Opakování II

Matematická indukce

Dokažte matematickou indukcí následující rovnosti a nerovnosti

1. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$
3. $\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$, $x_i \geq -2$, x_i mají stejná znaménka
4. $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ (binomická věta)
5. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
6. $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \dfrac{1}{n}(x_1 + \ldots x_n)$, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (AG nerovnost)
7. $n! \leq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$
8. $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$
9. $\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \sin x_k$, $x_k \in [0, \pi]$, $k = 1, 2 \ldots, n$
10. $\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\dfrac{5}{6} \ldots \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$
11. $n^{n+1} > (n + 1)^n$, $n \geq 3$

Číselné obory

Supremum, infimum množin

12. U následujících množin nalezněte sup, inf, max a min (pokud existují). Ověřte z definice!
a) $M = (0, 1]$ b) $M = [0, 1]$ c) $M = (0, \infty)$
d) $M = \left\{\frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{N}\right\}$ e) $M = \left\{0,5; 0,55; 0,555; \dots\right\}$
f) $M = \left\{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 3\right\}$. Ukažte, že $\sup M \notin \mathbb{Q}$.

13. Nechť A, B jsou neprázdné omezené podmnožiny $\mathbb{R}$. Dokažte:
a) $\inf(-A) = -\sup A$
b) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
c) $\inf(A - B) = \inf A - \sup B$
d) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$,
kde A, B obsahují pouze nezáporné prvky.
Množiny $-A = \{x; -x \in A\}$, $A + B = \{z; z = x + y, x \in A, y \in B\}$, ostatní jsou definovány analogicky.

14. Nechť A, B jsou neprázdné omezené podmnožiny $\mathbb{R}$. Lze obecně vyjádřit $\sup(A \cup B)$ a $\sup(A \cap B)$ pomocí $\sup A$ a $\sup B$?

15. Nechť M je neprázdná množina a nechť $f : M \to \mathbb{R}$ a $g : M \to \mathbb{R}$ jsou omezené funkce. Dokažte, že
a) $\sup_{x\in M}(f(x) + g(x)) \leq \sup_{x\in M} f(x) + \sup_{x\in M} g(x)$. Musí platit rovnost?
b) $\sup_{x\in M}(f(x) + g(x)) \geq \sup_{x\in M} f(x) + \inf_{x\in M} g(x)$
c) $\sup_{x\in M}(f(x) - g(x)) \leq \sup_{x\in M} f(x) - \inf_{x\in M} g(x)$
Definujeme
$$\sup_{x\in M} f(x) = \sup\{z; z = f(x), x \in M\}.$$

Důkazy matematickou indukcí.

Metoda pro důkazy tvrzení typu $\forall n \in \mathbb{N}: V(n)$, kde $V(n)$ je nějaký výrok.

Důkaz ve dvou krocích. 1) Platí $V(1)$ (případně $V(n_0)$ pokud je výrok typu $\forall n \geq n_0 : V(n)$)

2) Důkaz implikace $V(k) \Longrightarrow V(k+1)$.

Důležité jsou oba kroky, přestože $V(1)$ je často triviální. Bez 1. kroku není důkaz kompletní.

---

① $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Důkaz: 1) $n=1$: $1^2 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$ ✓

2) Nechť $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Potom

$$\text{LS } V(k+1) = \underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + k^2}_{\text{LS } V(k)} + (k+1)^2 = \underbrace{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}_{\text{PS } V(k)} + (k+1)^2 = \frac{1}{6} \cdot \left[(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)\right]$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left[(k+1)(2k^2 + 7k + 6)\right] = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

$\overset{\shortparallel}{\text{PS } V(k+1)}$ ✓

---

② $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + \ldots + n)^2$

Mezikrok: $1 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

1) $n=1$: $1 = \dfrac{1 \cdot 2}{2}$ ✓

"$k \Rightarrow k+1$": $\underbrace{1 + \ldots + k}_{} + k + 1 = \dfrac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ ✓

Tedy přepíšeme: $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

1) $n=1$: $1 = \dfrac{1^2 \cdot 2^2}{4}$ ✓

2) $\underbrace{1^3 + 2^3 + \ldots + k^3}_{} + (k+1)^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \dfrac{(k+1)^2}{4} \cdot (k^2 + 4k + 4) = \dfrac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4}$ ✓

