Spojitost a derivace funkcí

Spojitost funkcí

1. Dodefinujte funkci v bodě 0 tak, aby byla spojitá:

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2. Zjistěte, kde jsou nespojité funkce
   a) $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ b) $f(x) = \operatorname{sgn} \cos \frac{1}{x}$.

3. Vyšetřete spojitost složených funkcí $f(g(x))$ a $g(f(x))$, je-li

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \qquad g(x) = x(1-x^2)\,.$$

4. Zjistěte, zda jsou spojité funkce

$$\begin{aligned} \text{a)} f(x) = \quad & \frac{\sin x}{|x|} && x \neq 0 \\ & 1 && x = 0 \\ \text{b)} f(x) = \quad & x \sin\frac{1}{x} && x \neq 0 \\ & 0 && x = 0 \end{aligned}$$

5. Dokažte, že jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ spojité v x_0, pak jsou spojité v x_0 i funkce a) $\min\{f(x), g(x)\}$ b) $\max\{f(x), g(x)\}$.

6. Uveďte příklad funkce nespojité v každém $x \in \mathbb{R}$, jejíž druhá mocnina je spojitá na $\mathbb{R}$.

Derivace funkcí

7. Existuje derivace funkce $f(x) = x|x|$ v bodě 0?

8. Pro jaké α reálné má funkce

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

derivaci v bodě 0. Kdy je tato derivace v bodě 0 spojitá?

9. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \text{ je racionální} \\ 0 & x \text{ je iracionální.} \end{cases}$$

má derivaci pouze v nule.

10. Ukažte, že derivace sudé funkce (pokud existuje) je funkce lichá.

11. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ ax + b & x > 1\,. \end{cases}$$

Určete a, b tak, aby $f(x)$ měla v bodě 1 derivaci.

12. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ v bodě $[-2, ?]$ grafu.

Elementární funkce

Dokažte, že

13. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

14. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1, 1]$

15. $\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$

16. $\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $|x| \geq 1$

17. $\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$

18. $\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$, $|x| > 1$

Derivace elementárních funkcí

19. Dokažte vztahy pro derivace cyklometrických, hyperbolických a hyperbolometrických funkcí.

Vypočtěte derivace následujících funkcí v libovolném bodě x, kde derivace existuje:

20. $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$

21. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$

22. $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$

23. $f(x) = \sin\sin\sin x$

24. $f(x) = 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$

25. $f(x) = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$

26. $f(x) = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$

27. $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$

28. $f(x) = x\mathrm{arcsin}^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\mathrm{arcsin} x - 2x$

29. $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})\,.$

Derivace vyšších řádů. Parciální derivace

30. Ověřte, že funkce $u(x) = \frac{1}{|x|}$, kde $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, splňuje v $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ Laplaceovu rovnici $\Delta u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$.

31. Ověřte, že funkce $v(x) = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, kde $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, splňuje v $(0,\infty) \times \{\mathbb{R}^3 \setminus 0\}$ rovnici vedení tepla $\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0$, kde $\Delta v = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$.

32. Spočtěte $f^{(10)}(x)$ je-li $f(x) = \sqrt{x}$.

33. Spočtěte $f^{(50)}(x)$ je-li $f(x) = x^2 \sin 2x$.

<u>Definice</u>: Funkce f je <u>spojitá</u> v bodě x_0, jestliže $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$,

nebOli pokud $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in\mathbb{R}: x\in U(x_0,\delta) \Rightarrow f(x)\in U(f(x_0),\varepsilon)$

neboli $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in\mathbb{R}: |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

Věta: f, g spojité v $x_0\in\mathbb{R} \Rightarrow f \pm g$ jsou spojité v $x_0\in\mathbb{R}$. f/g je spojitá, pokud $g(x_0)\neq 0$.

- Je-li f spojitá v $g(x_0)$ a g spojitá v x_0, pak $f(g(x))$ je spojitá v x_0.

