Limita posloupnosti

Vypočítejte

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6-6n^5+2}+\sqrt[5]{n^7+n^3+1}}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$, $a \in \mathbb{R}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, kde $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$, $n\ge 1$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $a_1>0$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{1}{a_n})$, $n\ge 1$

7. Zjistěte, pro která $x\in\mathbb{R}$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty}\sin nx$.

   Najděte $\limsup\limits_{n\to\infty}$ a $\liminf\limits_{n\to\infty}$

8. $a_n=\dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2}{3}n\pi$

9. $a_n=n(2+(-1)^n)$

10. $a_n=\cos^n\dfrac{2}{3}n\pi$

    Najděte hromadné body následujících posloupností

11. $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{8},\dfrac{7}{8},\ldots,\dfrac{1}{2^n},\dfrac{2^n-1}{2^n},\ldots$

12. $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{4},\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5},\ldots$

Limity posloupností

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost. Definice podobně jako pro funkce: $A = \lim_{n\to\infty} a_n$:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0: \ |a_n - A| < \varepsilon$

Heineho věta: Nechť $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a $P_\delta(x_0)\cap D_f \neq \emptyset$ pro $\delta > 0$. Potom

$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A$ pro každou posloupnost $\{x_n\}\subset D_f\setminus\{x_0\}$, která splňuje $x_n \to x_0$.

Nejčastější použití v praxi: Úkol je spočítat $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$. My spočítáme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$ (např. l'Hospitalem) a potom díky Heinemu: $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A$.

Podposloupnost: $\{a_n\}$ je posloupnost a $\{n_k\}$ rostoucí posloupnost přirozených čísel.

Potom $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ je podposloupnost. $\{a_{n_k}\}\subset\{a_n\}$

Weierstrassova věta: Z každé omezené posloupnosti reálných čísel lze vybrat konvergentní podposloupnost

Je-li $\{a_n\}$ neomezená shora (zdola), lze vybrat podposloupnost divergující do $+\infty$ $(-\infty)$.

Hromadný bod: $A\in\mathbb{R}^*$ je hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$, má-li $\{a_n\}$ podposloupnost $\{a_{n_k}\}$ takž, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

$\limsup_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \lim_{n\to\infty} \sup_k \{a_k,\ k\geq n\}$ existuje vždy, protože $\sup\{a_k, k\geq n\}$ je nerostoucí posloupnost

$\liminf_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \lim_{n\to\infty} \inf_k \{a_k,\ k\geq n\}$ totéž (neklesající)

- $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ jsou hromadné body a každý další hromadný bod A splňuje $\liminf a_n \leq A \leq \limsup a_n$.
- $\lim a_n$ existuje $\iff \liminf a_n = \limsup a_n$

---

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6-6n^5+2}+\sqrt[5]{n^7+n^3+1}} = \text{(podobně jako pro funkce [viz Heineho věta])}$$

$$=\lim_{n\to\infty}^{*} \frac{n^{3/2}\cdot\left(\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}+n^{4/3-3/2}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^4}}\right)}{n^{3/2}\cdot\left(\sqrt[4]{1-\frac{6}{n}+\frac{2}{n^6}}+n^{7/5-3/2}\cdot\sqrt[5]{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^7}}\right)} \cancel{=\lim_{n\to\infty}} = \underline{\underline{1}}$$ protože $4/3-3/2=-1/6<0$ a $7/5-3/2=-1/10<0$

---

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$ Rozšířená škála: $n^n \gg n! \gg a^n \gg n^\alpha$.

Ukážeme to pro $a>0$ (jinak by to šlo podobně přes $\lim\left|\frac{a^n}{n!}\right|$).

$\frac{a^n}{n!}=\frac{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}=a\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdots\frac{a}{n}$. Nechť $M\in\mathbb{N}$ tak, že $\frac{a}{M}<1$. Tedy např. $M=\left[\frac{1}{a}\right]+1$

Pak pro $n>M$: $\frac{a^n}{n!}=a\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{M-1}\cdot\frac{a}{M}\cdot\frac{a}{M+1}\cdots\frac{a}{n}\le a\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{M-1}\cdot\frac{a}{M}\cdot\frac{a}{M}\cdots\frac{a}{M}$

$=\left(\frac{a}{M}\right)^{n-M}\cdot\frac{a^M}{M!}=\left(\frac{a}{M}\right)^n\cdot\frac{M^M}{M!}$