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq 1+\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad x_i \geq -2\text{, } x_i \text{ mají stejná znaménka.}$$

Důkaz: $n=1$: $1+x_1 = 1+x_1$ OK

"$k \Rightarrow k+1$". Rozlišíme 3 různé případy. OBA VÝRAZY JSOU KLADNÉ !!

a) $x_i \geq 0$:

$$\prod_{i=1}^{k+1}(1+x_i) = \prod_{i=1}^{k}(1+x_i)\cdot(1+x_{k+1}) \geq \left(1+\sum_{i=1}^{k} x_i\right)(1+x_{k+1})$$

$$= 1+\sum_{i=1}^{k} x_i + x_{k+1} + x_{k+1}\cdot\sum_{i=1}^{k} x_i = 1+\sum_{i=1}^{k+1} x_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} x_i x_{k+1}}_{\geq 0} \geq 1+\sum_{i=1}^{k+1} x_i$$

b) $x_i \in (-1,0)$: Úplně stejně jako v případě a). Pořád jsou $(1+x_i)$ kladné výrazy. Zároveň součiny $x_i \cdot x_{k+1}$ jsou také kladné.

$\tilde{b}$) $x_i \in [-1,0)$: Je-li nějaké $x_i = -1$, pak $LS = 0$, $PS < 0$, výrok očividně platí

c) $x_i \in (-2,0)$ a navíc ~~[illegible]~~ $x_i \neq -1$ $\forall i$ (jinak viz $\tilde{b}$))

4 podpřípady:

c1) $\prod_{i=1}^{k}(1+x_i) > 0 \wedge (1+x_{k+1}) > 0$. Pak stejně jako a).

c2) $\prod_{i=1}^{k}(1+x_i) < 0 \wedge (1+x_{k+1}) > 0$. Také lze stejně jako a), protože vím $\prod_{i=1}^{k}(1+x_i) \geq 1+\sum_{i=1}^{k} x_i$, a proto $\left(\prod_{i=1}^{k}(1+x_i)\right)(1+x_{k+1}) \geq \left(1+\sum_{i=1}^{k} x_i\right)(1+x_{k+1})$

c3) $\prod_{i=1}^{k}(1+x_i) < 0 \wedge (1+x_{k+1}) < 0$. Pak $\prod_{i=1}^{k+1}(1+x_i) > 0$ a zároveň $1+\sum_{i=1}^{k+1} x_i < 0$ protože $x_{k+1} < -1$. Dokazovaná nerovnost tak platí triviálně: $LS > 0$, $PS < 0$ a tak $LS \geq PS$

c4) $\prod_{i=1}^{k}(1+x_i) > 0 \wedge (1+x_{k+1}) < 0$. Zde musíme využít $x_i \geq -2$ (zatím jsme to nepotřebovali!)

OBA KLADNÉ

$$\prod_{i=1}^{k+1}(1+x_i) = \prod_{i=1}^{k}(1+x_i)\cdot(2+x_{k+1}-1) = \prod_{i=1}^{k}(1+x_i)(2+x_{k+1}) - \prod_{i=1}^{k}(1+x_i) \geq \left(1+\sum_{i=1}^{k} x_k\right)(2+x_{k+1}) -$$

$$-\prod(1+x_i) = \left(1+\sum_{i=1}^{k+1} x_k\right) + \sum_{i=1}^{k} \underbrace{x_i(1+x_{k+1})}_{\geq 0} + \underbrace{1-\prod_{i=1}^{k}(1+x_i)}_{\geq 0} \geq 1+\sum_{i=1}^{k+1} x_i \qquad \blacksquare$$

④ Binomická věta $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$, kde $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$

1) $n=1$: $a+b = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1$ OK

2) "$k \Rightarrow k+1$": $(a+b)^{k+1} = (a+b)^k \cdot (a+b) = \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} b^i\right)(a+b) =$

$$= \binom{k}{0} a^{k+1} + \underbrace{\binom{k}{0} a^k b + \binom{k}{1} a^k b}_{} + \underbrace{\binom{k}{1} a^{k-1} b^2 + \binom{k}{2} a^{k-1} b^2}_{} + \binom{k}{3} a^{k-2} b^3 + \ldots + \binom{k}{k} a b^k + \binom{k}{k} b^{k+1}$$

Platí $\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0}$ a $\binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}$