---

1) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ pro $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Očividně f je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Spočítáme $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2\cdot(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} = \underline{\underline{1/2}}$

Funkce $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 1/2 & \text{pro } x=0 \end{cases}$ je spojitá na celém $\mathbb{R}$

---

2) a) $f(x) = e^{-1/x}$ ... Složená fce, $\exp x$ je spojitá všude, $-\frac{1}{x}$ je nespojitá v bodě $x=0$ (není tam ani definovaná)

$f(x)$ je spojitá všude kromě bodu $x=0$, kde není ani definovaná

b) $f(x) = \operatorname{sgn}\cos\frac{1}{x}$ ... Složená fce typu $g(h(k(x)))$, kde $k(x) = \frac{1}{x}$ (nespojitá v $x=0$)
$h(x) = \cos x$ (spojitá všude)
$g(x) = \operatorname{sgn} x$ (nespojitá v $x=0$)

$x=0$ je problém $\to$ tam $f(x)$ není definována

další problémové body: takové x, že $\cos\frac{1}{x}=0$, tj. $\frac{1}{x} = \pi/2 + k\pi$, tj. $x = \frac{1}{\pi/2+k\pi}$

Všude tam $\cos\frac{1}{x}$ mění znaménko, tedy $f(x)$ mění hodnotu z $+1$ na -1 nebo naopak

---

3) $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$
$g(x) = x(1-x^2)$

$f(g(x)) = \operatorname{sgn}(x(1-x^2))$. $\operatorname{sgn} x$ je nespojitá v $x=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ hledáme body, kde $x(1-x^2)=0$: $x(1-x)(1+x)=0 \Rightarrow x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$

$f(g(x))=0$ v bodech $x_{1,2,3}$, $f(g(x))$ je spojitá všude jinde s hodnotou $+1$ nebo -1.

$g(f(x)) = \operatorname{sgn} x(1-\operatorname{sgn}^2 x)$:
$x>0$, $\operatorname{sgn} x = 1$, $g(f(x)) = 1\cdot(1-1)=0$
$x=0$, $\operatorname{sgn} x = 0$, $g(f(x)) = 0\cdot(1-0)=0$
$x<0$, $\operatorname{sgn} x = -1$, $g(f(x)) = -1\cdot(1-1)=0$
$\Big\}$ $g(f(x))=0$ na celém $\mathbb{R}$,

tedy $g(f(x))$ je spojitá na celém $\mathbb{R}$.

4) a) $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ pro $x \neq 0$

$= 1$ pro $x = 0$.

f je spojitá všude mimo $x=0$ očividně (podíl spojitých funkcí).

Vyšetříme bod $x=0$: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{|x|} = ?$

$\left.\begin{array}{l} x>0: \lim_{x\to 0_+} \frac{\sin x}{x} = 1 \\ x<0: \lim_{x\to 0_-} \frac{\sin x}{-x} = -1 \end{array}\right\}$ $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje

$\Rightarrow f(x)$ není spojitá v $x=0$.

b) $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$

$= 0$ $\quad x = 0$. Opět očividně $f(x)$ je spojitá všude mimo $x=0$.

V bodě $x=0$: $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = ?$

$\left.\begin{array}{l} \sin\frac{1}{x} \text{ je omezená fce} \\ \lim_{x\to 0} x = 0 \end{array}\right\}$ "$0 \cdot$ omezená $= 0$"

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$ a f je spojitá na celém $\mathbb{R}$.

[Pozor! Nelze $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim \frac{\sin y}{y} = 1$ protože zde $y \to \infty$!]

---

5) f, g spojité v x_0. $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ je spojitá v x_0:

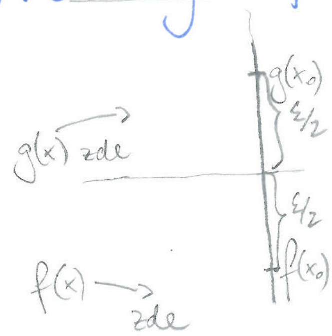
i) $f(x_0) < g(x_0)$: $h(x_0) = f(x_0)$. Ze spojitosti chceme říci, že $h(x) = f(x)$ i na okolí x_0.

Označme $g(x_0) - f(x_0) = \varepsilon$. Pak z definice spojitosti $\exists \delta_1 > 0$: $|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každé x t.ž. $|x - x_0| < \delta_1$

a podobně $\exists \delta_2 > 0$ t.ž. pro každé x : $|x - x_0| < \delta_2$: $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Je-li $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, pak pro $|x - x_0| < \delta$: $g(x) - f(x) > 0$ a tedy $h(x) = f(x)$

f je spojitá v $x_0 \Rightarrow h$ je spojitá v x_0



ii) $f(x_0) > g(x_0)$ analogicky

iii) $f(x_0) = g(x_0)$

Chci dokázat: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0$: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |h(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Využiju spojitost f i g: pro dané $\varepsilon > 0$ vím, že $\exists \delta_1 > 0 : |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

a $\exists \delta_2 > 0 : |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ proto pro $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ platí : $|x - x_0| < \delta \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \wedge |g(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

a tedy $\min\{f(x), g(x)\} = h(x)$ splňuje $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |h(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Pro maximum analogicky.