Proto $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{M}\right)^n\cdot\frac{M^M}{M!}=\frac{M^M}{M!}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{M}\right)^n=\frac{M^M}{M!}\cdot 0=\underline{0}$ (protože $\frac{a}{M}<1$)

a protože $\frac{a^n}{n!}\ge 0$, platí: $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}\ge 0$ a tedy $\underline{\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0}$

---

3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ = dle Heineho $=\lim_{x\to+\infty}x^{1/x}=\lim\exp\frac{\ln x}{x}=\exp\lim\frac{\ln x}{x}=$ l'Hospital $=\exp\lim\frac{\frac{1}{x}}{1}=$

$=\exp 0=\underline{\underline{1}}$

---

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$

$=\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{n+1}=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\underline{\underline{1}}$

---

5) $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$ Nejprve: $\{a_n\}$ je omezená: - zdola nulou triviálně
- shora: $a_n<2$. Důkaz MI

i) $a_1=\sqrt{2}<2$ triv.

ii) Nechť $a_k<2$. Pak $a_{k+1}=\sqrt{a_k+2}<\sqrt{2+2}=2$ dle indukčního předpokladu

Dále: $\{a_n\}$ je rostoucí: $a_{n+1}>a_n$: Musíme ukázat $\sqrt{a_n+2}>a_n \iff a_n+2>a_n^2$

$\iff a_n^2-a_n-2<0$

$\iff (a_n+1)(a_n-2)<0$

$\iff a_n\in(-1,2)$.

To už víme.

$\{a_n\}$ je rostoucí a omezená $\Rightarrow$ má limitu. $\lim a_n=A=\lim a_{n+1}$

$$\left.\begin{array}{c} a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}\\ \downarrow \qquad\quad \downarrow\\ A \qquad \sqrt{A+2}\end{array}\right\}\Rightarrow A=\sqrt{A+2}\Rightarrow A=-1 \text{ nebo } A=2.$$ -1 je nesmysl, proto $\underline{\underline{A=2}}$

6) $a_1>0$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$

a_n je omezená zdola, pro $n\geq 2$ platí $a_n>1$: $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\overset{A-G}{>}\sqrt{a_n\cdot\frac{1}{a_n}}=1$

a_n je nerostoucí pro $n\geq 2$: $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)<\frac{1}{2}(a_n+a_n)=a_n$

protože $\frac{1}{a_n}<1<a_n$

Nerostoucí + omezená zdola $\Rightarrow$ má limitu. $\lim a_n = A = \lim a_{n+1}$

$$\left.\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & & \frac{1}{2}\left(A+\frac{1}{A}\right)\end{array}\right\} \quad A=\frac{A}{2}+\frac{1}{2A} \iff A=\frac{1}{A} \iff A=\pm 1$$

-1 je nesmysl $\Rightarrow \underline{\underline{A=1}}$

---

7) Pro která $x\in\mathbb{R}$ existuje $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(nx)$?

Očividně $x=0$ a snadno také $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ vytvoří také posloupnost nul, tedy má limitu.

Ukážeme sporem, že nic dalšího už není. Nechť $x\neq k\pi$ a nechť ex. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(nx)=L$.

Zvol $m\in\mathbb{N}$ libovolně: $\sin((n+m)x)=\sin(nx)\cos(mx)+\cos(nx)\sin(mx)$

$$\Rightarrow \left(\sin((n+m)x)-\sin(nx)\cos(mx)\right)^2=\cos^2(nx)\sin^2(mx)=\left(1-\sin^2(nx)\right)\left(1-\cos^2(mx)\right)$$

$n\to\infty$:
$$\left(L-L\cdot\cos(mx)\right)^2=\left(1-L^2\right)\left(1-\cos^2(mx)\right)=1-L^2-\cos^2(mx)+L^2\cos^2(mx)$$
$$L^2\left(1-\cos(mx)\right)^2=\left(1-L^2\right)\left(1-\cos(mx)\right)\left(1+\cos(mx)\right)$$

Nechť $\cos(mx)\neq 1$:
$$L^2-L^2\cos(mx)=1-L^2+\cos(mx)-L^2\cos(mx)$$
$$\cos(mx)=2L^2-1$$

Toto lze udělat pro libovolné $m\in\mathbb{N}$ a dostáváme tak, že $\forall m\in\mathbb{N}$: $\cos(mx)=1$ nebo $\cos(mx)=2L^2-1$

Už nás nezajímají body $x=k\pi$, které toto splňují.