Zbývá dokázat: $\binom{k}{j} + \binom{k}{j+1} = \binom{k+1}{j+1}$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ a $0 \le j \le k-1$

To je jednoduché: $\binom{k}{j} + \binom{k}{j+1} = \frac{k!}{j!(k-j)!} + \frac{k!}{(j+1)!(k-j-1)!} = \frac{k!(j+1) + k!(k-j)}{(j+1)!(k-j)!} =$

$$= \frac{k!(k+1)}{(j+1)!(k-j)!} = \frac{(k+1)!}{(j+1)!(k-j)!} = \binom{k+1}{j+1}$$

---

⑤ $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$

1) $n=1$: $\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1+1 = 2 = 2^1$ OK

2) "$k = k+1$": $2^{k+1} = 2^k \cdot 2 = 2 \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} = \binom{k}{0} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1}\right] + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right] + \ldots + \left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}\right] + \binom{k}{k}$

$$= \binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} + \ldots + \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i}.$$

Nebo přímo z binomické věty dosazením $a = b = 1$.

---

⑥ AG nerovnost: $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \le \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$ pro $x_i \ge 0$

$n=1$: $x_1 = \frac{x_1}{1}$ OK

$n=2$: $\sqrt{x_1 x_2} \overset{?}{\le} \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$: $x_1 x_2 \le \frac{1}{4}(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2)$

$0 \le (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 - x_2)^2$ ✓

Dokážeme AG nerovnost pro $n = 2^m$

$$\sqrt[2^{k+1}]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2^k} \cdot x_{2^k+1} \cdot \ldots \cdot x_{2^{k+1}}} = \sqrt{\sqrt[2^k]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2^k}} \cdot \sqrt[2^k]{x_{2^k+1} \cdot \ldots \cdot x_{2^{k+1}}}} \le \frac{\sqrt[2^k]{x_1 \ldots x_{2^k}} + \sqrt[2^k]{x_{2^k+1} \ldots x_{2^{k+1}}}}{2} \le$$

$$\leq \frac{\frac{x_1+\dots+x_{2^k}}{2^k} + \frac{x_{2^k+1}+\dots+x_{2^{k+1}}}{2^k}}{2} = \frac{x_1+\dots+x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \quad ✓$$

Nakonec: AG nerovnost platí pro libovolné n.

Označme n_0 nejbližší číslo tak, že $n_0 > n$ a $n_0 = 2^{m_0}$.

$x_1, \dots, x_n$ jsou naše parametry, se kterými pracujeme. Přidáme další umělé

$x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n_0}$ tak, že $x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_{n_0} = \frac{x_1+\dots+x_n}{n} =: \alpha$

Pak zřejmě $\frac{x_1+\dots+x_{n_0}}{n_0} = \alpha$. Z AG nerovnosti pro n_0 máme

$$\alpha \geq \sqrt[n_0]{x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_{n_0}} = \sqrt[n_0]{x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} \dots x_{n_0}} = (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n_0} \cdot (x_{n+1} \dots x_{n_0})^{1/n_0}$$
$$= (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n_0} \cdot \alpha^{\frac{n_0 - n}{n_0}}$$

Odtud $\alpha^{\frac{n}{n_0}} \geq (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n_0}$

a tedy $\alpha \geq (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ $\blacksquare$

---

7 $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

$n=1$: $1! = 1 \leq \left(\frac{1+1}{2}\right)^1 = 1$ OK

"$k \Rightarrow k+1$": $(k+1)! = (k+1) \cdot k! \leq (k+1) \frac{(k+1)^k}{2^k} \overset{?}{\leq} \left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}$

Potřebujeme tedy ukázat, že platí $\frac{(k+1)^{k+1}}{2^k} \leq \frac{(k+2)^{k+1}}{2^{k+1}}$, tedy $(k+1)^{k+1} \leq \frac{(k+2)^{k+1}}{2}$

Ovšem: $\frac{(k+2)^{k+1}}{2} = \frac{(k+1+1)^{k+1}}{2} = \frac{(k+1)^{k+1} + \binom{k+1}{1}(k+1)^k + Z}{2}$, kde Z je zbytek z binomické věty

