# Hlubší vlastnosti funkcí

## Lokální a globální extrémy funkcí

Nalezněte lokální extrémy funkcí

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4,\ x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x,\ x \in \mathbb{R}$
3. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}},\ x \in \mathbb{R}$

   Dokažte následující nerovnosti
4. $xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q},\ x, y > 0,\ 1 < p, q < \infty,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (Youngova nerovnost)
5. $\mathrm{e}^x > x + 1,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
6. Dokažte, že funkce
$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$
   má v bodě 0 ostré lokální minimum a funkce
$$g(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$
   nemá v bodě 0 lokální extrém, přestože platí $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$.
7. Nalezněte globální extrémy funkce $f(x) = x^2 - 4x + 6$ na intervalu $[-3, 10]$.
8. Nalezněte supremum a infimum funkce $f(x) = x\mathrm{e}^{-0.01x}$ na intervalu $(0, \infty)$.
9. Nádoba naplněná vodou se svislou stěnou výšky $h$ stojí na vodorovné rovině. Vypočítejte výšku otvoru nádoby nad vodorovnou rovinou tak, aby voda stříkala co nejdále.

10. Mezi dvěma svislými tyčemi, jejichž vzdálenost je $d$, je upevněna za konce nit' délky $l$. Rozdíl výšek upevnění je $h$. Po niti může volně klouzat hmotný bod. Najděte rovnovážnou polohu bodu za podmínky, že potenciální energie má být minimální.

## Monotónie funkcí

11. Nalezněte intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x^n e^{-x}$, $n \in \mathbb{N}$, rostoucí a klesající.

12. Pro atomové teplo prvku platí

$$C_v = 3R\frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2},$$

kde $x = \frac{T^*}{T}$, $T$ je absolutní teplota v kelvinech, $T^*$ je tzv. charakteristická teplota a $R$ je plynová konstanta. Dokažte, že atomové teplo prvku je rostoucí funkce teploty.

## Konvexita, konkávnost

Nalezněte intervaly, kde je funkce konvexní/konkávní, a najděte inflexní body

13. $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

14. $f(x) = x \sin \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$

15. Dokažte nerovnost $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$, $x, y > 0$, $x \neq y$, $n > 1$ a vysvětlete její geometrický význam.

Lokální a globální extrémy: viz předchozí cvičení



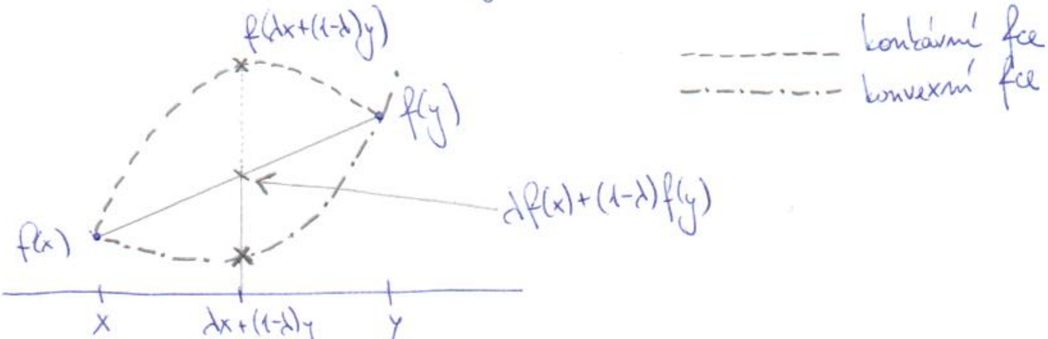
Def: $f$ je spojitá na $(a,b)$. Pak $f$ je konvexní na $(a,b)$, pokud pro libovolné $\lambda \in (0,1)$

platí $\forall x,y \in (a,b),\ x<y:\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

$f$ je konkávní, pokud platí opačná nerovnost

Náhled: U konvexní fce leží každá tečna pod grafem funkce.
U konkávní fce leží každá tečna nad grafem funkce.

Nerovnost z definice:




Inflexní bod: bod, ve kterém se mění konvexita v konkávnost nebo naopak

Konvexita a konkávnost v bodě: $f$ je konvex. v bodě $x_0$, pokud $\exists \delta > 0$ tak, že

$\forall x \in P_\delta(x_0)$: bod $[x, f(x)]$ leží nad tečnou ke grafu $f$ v bodě $x_0$

Podobně konkávita v $x_0$

---

6) $f(x) = e^{-1/x^2}$ pro $x \neq 0$
$\quad = 0$ pro $x = 0$.

a) $f$ je očividně spojitá, $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{-1/x^2} = 0$

b) $f'(x)$ pro $x \neq 0$: $f' = e^{-1/x^2} \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}$

a vidíme, že pro $x<0$ je $f'<0$ a $f$ je klesající
a pro $x>0$ je $f'>0$ a $f$ je rostoucí.

