Limity funkcí podruhé

Limity funkcí v nevlastních bodech

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_n x^n + \dots a_1 x + a_0}{A_m x^m + \dots A_1 x + A_0}$, $a_n \neq 0$, $A_m \neq 0$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{3x^4-6x^2+5}}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{4}{3}}(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1})$

Limity funkcí l'Hospitalovým pravidlem

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(\mathrm{e}^x+1)-2(\mathrm{e}^x-1)}{x^3}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

9. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

Symboly O, o, $\sim$, $\cong$

Dokažte platnost následujících tvrzení

10. $\operatorname{arctg} x = O(1)$, $x \to \infty$

11. $x^2 \mathrm{e}^{-x} = o(x^a)$, $x \to \infty$, $a < 0$

12. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} = O(\sqrt[8]{x}),\ x \to 0^+$

13. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cong \sqrt{x},\ x \to \infty$

Najděte reálné a, tak aby platilo

14. $\dfrac{1+x}{1+x^4} \sim x^a,\ x \to \infty$

15. $\mathrm{e}^x - \cos x \sim x^a,\ x \to 0.$

Nevlastní limity a limity v nevlastních bodech

$\mathcal{U}_k(+\infty) = (k, +\infty)$

$\mathcal{U}_k(-\infty) = (-\infty, -k)$

Potom definice limity pomocí okolí funguje i pro $A = \pm\infty$ nebo $x_0 = \pm\infty$

Příklady: $A \in \mathbb{R}$, $x_0 = +\infty$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists k > 0\ \forall x > k : |f(x) - A| < \varepsilon$

$A = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}$: $\forall k > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > k$

$A = +\infty$, $x_0 = +\infty$: $\forall k > 0\ \exists \ell > 0\ \forall x > \ell : f(x) > k$

atd.

Užitečné vztahy: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ (zprava)

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ (zleva)

Substituce $x = \frac{1}{y}$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{y \to 0_+} f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{y \to 0_-} f\left(\frac{1}{y}\right)$

(pokud existuje alespoň jedna strana)

Aritmetika limit $(A+B, A \cdot B, \frac{A}{B})$ funguje, má-li smysl. Smysl nemá $+\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞^0, $\frac{\text{cokoli}}{0}$, 1^∞

Navíc: Je-li $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $g(x) \geq \alpha$ pro nějaké $\alpha \in \mathbb{R}$ na $P_\delta(x_0)$ $\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$

Podobně pro $-\infty$ $\leq \alpha$ $= -\infty$

Je-li $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, $g(x) \geq \beta$ pro nějaké $\beta > 0$ na $P_\delta(x_0)$ $\Rightarrow \lim (f(x) \cdot g(x)) = \pm\infty$

L'Hospitalovo pravidlo: Pro limitu typu "$\frac{0}{0}$" a "$\frac{\text{cokoli}}{\pm\infty}$" platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{pokud PS existuje}$$

Škálovací limity: Označme $g \ll f$, pokud $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. Pak pro $0 < \alpha < \beta$

$$e^{-x} \ll x^{-\beta} \ll \frac{1}{\ln x} \ll 1 \ll \ln x \ll x^\alpha \ll x^\beta \ll e^x$$

Podobně pro $x \to 0_+$ máme: $x^\beta \ll x^\alpha \ll \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} \ll 1 \ll \ln\left(\frac{1}{x}\right) \ll x^{-\alpha} \ll x^{-\beta}$

Symboly o, O, silná ekvivalence, slabá ekvivalence

Definice:
- $f = o(g)$ pro $x \to x_0$, jestliže $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- $f = O(g)$ pro $x \to x_0$, jestliže $\exists K, \delta > 0 : |f(x)| \leq K|g(x)|$ na $P_\delta(x_0)$
- $f \cong g$ pro $x \to x_0$, jestliže $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ (silná ekvivalence)
- $f \sim g$ pro $x \to x_0$, jestliže $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (slabá ekvivalence)

Platí: $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$

$f \cong g \Rightarrow f \sim g \Rightarrow f = O(g) \wedge g = O(f)$

---

1) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{A_m x^m + \dots + A_1 x + A_0} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n \cdot \left(a_n + \dots + a_1 \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{x^n}\right)}{x^m \cdot \left(A_m + \dots + A_1 \cdot \frac{1}{x^{m-1}} + A_0 \cdot \frac{1}{x^m}\right)} = \frac{a_n}{A_m} \cdot \lim_{x \to +\infty} x^{n-m}$$

pro $n < m$: $\frac{a_n}{A_m} \cdot 0 = 0$

pro $n = m$: $\frac{a_n}{A_m} \cdot 1 = \frac{a_n}{A_m}$

pro $n > m$: $\frac{a_n}{A_m} \cdot (+\infty) = \operatorname{sgn}\left(\frac{a_n}{A_m}\right) \cdot (+\infty)$