6) Příklad nespojité fce v každém $x \in \mathbb{R}$, jejíž druhá mocnina je spojitá na $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

. Na okolí každého $x \in \mathbb{R}$ jsou body s funkční hodnotou $f(y) = 1$ i s hodnotou $f(y) = -1$
$\Rightarrow$ f není spojitá nikde.

Definice: Funkce f má v bodě x_0 derivaci A, pokud $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A =: f'(x_0)$

nebo ekvivalentně $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A$.

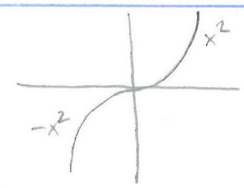
Aritmetika derivací:
$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$
$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$
$$(f(g(\cdot)))'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Derivace základních fcí: $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(e^x)' = e^x$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Derivace inverzní funkce: Za jistých předpokladů (viz přednáška): $(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

---

7) $f(x) = x|x|$. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$. $\underline{\underline{f'(0) = 0}}$



---

8) $f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|^\alpha \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|^\alpha}{x} \cdot \sin \frac{1}{x}$$

$\sin \frac{1}{x}$ nemá limitu v bodě 0, ale je omezená $\Rightarrow$ potřebujeme, aby $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|^\alpha}{x} = 0$.

To platí pro $\alpha > 1$.

Je derivace v 0 spojitá? $x > 0$: $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} + x^\alpha \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$
$$= x^{\alpha-2}\left(\alpha x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right)$$

$x < 0$: $f(x) = (-x)^\alpha \sin \frac{1}{x}$ (Tady potřebujeme $\alpha \in \mathbb{N}$!!)
$$f'(x) = -\alpha \cdot (-x)^{\alpha-1} \cdot \sin \frac{1}{x} + (-x)^\alpha \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= (-x)^{\alpha-2} \cdot \left(\alpha x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right)$$

Aby $\lim\limits_{x \to 0+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0-} f'(x)$, potřebujeme $\alpha > 2$!!

(Pak opět "omezená $\cdot$ 0" $= 0$)

9) $f(x) = x^2, \; x \in \mathbb{Q}$
$\quad\;\; = 0, \; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Očividně $f(x)$ není spojitá v bodech $x \neq 0$ (na okolí každého jsou body s fčními hodnotami $f(y) = 0$ i $f(y) = y^2$, pro spor se spojitostí lze vzít za $\varepsilon = \frac{x^2}{2}$)

Zřejmě $f(x)$ je spojitá v $x = 0$ (v definici vezmi pro $\varepsilon > 0$ $\delta := \sqrt{\varepsilon}$)

Nutná podmínka pro existenci derivace v bodě x_0 je, aby f byla v x_0 spojitá

$\Rightarrow$ f nemá derivaci v bodech $x \neq 0$.

Derivace v 0: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$. $\quad g(x) = \frac{f(x)}{x} = x$ pro $x \in \mathbb{Q}$
$\quad = 0$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Zřejmě $g(x)$ je spojitá v $x = 0$ (v definici vezmi pro $\varepsilon > 0$ $\delta := \varepsilon$) $\Rightarrow$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0.$$

[$D(x) := 1$ pro $x \in \mathbb{Q}$
$\quad := 0$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ... Dirichletova fce. Pak $f(x) = x^2 D(x)$

$D(x)$ není nikde spojitá, ale je omezená a lze používat větu "$0 \cdot$ omezená $= 0$"]

---

10) $f(x)$ je sudá : $f(-x) = f(x)$ pro $x > 0$
$g(x)$ je lichá : $g(-x) = -g(x)$ pro $x > 0$

Nechť f je sudá, $x_0 > 0$ a existuje $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Potom
$$f'(-x_0) = \lim_{y \to -x_0} \frac{f(y) - f(-x_0)}{y - (-x_0)} = \lim_{z \to x_0} \frac{f(-z) - f(-x_0)}{-z - (-x_0)} \overset{f \text{ sudá}}{=} \lim_{z \to x_0} \frac{f(z) - f(x_0)}{x_0 - z} = -\lim_{z \to x_0} \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} = -f'(x_0)$$

$y = -z \mid z = -y$
$y \to -x_0 \mid z \to x_0$

$\Rightarrow f'$ je lichá.