Očividně $Z > 0$ a ostatní dva členy na pravé straně dají $2 \cdot (k+1)^{k+1}$, proto

$$\frac{(k+2)^{k+1}}{2} = (k+1)^{k+1} + \frac{Z}{2} > (k+1)^{k+1}$$

8) $(2n)! < 2^{2n}\cdot(n!)^2$

$n=1$: $2!=2 < 2^2\cdot(1!)^2=4$ OK

"$k \Rightarrow k+1$": $(2(k+1))! = (2k)!\,(2k+1)(2k+2) < 2^{2k}\cdot(k!)^2(2k+1)(2k+2) <$

$< 2^{2k}(k!)^2(2k+2)(2k+2) = 2^{2k+2}(k!)^2(k+1)(k+1) = 2^{2\cdot(k+1)}((k+1)!)^2$

9) $\left|\sin\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sin x_i$ $x_i\in[0,\pi]$, tj. $\sin x_i \geq 0$

$n=1$: $|\sin x_1| = \sin x_1 \leq \sin x_1$ OK

"$k \Rightarrow k+1$": $\left|\sin\left(\sum_{i=1}^{k+1} x_i\right)\right| = \left|\sin\left(\sum_{i=1}^{k} x_i + x_{k+1}\right)\right| = \left|\sin\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)\cos x_{k+1} + \cos\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)\sin x_{k+1}\right|$

Δ-nerovnost

$\leq \left|\sin\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)\right|\cdot|\cos x_{k+1}| + \left|\cos\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)\right|\cdot|\sin x_{k+1}|$

$\leq \left|\sin\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)\right| + \sin x_{k+1} \leq \sum_{i=1}^{k}\sin x_i + \sin x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1}\sin x_i$

10) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

$n=1$: $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ protože $\sqrt{3}<2$ OK

"$k \Rightarrow k+1$": $\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} \overset{?}{\leq} \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$

Ovšem $\sqrt{(2k+1)(2k+3)} \leq 2k+2$ je AG nerovnost a platí

11) $n^{n+1} > (n+1)^n$ pro $n\geq 3$

$n=3$: $3^4=81 > 4^3=64$ OK

"$k \Rightarrow k+1$": Platí $k^{k+1} > (k+1)^k$, tedy $k\cdot k^k > (k+1)^k$, tedy $k > \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$

Chci ukázat $k+1 \geq \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}$.

Z předpokladu: $k > \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \quad /\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)$

$\Rightarrow \quad k+1 > \left(1+\frac{1}{k}\right)^k\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right) = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} > \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} = \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}$

Lze dokázat i přímo binomickou větou a odhadem členů.

<u>Definice</u>: M je maximum $A \iff M \in A$ a $\forall x \in A: x \le M$

m je minimum $A \iff m \in A$ a $\forall x \in A: x \ge m$

S je supremum $A \iff \forall x \in A: x \le S$ a $\forall y < S\ \exists x_0 \in A: x_0 > y$

s je infimum $A \iff \forall x \in A: x \ge s$ a $\forall y > s\ \exists x_0 \in A: x_0 < y$

12) a) $A = (0,1]$: $M = 1$ triviálně

m neexistuje (lze dokázat sporem viz druhý krok v infima)

$S = 1$: 1. část triviálně. 2. část: $y < 1 \Rightarrow x_0 := \frac{y+1}{2} \in A$ a $x_0 > y$.

$s = 0$: 1. část triviálně. 2. část: $y > 0 \Rightarrow x_0 := y/2 \in A$ a $x_0 < y$.

b) $A = [0,1]$: M, S viz a)

$m = 0$ triviálně

$s = 0$ viz a)

c) $A = (0,\infty)$: m, s stejné jako a)

M neexistuje, S neexistuje v $\mathbb{R}$ (sporem: $S \in \mathbb{R}^+$ je max nebo sup $\Rightarrow 2S > S$ a $2S \in (0,\infty)$ $\Rightarrow S$ není horní závora)

d) $A = \left\{\frac{a}{b};\ a,b \in \mathbb{N}\right\}$: m neexistuje (sporem: $\frac{a_0}{b_0}$ je min $\Rightarrow \frac{a_0}{2b_0} < \frac{a_0}{b_0}$ spor)

M neexistuje (sporem: $\frac{a_1}{b_1}$ je max $\Rightarrow \frac{2a_1}{b_1} > \frac{a_1}{b_1}$ spor)

S neexistuje (sporem: S je horní závora: $[S]+2 > S$ a $[S]+2 \in A$)

$s = 0$: 1. část triviálně. 2. část: $y > 0 \Rightarrow \exists\, b_2 \in \mathbb{N}: y > \frac{1}{b_2}$

(např. $b_2 := \left[\frac{1}{y}\right] + 2$)

$x_0 = \frac{1}{b_2} < y$.

e) $A = \{0{,}5;\ 0{,}55;\ 0{,}555;\ \dots\}$ $m = s = 0{,}5$ triviálně

M neexistuje (sporem: $M = 0{,}\underbrace{55\dots5}_{n} \Rightarrow 0{,}\underbrace{55\dots55}_{n+1} > M$)

$S = 5/9 = 0{,}\overline{5}$ 1. část triv.