---

2) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+1}{\sqrt{3x^4 - 6x^2 + 5}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \cdot \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \cdot \left(\sqrt{3 - 6/x^2 + 5/x^4}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

---

3) $$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \left((x^2+1) - (x^2-1)\right)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x \cdot \left(\sqrt{1+1/x^2} + \sqrt{1-1/x^2}\right)} = \frac{2}{2} = 1$$

---

4) $$\lim_{x \to +\infty} x^{4/3} \cdot \left(\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2-1}\right) = \lim_{x \to +\infty} x^{4/3} \cdot \frac{(x^2+1) - (x^2-1)}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2} + \sqrt[3]{(x^2+1)(x^2-1)} + \sqrt[3]{(x^2-1)^2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^{4/3}}{x^{4/3} \cdot \left[\sqrt[3]{(1+1/x^2)^2} + \sqrt[3]{(1+1/x^2)(1-1/x^2)} + \sqrt[3]{(1-1/x^2)^2}\right]} = \frac{2}{3}$$

---

5) $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x (1 - \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2$$

③

6) $\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x+xe^x+1-2e^x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x+xe^x-e^x}{6x} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0} e^x = 1/6$

7) DÚ

8) $\lim_{x\to 0_+} x^x = \exp \lim_{x\to 0_+} x \ln x$ "škálovací limita": x je silnější než $\ln x \Rightarrow \lim_{x\to 0_+} x\ln x = 0$

$= \exp \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \exp \lim_{x\to 0_+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \exp \lim_{x\to 0_+} (-x) = \exp 0 = 1$

9) $\lim_{x\to \pi/4} (\mathrm{tg}\, x)^{\mathrm{tg}\, 2x} = \exp \lim_{x\to\pi/4} (\mathrm{tg}\, 2x)\cdot \ln \mathrm{tg}\, x = \exp \lim_{x\to\pi/4} \frac{\ln \mathrm{tg}\, x}{\frac{1}{\mathrm{tg}\, 2x}} =$

$= \exp \lim_{x\to\pi/4} \frac{\frac{1}{\mathrm{tg}\, x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{(\mathrm{tg}\, 2x)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2(2x)}\cdot 2} = \exp \lim_{x\to\pi/4}\left(-\frac{\sin^2 2x}{2\cdot \cos x\cdot \sin x}\right) = \exp - \frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = e^{-1}$

10) Z definice: Hledáme K, L tak, že $|\mathrm{arctg}\, x| \leq K\cdot|1|$ pro $x > L$

Víme, že $\mathrm{arctg}\, x \leq \pi/2$ $\forall x\in\mathbb{R}$, tedy $K := \pi/2$, L libovolné

11) Z definice: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x^a} \overset{?}{=} 0$ $\qquad \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x^{a-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{2-a}}{e^x}$

$a < 0$

Opět "škálovací limita": $\exp x$ je silnější než libovolná mocnina x.

Viz L'Hospital: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2-a}}{e^x} = (2-a)\lim_{x\to\infty}\frac{x^{1-a}}{e^x} = \ldots = (2-a)(1-a)\ldots \lim_{x\to\infty} \frac{x^{2-a-\lceil 2-a\rceil}}{e^x}$

a v čitateli je záporná (nebo nulová) mocnina x a proto tato lim $= 0$.

12) Použijeme implikaci $f\sim g \Rightarrow f = O(g)$ a dokážeme, že existuje nenulová vlastní limita $\lim_{x\to 0_+} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}} = \lim_{x\to 0_+} \sqrt{x^{1-1/4}+\sqrt{x^{1-1/2}+\sqrt{x^{1-1}}}} = \lim_{x\to 0_+}\sqrt{x^{3/4}+\sqrt{x^{1/2}+1}} = 1$

13) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}} = 1.$

4

14) Hledáme $a \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1+x}{1+x^4}}{x^a} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{x^a + x^{4+a}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+1/x}{x^{a-1}+x^{3+a}} = \begin{cases} a<-3: = \frac{1}{0+0} = +\infty \\ a=-3: \frac{1}{0+1} = 1 \\ a>-3: \frac{1}{\infty} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\underline{a=-3}$.

---

15) DÚ