---

11) $f(x) = x^2, \; x \leq 1$
$\quad\;\; = ax + b, \; x > 1$

Nutná podmínka: f musí být spojitá v $x = 1$, tj.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1_-} f(x) &= \lim_{x \to 1_-} x^2 = 1 \\ \lim_{x \to 1_+} f(x) &= \lim_{x \to 1_+} ax + b = a + b \end{aligned}\right\} 1 = a + b$$

$f'(x) = 2x, \; x < 1$
$\quad\;\; = a, \; x > 1$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Derivace zleva: } f'_-(1) = \lim_{x \to 1_-} f'(x) = \lim_{x \to 1_-} 2x = 2 \\ &\text{Derivace zprava: } f'_+(1) = \lim_{x \to 1_+} f'(x) = \lim_{x \to 1_+} a = a \end{aligned}\right\} 2 = a$$

$\Rightarrow a = 2, \; b = -1$

[Použili jsme větu o limitě derivací, lze počítat i přímo

$f'_-(1) = \lim\limits_{x \to 1_-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1_-} x + 1 = 2 \; \Big| \; f'_+(1) = \lim\limits_{x \to 1_+} \frac{ax + b - 1}{x - 1} \overset{b = 1 - a}{=} \lim \frac{a(x-1)}{x-1} = a$]

12) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$

$x_0 = -2 \Rightarrow f(x_0) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 4(-2) - 3 = 5$

Rovnice tečny ke grafu fce f v bodě x_0: $y = kx + q$, kde $k = f'(x_0)$

a q je takové, aby $f(x_0) = kx_0 + q$

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$

$f'(-2) = 3\cdot(-2)^2 + 4\cdot(-2) - 4 = 0 = k \Rightarrow$ Tečna má rovnici $y = q$, kde $5 = f(-2) = q$

tj. rovnice tečny: $\underline{\underline{y = 5}}$

Normála: kolmá k tečně. je-li $f'(x_0) \neq 0$, pak $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$

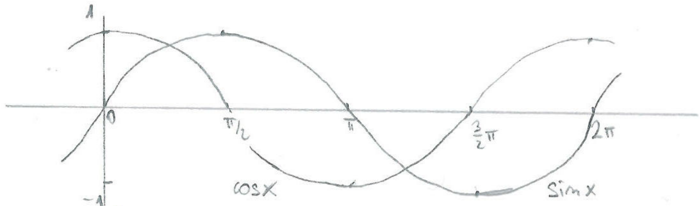
Pro nás $f'(-2) = 0$, vzorec nelze použít, nicméně kolmé přímky k $y = 5$ jsou $x = c$

pro libovolné $c \in \mathbb{R}$. My chceme, aby $[-2, 5] \in \{x = c\} \Rightarrow c = -2$, $\underline{\underline{x = -2}}$

ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

$f(x) = \sin x$ $\quad D_f = D_g = \mathbb{R}$

$g(x) = \cos x$ $\quad H_f = H_g = [-1, 1]$



$\sin x = \cos(x - \pi/2)$ $\quad$ Obě jsou 2π - periodické $\quad$ $\sin x$ lichá, $\cos x$ sudá

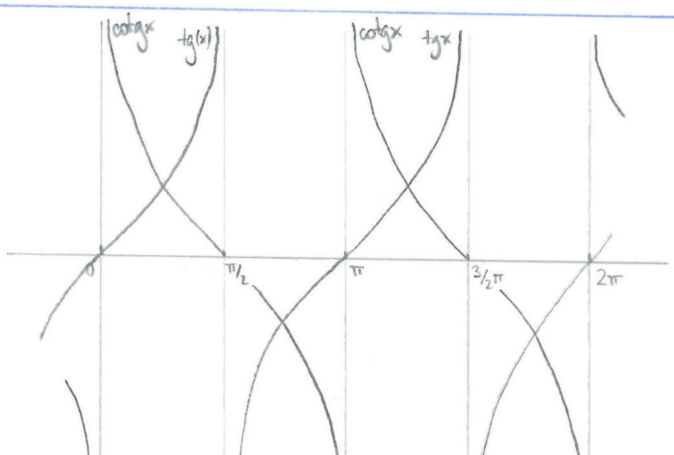
$\sin' x = \cos x$

$\cos' x = -\sin x$

$f(x) = \mathrm{tg}\, x$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$

$g(x) = \mathrm{cotg}\, x$ $\quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$

$H_f = H_g = \mathbb{R}$



$\mathrm{tg}\, x = -\mathrm{cotg}(x + \pi/2)$ $\quad$ Obě jsou π - periodické

$\mathrm{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\mathrm{cotg}'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $\quad$ Obě jsou liché

