \frac{1}{2}m_0c^2\cdot\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) + o\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 + o\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4) - \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{2}+o(x^4)\right)}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{12}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right) = \underline{\underline{-1/12}}$ (3)

---

7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x\ln a}+e^{-x\ln a}-2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1+x\ln a+\frac{x^2(\ln a)^2}{2}+o(x^2)+1-x\ln a+\frac{x^2(\ln a)^2}{2}+o(x^2)-2}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} (\ln a)^2 + \frac{o(x^2)}{x^2} = (\ln a)^2$

---

8) DÚ

Průběh funkcí:
1) Definiční obor, obor spojitosti
2) Limity v krajních bodech D_f, v bodech nespojitosti atd.
3) Speciální vlastnosti (sudá/lichá, symetrie, periodicita atd.)
4) Významné body: např. $f(0)$ nebo body, kde je $f(x)=0$
5) $f'(x)$: Intervaly monotonie, extrémy, jednostranné derivace tam, kde neexistuje $f'(x)$. Odtud lze pak usoudit obor hodnot, omezenost
6) $f''(x)$: konvexita, konkávnost, inflexní body
7) asymptoty (pokud existují)
8) Graf funkce co nejpřesněji

---

1) $f(x) = 3x - x^3$: $D_f = \mathbb{R}$, spojitá na $\mathbb{R}$, spojité derivace všech řádů

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow f$ není omezená, $H_f = \mathbb{R}$

$f(-x) = -3x + x^3 = -f(x)$ ... f je lichá

$f(0) = 0$

$3x - x^3 = 0 \Rightarrow 3 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$ jsou body, kde graf protíná osu x

$f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1-x^2) = 3(1-x)(1+x) \Rightarrow x = \pm 1$ jsou stacionární body

$x \in (-\infty,-1)$: $f' < 0$ ... klesající $\Rightarrow x = -1$ je lokální minimum

$x \in (-1,1)$: $f' > 0$ ... rostoucí

$x \in (1,\infty)$: $f' < 0$ ... klesající $\Rightarrow x = 1$ je lokální maximum

$f(1) = 2$

$f(-1) = -2$

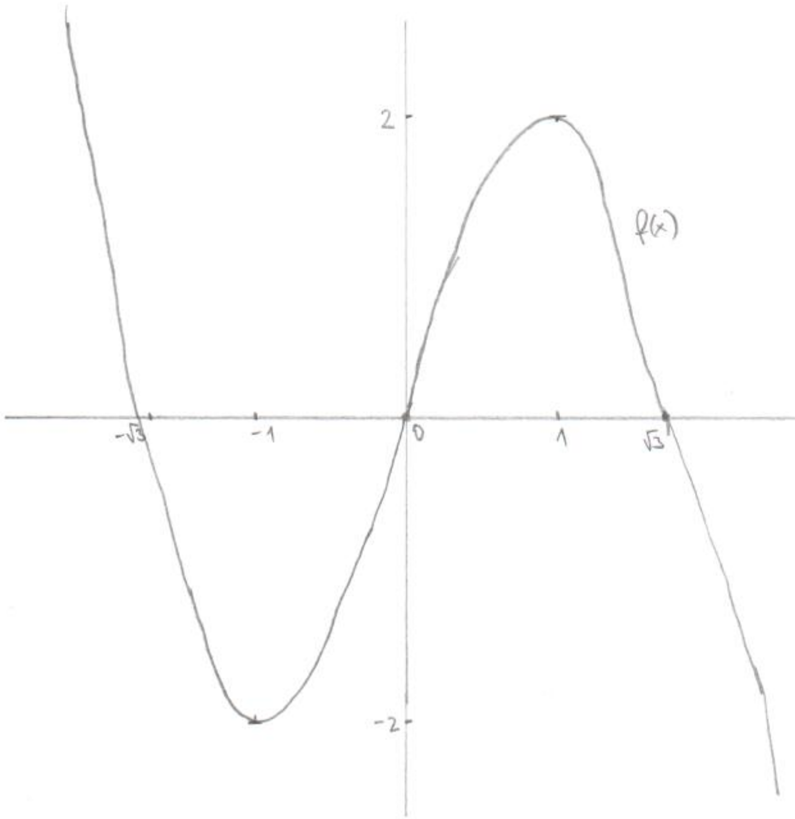
$f''(x) = -6x \Rightarrow x = 0$ je podezřelý jako inflexní

$x \in (-\infty,0)$: $f'' > 0$ ... konvexní $\Rightarrow x = 0$ je inflexní bod

$x \in (0,\infty)$: $f'' < 0$ ... konkávní

asymptoty neexistují, $f \sim -x^3$ pro $x \to +\infty$

$f \sim -x^3$ pro $x \to -\infty$



2) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x-3)}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2,3\}$. Mimo těchto bodů je f spojitá a má tam spojité derivace.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ ... to jsou zároveň asymptoty v nekonečnech

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to2-} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to3-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to2+} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to3+} f(x) = +\infty$