Proto je bod $x=0$ bodem lokálního i globálního minima.

$g(x) = x e^{-1/x^2}$ pro $x \neq 0$
$\quad = 0$ pro $x = 0$

a) podobně $g$ je očividně spojitá

b) $g'(x)$ pro $x \neq 0$: $g' = e^{-1/x^2} + x e^{-1/x^2} \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{e^{-1/x^2}(x^2+2)}{x^2}$

a $g' > 0$ pro všechna $x \neq 0$, $\lim_{x\to 0} g' = 0$

Vyšší derivace budou všechny tvaru $\frac{e^{-1/x^2}}{x^n} \cdot P(x)$, kde $P$ je polynom a $\lim_{x \to 0} e^{-1/x^2} \frac{P(x)}{x^n} = 0$

díky škálovací limitě (exp vždy vyhraje nad $x^n$)

Protože $g' > 0$ pro $x \neq 0$, v bodě $x=0$ není extrém.

8) $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x}{100}}$

Nejprve limity v krajních bodech: $\lim_{x \to 0} x \cdot e^{-\frac{x}{100}} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} x \cdot e^{-\frac{x}{100}} = 0$ (škálovací limita, exp vyhraje, kdo nevěří: l'Hospital "$\frac{x}{e^{\frac{x}{100}}}$")

Očividně je $f(x)$ na $(0,\infty)$ kladná fce, proto $\inf_{x \in (0,\infty)} f(x) = 0$ [minimum neexistuje]

$f'(x) = e^{-\frac{x}{100}} + x \cdot e^{-\frac{x}{100}} \cdot \left(-\frac{1}{100}\right) = e^{-\frac{x}{100}} \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)$

$f' = 0$: $e^{-\frac{x}{100}} \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 0$ $\quad e^{-\frac{x}{100}} > 0$ vždy $\Rightarrow \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 0$

$x = 100$

$\left.\begin{array}{l} f' > 0 \text{ pro } x < 100 \\ f' < 0 \text{ pro } x > 100 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 100$ je lok. max.

$f(100) = 100 \cdot e^{-1} = \frac{100}{e}$. Vzhledem k výše zjištěnému je to i globální maximum a supremum

$\sup_{x \in (0,+\infty)} f(x) = \frac{100}{e}$

---

9) Délka dostřiku vody: $d = v \cdot t$, kde $v$ je rychlost v okamžiku opuštění nádoby, $t$ je čas

Čas: $y = \frac{1}{2} g t^2$, kde $y$ je výška, kterou hledáme. Tedy $t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$

Rychlost: Bernoulliho rovnice: $\frac{1}{2}\rho v_i^2 + \rho g h_i + p_i = \frac{1}{2}\rho v_e^2 + \rho g h_e + p_e$

i ... uvnitř nádoby

e ... vně nádoby

Víme: $v_i = 0$, $h_i = h_e = y$, $v_e = v$, $p_e = p_a$ ... atmosférický tlak

$p_i = p_a + (h-y)\rho g$

$\Rightarrow p_a + (h-y)\rho g = \frac{1}{2}\rho v^2 + p_a \Rightarrow \frac{1}{2}\rho v^2 = (h-y)\rho g$

$v = \sqrt{2(h-y)g}$

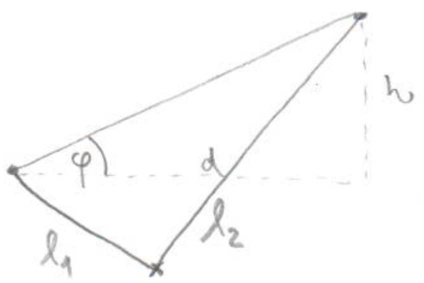
$d(y) = v(y) \cdot t(y) = \sqrt{2(h-y)g} \cdot \sqrt{\frac{2y}{g}} = 2\sqrt{y(h-y)}$. Hledáme lokální max. na intervalu $y \in (0,h)$

$d'(y) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y(h-y)}} \cdot (h - y - y) = \frac{h - 2y}{\sqrt{y(h-y)}}$ $\quad d' = 0$: $h = 2y \Rightarrow \underline{y = h/2}$

$\left.\begin{array}{l} d' > 0 \text{ pro } y < h/2 \\ d' < 0 \text{ pro } y > h/2 \end{array}\right. \Rightarrow y = h/2$ je lok. max i glob. max na $[0,h]$