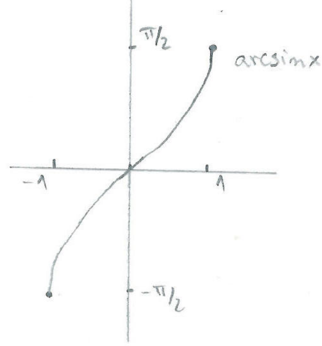
$f(x) = \arcsin x$ $\quad D_f = D_g = [-1, 1]$

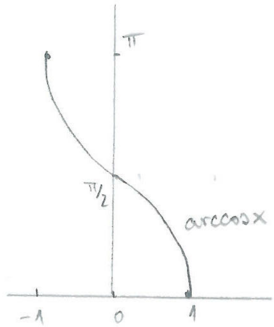
$g(x) = \arccos x$ $\quad H_f = [-\pi/2, \pi/2]$

$\quad H_g = [0, \pi]$

$f(x)$ lichá, prostá, rostoucí

$g(x)$ klesající, prostá, ani sudá ani lichá





$x \in (-1, 1)$: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $f'_+(-1) = +\infty$, $f'_-(1) = +\infty$

Podobně $(\arccos x)' = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $g'_+(-1) = g'_-(1) = -\infty$

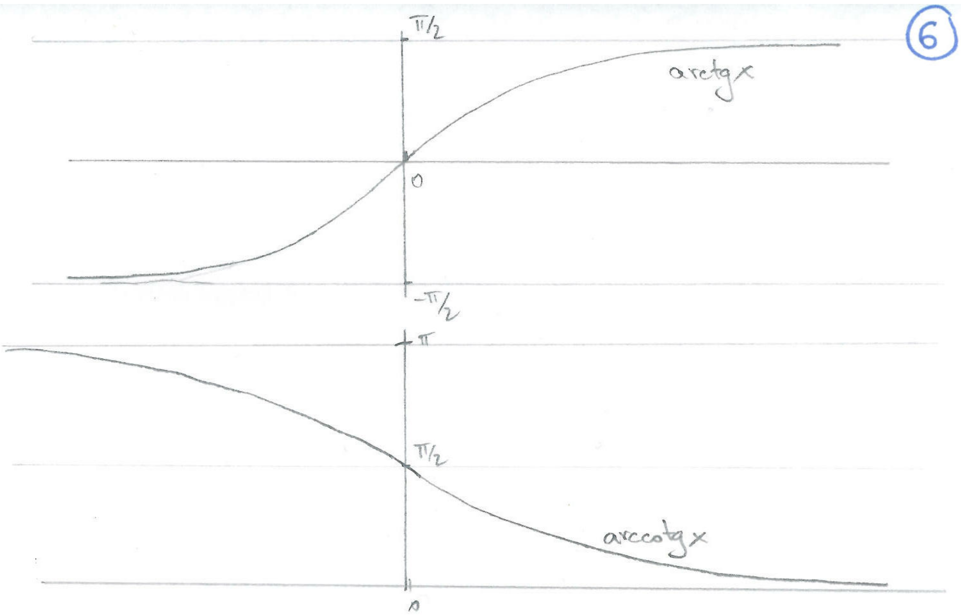
$f(x) = \operatorname{arctg} x$ $\quad D_f = D_g = \mathbb{R}$

$g(x) = \operatorname{arccotg} x$ $\quad H_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\quad H_g = (0, \pi)$

f lichá, rostoucí, omezená

g klesající, omezená, ani sudá ani lichá



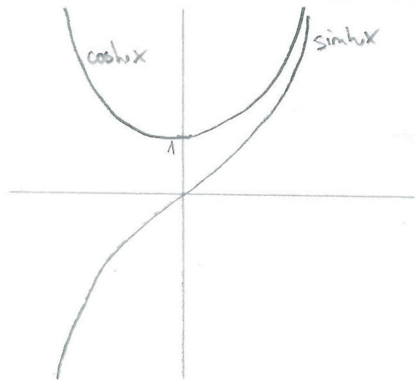
$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}} = \frac{1}{\frac{\sin^2(\operatorname{arctg} x) + \cos^2(\operatorname{arctg} x)}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}} = \frac{1}{1+x^2}$$

Podobně $\operatorname{arccotg}' x = \dfrac{1}{\operatorname{cotg}'(\operatorname{arccotg} x)} = -\dfrac{1}{\frac{1}{\sin^2(\operatorname{arccotg}(x))}} = \dfrac{-1}{1+\operatorname{cotg}^2(\operatorname{arccotg} x)} = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Hyperbolické funkce