2. část $y < 5/9$. Potřebujeme najít $x_0 = 5\cdot\sum_{k=1}^{n_0}\left(\frac{1}{10}\right)^k$ t.ž. $x_0 > y$

$$x_0 = 5\cdot\sum_{k=1}^{n_0}\left(\frac{1}{10}\right)^k = 5\cdot\left(\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n_0+1}}{1-\frac{1}{10}} - 1\right) = \frac{50}{9} - \frac{45}{9} - \frac{50}{9}\cdot\frac{1}{10^{n_0+1}} = \frac{5}{9} - \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{10^{n_0}} > y$$

$$\Rightarrow \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{10^{n_0}} < \underbrace{\frac{5}{9} - y}_{> 0\,!}$$

$10^{-n_0} < 1 - \frac{9}{5}y \Rightarrow 10^{n_0} > \frac{1}{1-\frac{9}{5}y} \Rightarrow n_0 > \log_{10}\left(\frac{1}{1-9/5\,y}\right)$. Našli jsme x_0.

(7)

$A = \{ x \in \mathbb{Q} : x^2 < 3 \}$

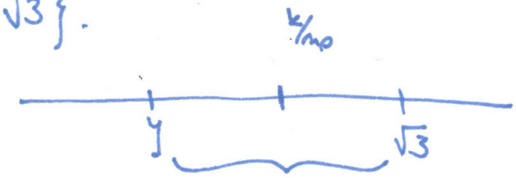
A je symetrická, proto očividně $s = -S$. m, M neexistují. Stačí ukázat pro M.
$(x \in A \Rightarrow -x \in A)$ Viz 2. část pro S

$S = \sqrt{3}$ 1. část triv.: $\forall x \in A : x < \sqrt{3}$

2. část $y < \sqrt{3}$. Chceme najít $x_0 = \frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$ t.ž. $x_0 > y$

$\sqrt{3} - y > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.ž. $\sqrt{3} - y > \frac{1}{n_0}$. $\left(n_0 := \left[\frac{1}{\sqrt{3}-y}\right] + 1\right)$

$b = n_0$; $a = \max_k \{ k ; \frac{k}{n_0} < \sqrt{3} \}$.



delší než $\frac{1}{n_0}$

$\Rightarrow$ musí tu být číslo tvaru $\frac{k}{n_0}$

$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$: Sporem: $\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{a}{b}$ zlomek ve tvaru prvočíselného rozkladu

$$\sqrt{3} = \frac{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_n^{\alpha_n}}{q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_m^{\beta_m}}$$ nelze zkrátit

$$3 = \frac{p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_n^{2\alpha_n}}{q_1^{2\beta_1} \dots q_m^{2\beta_m}}$$

LS: lichá mocnina prvočísla
PS: sudé mocniny prvočísel
spor.

(13) A, B neprázdné omezené

a) $\inf(-A) = -\sup A \; (=-S)$

1. část: $\forall x \in -A : x \geq -S \iff \forall x \in A : -x \geq -S$
$\iff \forall x \in A : x \leq S$

2. část: $\forall y > -S \; \exists x_0 \in -A : x_0 < y \overset{z=-y}{\iff} \forall z < S \; \exists x_0 \in A : -x_0 < -z$
$\forall z < S \; \exists x_0 \in A : x_0 > z$

b) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B \; (=: S_A + S_B)$

1. část: $\left.\begin{array}{l} \forall x \in A : x \leq S_A \\ \forall y \in B : y \leq S_B \end{array}\right\}$ $\forall z \in A+B : z = x + y$, $x \in A$, $y \in B$; $x \leq S_A$, $y \leq S_B \Rightarrow z \leq S_A + S_B$ ✓

2. část: Chci ukázat: $\forall \overline{S} < S_A + S_B \; \exists z \in A+B : z > S_A$.