Máme $\cos(2x)=2\cos^2x-1$:

a) $\cos x=\cos 2x=1$: nic nového

b) $\cos x=1$, $\cos 2x=2L^2-1$: $2L^2-1=2\cdot 1-1=1\Rightarrow L^2=1$ a $\cos(mx)=1$

c) $\cos x=2L^2-1$, $\cos 2x=1$: vede opět na $L^2=1$ $\longrightarrow$ nic nového

d) $\cos x=\cos 2x=2L^2-1$: $(2L^2-1)=2\cdot(2L^2-1)^2-1$ vede na $L^2=1/4$, $\cos x=-1/2$

$\Rightarrow x=\frac{2}{3}\pi\cdot k$, kde $k\neq 3L$ pro $L\in\mathbb{N}$.

Pro $x=k\cdot\frac{2}{3}\pi$ a $3\nmid k$: $\cos(mx)$ nabývá hodnot $\{-\frac{1}{2},1\}$ a platí tak $\cos(mx)=1$ nebo $2L^2-1$.

Ovšem $\sin(mx)$ pro $x=k\cdot\frac{2}{3}\pi$, $3\nmid k$ nabývá hodnot $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right\}$ které se střídají a $\sin(nx)$ nemá limitu. Jediné x tak zůstává $\underline{\underline{x=k\pi}}$ $k\in\mathbb{Z}$

8) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)\cos\frac{2}{3}n\pi$ Víme: $\cos\frac{2}{3}n\pi \in \{-1/2, 1\}$

$$\frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \longrightarrow 1 \text{ pro } n \to +\infty$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = 1, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = -1/2$$

---

9) $a_n = n(2+(-1)^n)$: $n = 2k$: $a_{2k} = 6k \longrightarrow +\infty$

$n = 2k+1$: $a_{2k+1} = 2k+1 \longrightarrow +\infty$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

---

10) $a_n = \cos^n\left(\frac{2}{3}n\pi\right)$ $a_{3k} = 1$ pro lib. $k \in \mathbb{N}$

pro $n = 3k+1$ nebo $3k+2$: $a_n = (-1/2)^n = \pm \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0$

bez ohledu na znaménko

$\Rightarrow \limsup a_n = 1$ $\liminf a_n = 0$

---

11) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots$

Jde o 2 posloupnosti smíchané do sebe: jedna je $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ s limitou 0

druhá je $\left\{1 - \frac{1}{2^n}\right\}$ s limitou 1.

$H = \{0, 1\}$ ... H je množina hromadných bodů.

---

12) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$

Jde o posloupnost obsahující všechna racionální čísla z intervalu $(0,1)$.

Očividně jsou 0 a 1 hromadné body (posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ a $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$).

Každé racionální číslo ve tvaru p/q $(p<q)$ je hromadný bod: posloupnost $\left\{\frac{np}{nq}\right\}$

Ke každému iracionálnímu číslu z intervalu $(0,1)$ najdeme posloupnost racionálních čísel $\{r_n\}$ tvořenou "useknutým desetinným rozvojem" na n-tém místě

Hlubší vlastnosti funkcí

Lokální a globální extrémy funkcí

Nalezněte lokální extrémy funkcí

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$, $x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$, $x \in \mathbb{R}$
3. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$

   Dokažte následující nerovnosti
4. $xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$, $x, y > 0$, $1 < p, q < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (Youngova nerovnost)
5. $\mathrm{e}^x > x + 1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
6. Dokažte, že funkce
$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$
   má v bodě 0 ostré lokální minimum a funkce
$$g(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$
   nemá v bodě 0 lokální extrém, přestože platí $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$.
7. Nalezněte globální extrémy funkce $f(x) = x^2 - 4x + 6$ na intervalu $[-3, 10]$.
8. Nalezněte supremum a infimum funkce $f(x) = x\mathrm{e}^{-0.01x}$ na intervalu $(0, \infty)$.
9. Nádoba naplněná vodou se svislou stěnou výšky h stojí na vodorovné rovině. Vypočítejte výšku otvoru nádoby nad vodorovnou rovinou tak, aby voda stříkala co nejdále.