$f(x) = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad D_f = D_g = \mathbb{R}$

$g(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad H_f = \mathbb{R},\ H_g = [1, \infty)$



f rostoucí, lichá

g sudá

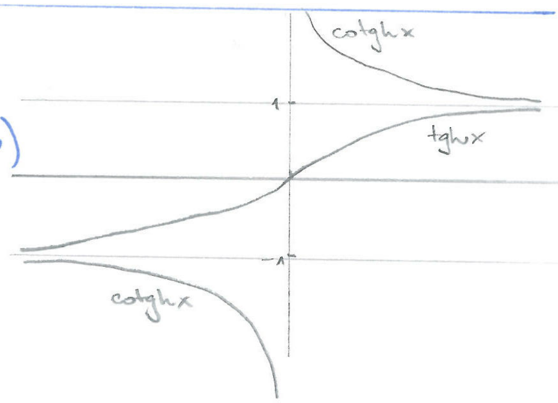
$\sinh' x = \cosh x$

$\cosh' x = \sinh x$

$$\sinh^2 x - \cosh^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = -1 \Rightarrow \underline{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

$f(x) = \operatorname{tgh} x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\quad D_f = \mathbb{R},\ H_f = (-1, 1)$

$g(x) = \operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ $\quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ H_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$



f rostoucí, lichá, omezená

g klesající na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$, lichá

$$\operatorname{tgh}' x = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\operatorname{cotgh}' x = \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)' = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

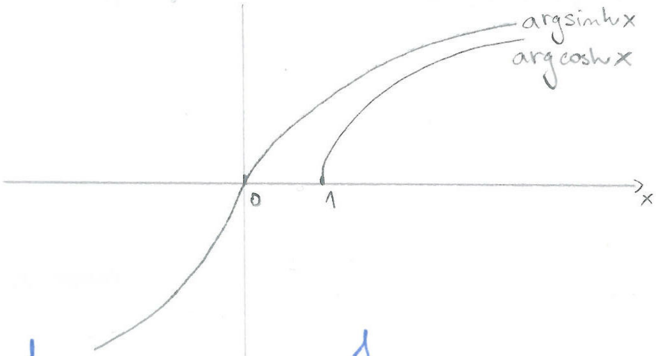
Hyperbolometrické funkce

$f(x) = \operatorname{arg\,sinh} x \qquad D_f = \mathbb{R},\ H_f = \mathbb{R}$

$g(x) = \operatorname{arg\,cosh} x \qquad D_g = [1,\infty),\ H_g = [0,\infty)$

f lichá, rostoucí

g rostoucí



$$\operatorname{argsinh}' x = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{argsinh} x)} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{argsinh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{argsinh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

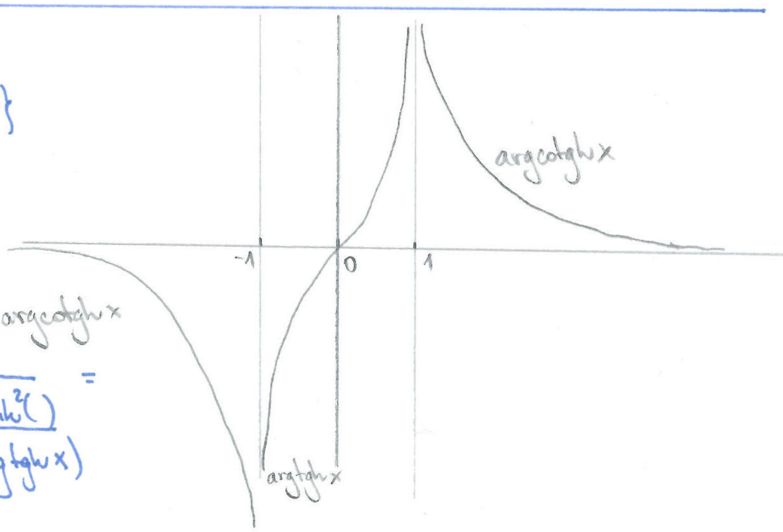
$$\operatorname{arg\,cosh}' x = \frac{1}{\cosh'(\operatorname{argcosh} x)} = \frac{1}{\sinh(\operatorname{argcosh} x)} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\operatorname{argcosh} x)-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$f(x) = \operatorname{arg\,tgh} x \qquad D_f = (-1,1),\ H_f = \mathbb{R}$