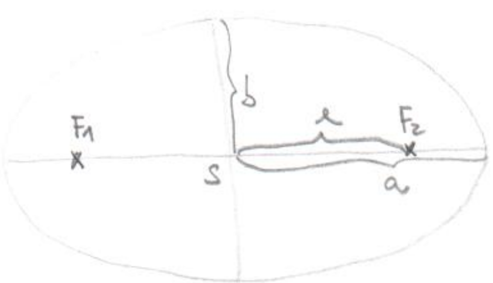
10)






$l_1 + l_2 = l$ ... konstanta

Množina bodů, které mají součet vzdáleností od dvou daných bodů konstantní, je elipsa !




a ... hlavní poloosa
b ... vedlejší poloosa
Platí $2a = l$
Vzdálenost $|F_1S| = |F_2S| = \sqrt{a^2-b^2} = e$ .... excentricita
(Někdy se excentricitou nazývá poměr $e/a \in (0,1)$)

My máme $2e = 2\sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{d^2+h^2}$

$$4a^2 - 4b^2 = d^2 + h^2$$
$$l^2 - 4b^2 = d^2 + h^2 \Rightarrow \cancel{b = \frac{1}{2}\sqrt{d^2+h^2-l^2}} \qquad b = \frac{1}{2}\sqrt{l^2-d^2-h^2}$$

Rovnice elipsy s rovnými osami: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, kde $(x_0, y_0)$ je střed

Parametricky: $x = x_0 + a\cos t$
$y = y_0 + b\sin t$ $\quad t \in [0, 2\pi)$

Náš případ: zvolíme střed $(x_0, y_0) = (0,0)$, ale elipsa je natočená o úhel $\varphi$, $tg\varphi = \frac{h}{d}$, $\varphi = arctg\frac{h}{d}$

Otočení o úhel $\varphi$: $X = x\cos\varphi \mp y\sin\varphi$ $\Rightarrow$ $X = a\cos t\cos\varphi \mp b\sin t\sin\varphi$
$Y = y\cos\varphi + x\sin\varphi$ $\quad$ $Y = b\sin t\cos\varphi + a\cos t\sin\varphi$

Hledáme minimum funkce $Y(t)$: $Y'(t) = b\cos t\cos\varphi - a\sin t\sin\varphi$

$Y'(t) = 0$ : $b\cos t\cos\varphi = a\sin t\sin\varphi$

$$tg\,t = \frac{b}{a}\cotg\varphi = \frac{b}{a}\cdot\frac{1}{tg\varphi} = \frac{b}{a}\frac{d}{h} = \frac{d}{h}\cdot\frac{\sqrt{l^2-d^2-h^2}}{l}$$

$$\Rightarrow t = arctg\left(\frac{d}{h}\cdot\frac{\sqrt{l^2-d^2-h^2}}{l}\right) + \pi$$

(protože víme, že minimum je ve 3. kvadrantu, tedy s úhlem ~~mezi~~ v $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$)

11) $f(x) = x^n e^{-x}$

$$f'(x) = n x^{n-1} e^{-x} + x^n e^{-x} \cdot (-1) = x^{n-1} e^{-x} (n - x)$$

Stacionární body: $e^{-x} > 0 \ \forall x \Rightarrow x = 0,\ x = n$

Znaménko $f'(x)$: $x < 0$: $n - x > 0,\ e^{-x} > 0,\ x^{n-1} < 0$ pro $n$ sudé $\Rightarrow f' < 0$

$x^{n-1} > 0$ pro $n$ liché $\Rightarrow f' > 0$

$x \in (0, n)$: $n - x > 0,\ e^{-x} > 0,\ x^{n-1} > 0 \Rightarrow f' > 0$ ~~pro~~

$x \in (n, +\infty)$: $n - x < 0,\ e^{-x} > 0,\ x^{n-1} > 0 \Rightarrow f' < 0$

Celkem: $n$ sudé: $f$ je klesající na $(-\infty, 0)$,
rostoucí na $(0, n)$
klesající na $(n, \infty)$

$n$ liché: $f$ je rostoucí na $(-\infty, n)$
klesající na $(n, +\infty)$

---

12) $$C_V(T) = \frac{3RT^{*2}}{T^2} \cdot \frac{e^{T^*/T}}{(e^{T^*/T} - 1)^2}$$

$$C_V'(T) = (-2)\, 3RT^{*2} \cdot T^{-3} \cdot \frac{e^{T^*/T}}{(e^{T^*/T} - 1)^2} + \frac{3RT^{*2}}{T^2} \cdot \left[ \frac{e^{T^*/T}\left(-\frac{T^*}{T^2}\right)(e^{T^*/T} - 1)^2 - e^{T^*/T} \cdot 2 (e^{T^*/T} - 1) \cdot \left(-\frac{T^*}{T^2}\right) e^{T^*/T}}{(e^{T^*/T} - 1)^4} \right]$$