$f(-1) = f(1) = 0$, $f(0) = -1/6$. f očividně není ani lichá ani sudá, není omezená

$$f'(x) = \frac{2x(x-2)(x-3) - (x-1)(x+1)(2x-5)}{(x-2)^2(x-3)^2} = \frac{2x^3-10x^2+12x-(2x^3-5x^2-2x+5)}{(x-2)^2(x-3)^2} = \frac{-5x^2+14x-5}{(x-2)^2(x-3)^2}$$

$f'=0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{24}}{5}$

$x_1 \sim -0{,}42$

$x_2 \sim 2{,}38$

$x \in (-\infty, x_1): f' < 0 \Rightarrow f$ klesající $\Rightarrow x_1$ je lok. minimum

$x \in (x_1, 2): f' > 0 \Rightarrow f$ rostoucí

$x \in (2, x_2): f' > 0 \Rightarrow f$ rostoucí $\Rightarrow x_2$ je lok. maximum

$x \in (x_2, 3): f' < 0 \Rightarrow f$ klesající

$x \in (3, +\infty): f' < 0 \Rightarrow f$ klesající

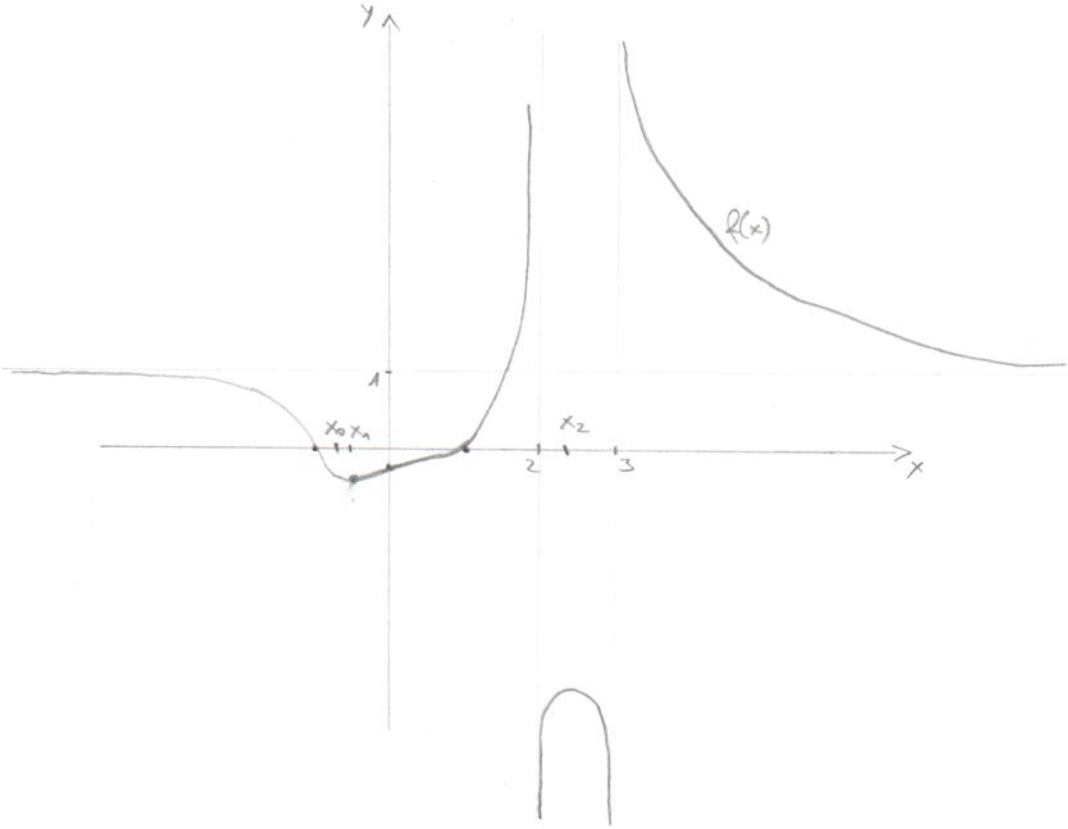
$$f''(x) = \frac{-10x+14}{(x-2)^2(x-3)^2} + (-5x^2+14x-5)\cdot(-2)\cdot\frac{1}{(x-2)^3(x-3)^3}\cdot(2x-5) = \frac{(-10x+14)(x-2)(x-3)+(10x^2-28x+10)(2x-5)}{(x-2)^3(x-3)^3}$$

$$= \frac{10x^3-42x^2+30x+34}{(x-2)^3(x-3)^3}$$ .... $f''=0$: jeden reálný kořen $x_0 = \frac{7}{5} - \frac{4\sqrt[3]{3}}{5} - \frac{2\sqrt[3]{9}}{5} \sim -0{,}58$

$\left.\begin{array}{l} x \in (-\infty, x_0): f'' < 0 \Rightarrow f \text{ konkávní} \\ x \in (x_0, 2): f'' > 0 \Rightarrow f \text{ konvexní} \end{array}\right\} x_0$ je inflexní bod

$x \in (2,3): f'' < 0 \Rightarrow f$ konkávní

$x \in (3, +\infty): f'' > 0 \Rightarrow f$ konvexní


y
1
x_0 x_1
x_2
2
3
x
f(x)