$g(x) = \operatorname{arg\,cotgh} x \qquad D_g = (-\infty,-1)\cup(1,\infty) \quad H_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

f lichá, rostoucí

g klesající na $(-\infty,-1)$ a na $(1,\infty)$
lichá



$$\operatorname{argtgh}' x = \frac{1}{\operatorname{tgh}'(\operatorname{argtgh} x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2(\operatorname{argtgh} x)}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2(\,) - \sinh^2(\,)}{\cosh^2(\operatorname{argtgh} x)}} =$$

$$= \frac{1}{1-x^2}$$

$$\operatorname{argcotgh}' x = \frac{1}{\operatorname{cotgh}'(\operatorname{argcotgh} x)} = \frac{-1}{\frac{1}{\sinh^2(\operatorname{argcotgh} x)}} = \frac{-1}{\frac{\cosh^2(\,) - \sinh^2(\,)}{\sinh^2(\operatorname{argcotgh} x)}} = \frac{-1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}$$

---

13) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \pi/2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x\in\mathbb{R} \Rightarrow \exists y \in (0,\pi) : y = \operatorname{arccotg} x$, tedy $x = \operatorname{cotg} y$: $\underbrace{\operatorname{arctg}(\operatorname{cotg} y) + y}_{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x} = \operatorname{arctg}(-\operatorname{tg}(y - \pi/2)) + y$

$y - \pi/2 \in (-\pi/2, \pi/2)$

$= \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\pi/2 - y)) + y$

$= \pi/2 - y + y = \pi/2$

---

14) $\arcsin x + \arccos x = \pi/2, \quad \forall x \in [-1,1]$

$x \in [-1,1] \Rightarrow \exists y \in [0,\pi] : y = \arccos x$, tedy $x = \cos y$: $\arcsin x + \arccos x = \arcsin(\cos y) + y$

$y + \pi/2 \in [\pi/2, \tfrac{3}{2}\pi]$

$= \arcsin(\sin(y + \pi/2)) + y$

$\pi/2 - y \in [-\pi/2, \pi/2]$

sin x je "sudá" kolem $x = \pi/2$ $\longrightarrow$ $= \arcsin(\sin(\pi/2 - y)) + y$

$= \pi/2 - y + y = \pi/2$

15) $\operatorname{argsinh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \quad x\in\mathbb{R}$

$y = \operatorname{argsinh} x \iff x = \sinh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$

$z = e^y \iff y = \ln z$

$z > 0\,!$

vyjádřit z pomocí x: $x = \dfrac{z - \frac{1}{z}}{2}$

$2x = z - \frac{1}{z}$

$2xz = z^2 - 1$

$z^2 - 2xz - 1 = 0$

$z_{1,2} = x \pm \dfrac{\sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$

Aby $z>0$, musíme volit $+$: $z = x + \sqrt{x^2+1}$

$\operatorname{argsinh} x = y = \ln z = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

---

16) $\operatorname{argcosh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, $|x|\geq 1$ (ve skutečnosti $x \geq 1$)

$y = \operatorname{argcosh} x \iff x = \cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$

$z = e^y \iff y = \ln z$

$z > 0$

z pomocí x: $x = \dfrac{z + 1/z}{2}$

$2x = z + 1/z \qquad 2xz = z^2 + 1$

$z^2 - 2xz + 1 = 0$

$z_{1,2} = x \pm \dfrac{\sqrt{4x^2-4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2-1}$

$\operatorname{argcosh} x > 0 \implies y > 0$

$\ln z > 0 \implies z > 1 \implies$ musíme volit $+$ $\implies$

$\implies \operatorname{argcosh} x = y = \ln z = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

---

17) $\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $x\in(-1,1)$

$y = \operatorname{argtgh} x \implies x = \operatorname{tgh} y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$

$z = e^y \iff y = \ln z$

$z > 0$

z pomocí x: $x = \dfrac{z - 1/z}{z + 1/z} = \dfrac{z^2-1}{z^2+1}$

$z^2 x + x = z^2 - 1$

$z^2(x-1) = -1 - x$

$z^2(1-x) = 1+x \implies z^2 = \dfrac{1+x}{1-x}$

$z = \pm\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{1/2}$

$z > 0 \implies$ volíme $+$

$\operatorname{argtgh} x = y = \ln z = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{1/2} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

---

18) $\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$, $|x|>1$

$y = \operatorname{argcotgh} x \implies x = \operatorname{cotgh} y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}}$

$z = e^y \iff y = \ln z$

$z > 0$

z pomocí x: $x = \dfrac{z + 1/z}{z - 1/z} = \dfrac{z^2+1}{z^2-1}$

$z^2 x - x = z^2 + 1$

$z^2(x-1) = x+1$

$z^2 = \dfrac{x+1}{x-1} \qquad z = \pm\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{1/2}$