Hledáme, kde (pro jaká $T > 0$) je $C_V'(T) > 0$

$$C_V'(T) = \underbrace{\frac{3RT^{*2}}{T^2} \cdot \frac{e^{T^*/T}}{(e^{T^*/T} - 1)^2}}_{> 0} \cdot \left[ -\frac{2}{T} + \frac{\left(-\frac{T^*}{T^2}\right) \cdot (e^{T^*/T} - 1)^2 + \frac{2T^*}{T^2} (e^{T^*/T} - 1) \cdot e^{T^*/T}}{(e^{T^*/T} - 1)^2} \right]$$

Tj. chceme: $$-\frac{2}{T} - \frac{T^*}{T^2} + \frac{2T^*}{T^2} \cdot \frac{e^{T^*/T}}{e^{T^*/T} - 1} > 0$$

$\Big\downarrow T > 0$

$$-2 - \frac{T^*}{T} + 2 \frac{T^*}{T} \cdot \frac{e^{T^*/T}}{e^{T^*/T} - 1} > 0$$

$\Big\downarrow T > 0$

$$-2T - T^* + 2T^* \frac{e^{T^*/T}}{e^{T^*/T} - 1} > 0$$

$\Big\downarrow e^{T^*/T} - 1 > 0$

$$2T^* e^{T^*/T} > (2T + T^*)(e^{T^*/T} - 1) = 2T e^{T^*/T} + T^* e^{T^*/T} - 2T - T^*$$

$$T^* e^{T^*/T} - 2T e^{T^*/T} + 2T + T^* > 0$$

$$\frac{T^*}{T} e^{T^*/T} - 2 e^{T^*/T} + 2 + \frac{T^*}{T} > 0 \ ?$$

Označme $y = \frac{T^*}{T}$. $T \in (0, \infty) \Rightarrow \frac{T^*}{T} \in (0, \infty)$. Chceme ukázat, že $f(y) = ye^y - 2e^y + 2 + y > 0$ pro $y > 0$.

Lehce $f(0) = 0$. Spočítáme $f'(y) = ye^y + e^y - 2e^y + 1 = ye^y - e^y + 1$. Opět $f'(0) = 0$.

Spočítáme $f''(y) = ye^y + e^y - e^y = ye^y$. Zde lehce $f''(y) > 0$ pro $y > 0$.

Proto $f'(y)$ je rostoucí na $(0, +\infty)$. Protože $f'(0) = 0$, musí být $f'(y) > 0$ pro $y > 0$

Proto $f(y)$ je rostoucí na $(0, +\infty)$. Protože $f(0) = 0$, musí být $f(y) > 0$ pro $y > 0$.

Proto tedy $C_V'(T) > 0$ a tedy $C_V$ je rostoucí fce proměnné $T$ pro $T \in (0, +\infty)$.

---

13) $f(x) = e^{-x^2}$

$$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-x^2}$$

$$f''(x) = -2 \cdot \left(e^{-x^2} + xe^{-x^2} \cdot (-2x)\right) = -2e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2)$$

$f''(x) = 0$ : $1 - 2x^2 = 0$ (protože $e^{-x^2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$)

$$x^2 = 1/2 \qquad x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pro $|x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ je $f''(x) < 0$ a $f(x)$ je konkávní

Pro $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ a $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ je $f(x)$ konvexní, body $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ jsou inflexní

---

14) DÚ

15) Jde o speciální případ z definice konvexnosti fce $f(x) = x^n$ (pro $\lambda = 1/2$) na intervalu $(0, +\infty)$

$f'(x) = nx^{n-1}$ $\quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$. Protože dle předpokladu je $n > 1$, $n(n-1) > 0$, $x^{n-2} > 0$,

máme $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ je konvexní

---

4) Začneme tím, že $f(x) = \ln x$ je konkávní. $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \ \forall x > 0$

Z definice konkávnosti ($\lambda = 1/p$, $1 - \lambda = 1/q$)

$$\ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln x^p + \frac{1}{q}\ln y^q = \ln x + \ln y = \ln(xy).$$

Je-li $A \geq B$, pak $e^A \geq e^B$ (protože $e^x$ je rostoucí fce)

$$\Rightarrow e^{\ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right)} \geq e^{\ln(xy)}$$

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy.$$

Důkaz je hotov.