10. Mezi dvěma svislými tyčemi, jejichž vzdálenost je d, je upevněna za konce nit délky l. Rozdíl výšek upevnění je h. Po niti může volně klouzat hmotný bod. Najděte rovnovážnou polohu bodu za podmínky, že potenciální energie má být minimální.

Monotónie funkcí

11. Nalezněte intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x^n e^{-x}$, $n \in \mathbb{N}$, rostoucí a klesající.

12. Pro atomové teplo prvku platí

$$C_v = 3R \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} ,$$

kde $x = \frac{T^*}{T}$, T je absolutní teplota v kelvinech, T^* je tzv. charakteristická teplota a R je plynová konstanta. Dokažte, že atomové teplo prvku je rostoucí funkce teploty.

Konvexita, konkávnost

Nalezněte intervaly, kde je funkce konvexní/konkávní, a najděte inflexní body

13. $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

14. $f(x) = x \sin \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$

15. Dokažte nerovnost $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$, $x, y > 0$, $x \neq y$, $n > 1$ a vysvětlete její geometrický význam.

Extrémy funkcí

x_0 je stacionární bod fce $f \iff f'(x_0) = 0$

$f'(x) \begin{smallmatrix} >0 \\ <0 \end{smallmatrix}$ na $(a,b) \Rightarrow f$ je rostoucí / klesající na (a,b)

f má v x_0 lokální maximum (resp. minimum) $\iff \exists$ okolí U bodu x_0 t.ž. $\forall x \in U \cap D_f$:
$f(x) \leq f(x_0)$
(resp. $f(x) \geq f(x_0)$)

Platí-li rovnost jen pro $x = x_0$, jde o ostré max./min.

- Je-li f spojitá na okolí x_0, pak: pokud f je rostoucí na levém okolí x_0 a klesající na pravém okolí x_0 $\Rightarrow f$ má v x_0 ostré lok. max.

Pokud je pořadí opačné: ostré lok. min. v x_0.

<u>Věta</u>: f má v x_0 lokální extrém a existuje $f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Věta: Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ je ostré lok. min.
$< 0 \Rightarrow$ max.
$= 0 \Rightarrow$ nelze rozhodnout, může nastat cokoli včetně neex. extrému.

Globální extrémy: Na otevřeném intervalu nemusí existovat, ale platí

<u>Věta</u>: f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b] \Rightarrow f$ má v $[a,b]$ globální max. i min.

V příkladech: vyšetřit lokální extrémy v (a,b) + krajní body $x=a$, $x=b$.

---

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

$D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá na $\mathbb{R}$ se spojitými derivacemi všech řádů

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'' (x) = 6x - 12$

$f' = 0$: $x^2 - 4x + 3 = 0$ $\Rightarrow x = 1, x = 3$ jsou stacionární body
$(x-1)(x-3) = 0$

$f''(1) = -6 < 0 \Rightarrow x = 1$ je bod lokálního maxima

$f''(3) = 6 > 0 \Rightarrow x = 3$ je bod lokálního minima

---

2) $f(x) = e^x \sin x$

$D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá na $\mathbb{R}$ a má spojité derivace

$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$

$f' = 0 \iff \sin x + \cos x = 0$ ($e^x > 0$ vždy)

$\underline{x = \frac{3}{4}\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$

$f''(x) = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x)$
$= 2e^x \cos x$

$f''\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right) = K \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)}_{<0}$ pro $K > 0$

$f''\left(\frac{7}{4}\pi + 2k\pi\right) = L \cdot \cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) > 0$

Odtud: Body $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ jsou lokální maxima
Body $x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$ jsou lokální minima

---

3) DÚ

4) Později u konvexity/konkávnosti

5) Definujeme funkci $f(x) = e^x - x - 1$. $D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá se spojitými derivacemi na $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^x - 1$ $\qquad$ $f' = 0 : e^x = 1 \Rightarrow x = 0$ je stac. bod

$f''(x) = e^x$ $\qquad$ $f''(0) = e^0 = 1 > 0 \Rightarrow x = 0$ je lok. minimum.

Jiné extrémy nejsou, f je klesající na $(-\infty, 0)$, rostoucí na $(0, \infty)$, $f(0) = 0$

$\Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow e^x > x + 1 \quad \forall x \neq 0$.

---

6) Příště

7) DÚ