$z > 0 \implies$ volíme $+$

$\operatorname{argcotgh} x = y = \ln z = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{1/2} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$

---

19) viz PŘEHLED

20) $f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$: $x \neq \pm 1$: $f'(x)=\frac{2(1-x^2)-2x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{2x^2+2}{(1-x^2)^2}$

21) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}=\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{1/3}$ $D_f=[-1,1)$, $f'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{-2/3}\cdot\frac{3x^2(1-x^3)-(1+x^3)\cdot(-3x^2)}{(1-x^3)^2}$

$$=2x^2(1-x^3)^{-4/3}(1+x^3)^{-2/3}\quad, f'_+(-1)=+\infty$$

22) $f(x)=\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$ $x^2\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$
$x\neq\pm\sqrt{k\pi}, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ $f'(x)=\frac{2\sin x\cos x\cdot\sin x^2-\sin^2 x\cdot\cos x^2\cdot 2x}{\sin^2 x^2}$

23) $f(x)=\sin\sin\sin x$ $D_f=\mathbb{R}$, $f'(x)=\cos\sin\sin x\cdot\cos\sin x\cdot\cos x$

24) $f(x)=2^{\mathrm{tg}\,1/x}$, $x\neq 0$, $\frac{1}{x}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$
$x\neq\frac{1}{\pi/2+k\pi}$ $k\in\mathbb{Z}$ $f'(x)=2^{\mathrm{tg}\,1/x}\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{\cos^2 1/x}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{x^2}$

25) $f(x)=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}$ $x\geq 0$ $f'(x)=a^a x^{(a^a-1)}+a^{x^a}\ln a\cdot a x^{a-1}+a^{a^x}\ln a\, a^x\ln a$

26) $f(x)=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$, $\left.\begin{array}{l}\sin x\geq 0\\ \wedge\ \cos x\geq 0\end{array}\right\} x\in[0,\pi/2]+2k\pi$ $f'(x)=(\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\ln\sin x+\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\cos x\right)+$
$+(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x\ln\cos x+\frac{\sin x}{\cos x}\cdot(-\sin x)\right)$

27) $f(x)=\mathrm{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ $x\neq 1$ $f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2}=\frac{2}{2+2x^2}=\frac{1}{1+x^2}$

28) $f(x)=x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$ $x\in[-1,1]$

$$f'(x)=\arcsin^2 x+x\cdot 2\cdot\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)\cdot\arcsin x+2\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-2$$

$$=\arcsin^2 x$$

29) DÚ

30) Parciální derivace : $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ ... x_1 je proměnná, vše ostatní se bere jako konstanta

Podobně $\frac{\partial u}{\partial x_2}$, $\frac{\partial u}{\partial x_3}$

$u(x)=\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$ $\frac{\partial u}{\partial x_1}=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}^3}\cdot 2x_1$ podobně $\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{-x_i}{|x|^3}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)=-\frac{1}{\sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}^3}-x_1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}^5}(2x_1)$$

a tedy $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=-\frac{1}{|x|^3}+\frac{3x_i^2}{|x|^5}$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=-\frac{3}{|x|^3}+\frac{3\sum x_i^2}{|x|^5}=-\frac{3}{|x|^3}+\frac{3|x|^2}{|x|^5}=0$$

31) $v(x) = t^{-3/2} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{3}{2} t^{-5/2} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + t^{-3/2} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{|x|^2}{4}\right) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{t^2} = t^{-3/2} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{3}{2} \cdot t^{-1} + \frac{|x|^2}{4t^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = t^{-3/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{1}{4t}\right) \cdot 2x_i = -\frac{1}{2} t^{-5/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot x_i$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = -\frac{1}{2} t^{-5/2} \cdot \left(e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{1}{4t}\right) \cdot 2x_i \cdot x_i + e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right) = \frac{1}{2} t^{-5/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(\frac{x_i^2}{2t} - 1 \right)$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = -\frac{3}{2} t^{-5/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + \frac{1}{4} t^{-7/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \cdot |x|^2 = \frac{\partial v}{\partial t} \qquad \text{a tedy } \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0$$

32) $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} \qquad f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-3/2} \qquad f'''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot x^{-5/2} \quad \ldots$

$$f^{(10)}(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{1-9\cdot 2}{2}\right) x^{\frac{1-10\cdot 2}{2}} = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 17}{2^{10}} x^{-19/2}$$

33) DÚ