Označ. $\delta = S_A + S_B - \overline{S}$

Víme, že pro $S_A - \delta/2 \; \exists x_A \in A : x_A > S_A - \delta/2$
pro $S_B - \delta/2 \; \exists y_B \in B : y_B > S_B - \delta/2$

$$x_A + y_B > S_A + S_B - \delta = \overline{S}$$

c) $\inf A-B = \inf A - \sup B =: s_A - S_B$ ③

1. část: Vím: $\forall x\in A: x \geq s_A$, $\forall y\in B: y \leq S_B$ $\Rightarrow \forall z: z=x-y,\ x\in A, y\in B: x-y \geq s_A - S_B$

2. část: Chci $\forall \bar{s} > s_A - S_B\ \exists z\in A-B: z<\bar{s}$

Ozn. $\bar{s} - s_A + S_B = \delta > 0$

Vím: pro $s_A + \delta/2\ \exists x_A\in A: x_A < s_A + \delta/2$

pro $S_B - \delta/2\ \exists y_B\in B: y_B > S_B - \delta/2$

$\Rightarrow x_A - y_B < s_A - S_B + \delta = \bar{s}$ ∎

d) $\sup(A\cdot B) = \sup A \cdot \sup B =: S_A\cdot S_B$

pro A,B obsahující jen nezáporné prvky.

Pokud $A=\{0\}$ nebo $B=\{0\}$, pak $A\cdot B = \{0\}$ a $S_{A\cdot B} = 0$ ✓

Nechť S_A i $S_B > 0$

1. část: $\forall x\in A: x\leq S_A$, $\forall y\in B: y\leq S_B$ $\Rightarrow \forall z: z=x\cdot y\ \substack{x\in A\\ y\in B}: z\leq S_A\cdot S_B$

2. část: Chci $\forall \bar{S} < S_A\cdot S_B\ \exists z\in A\cdot B: z>\bar{S}$.

Označ $S_A\cdot S_B - \bar{S} =: \delta$. Chceme najít ε t.ž. $(S_A-\varepsilon)\cdot(S_B-\varepsilon) = \bar{S}$

$\varepsilon^2 - \varepsilon(S_A+S_B) + S_AS_B - \bar{S} = 0$

$\varepsilon^2 - \varepsilon(S_A+S_B) + \delta = 0$

$\varepsilon_{1,2} = \frac{S_A+S_B}{2} \pm \frac{\sqrt{(S_A+S_B)^2-4\delta}}{2}$

(volíme −, aby ε bylo blízko 0)

Pro $S_A-\varepsilon\ \exists x_A\in A: x_A > S_A - \varepsilon$

$S_B-\varepsilon\ \exists y_B\in B: y_B > S_B-\varepsilon$

$x_A\cdot y_B > (S_A-\varepsilon)(S_B-\varepsilon) = \bar{S}$

14 Viz DÚ

15 a) $\sup_{x\in M}(f(x)+g(x)) \leq \sup_{x\in M} f(x) + \sup_{x\in M} g(x)$.

Dk: Zřejmě $f(x) \leq \sup_{x\in M} f(x)$, $g(x) \leq \sup_{x\in M} g(x)$ $\Rightarrow f(x)+g(x) \leq \sup_{x\in M} f(x) + \sup_{x\in M} g(x)$ (∗) platí $\forall x\in M$

Platí následující. Pokud $\forall a\in A: a\leq C$. Potom $\sup A \leq C$

$\Rightarrow \sup$ (∗) na LS: $\sup_{x\in M}(f(x)+g(x)) \leq \sup_{x\in M} f(x) + \sup_{x\in M} g(x)$

Rovnost očividně neplatí: $M=[-1,1]$; $f(x)=x$, $g(x)=-x$, $(f+g)(x)=0$

b) $\sup(f(x)+g(x)) \geq \sup f(x) + \inf g(x) \iff \sup f(x) \leq \sup(f(x)+g(x)) - \inf g(x)$

$\iff \sup f(x) \leq \sup(f(x)+g(x)) + \sup(-g(x))$ viz a)

c) $\sup(f(x)-g(x)) \leq \sup f(x) - \inf g(x) \iff \sup(f(x)-g(x)) \leq \sup f(x) + \sup(-g(x))$ viz a)