Sada příkladů 1/1

Opakování

Opakování ze SŠ

1. Nalezněte reálnou a imaginární část
   a) $\dfrac{2}{1-3\mathrm{i}}$ b) $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3$

2. Nalezněte velikosti a argumenty následujících komplexních čísel
   a) $-2-2\mathrm{i}$ b)$1+\mathrm{i}^{123}$

3. Dokažte
   a) $z+\overline{z}=2\mathcal{R}\mathrm{e}\,z$ b) $z-\overline{z}=2\mathrm{i}\mathcal{I}\mathrm{m}\,z$ c) $\overline{(\overline{z})}=z$
   d) $|\overline{z}|=|z|$ e) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$
   f) $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2 \pmod{2\pi} \quad z_1,z_2\neq 0$
   g) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2 \pmod{2\pi} \quad z_1,z_2\neq 0$

4. Řešte v $\mathbb{C}$:
   a) $x^6+1=0$ b) $x^2+x+1=0$

5. Řešte v $\mathbb{R}$:
   a) $|x+1|+|x-1|\geq 2$ b) $|x-3|+|x+2|\leq 0$

Výroky, množiny, zobrazení

6. Dokažte, že platí
   a) $A\Rightarrow A$
   b) $(A\Rightarrow B\bigwedge B\Rightarrow C)\Rightarrow(A\Rightarrow C)$
   c) $A\Leftrightarrow A$
   d) $(A\Leftrightarrow B)\Leftrightarrow(B\Leftrightarrow A)$
   e) $(A\Leftrightarrow B\bigwedge B\Leftrightarrow C)\Rightarrow(A\Leftrightarrow C)$
   f) $\mathrm{non}\,(\mathrm{non}\,A)\Leftrightarrow A$
   g) $(A\Rightarrow B)\Leftrightarrow(\mathrm{non}\,B\Rightarrow\mathrm{non}\,A)$
   h) $(A\Leftrightarrow B)\Leftrightarrow(\mathrm{non}\,B\Leftrightarrow\mathrm{non}\,A)$
   i) $(\mathrm{non}\,(A\bigvee B))\Leftrightarrow((\mathrm{non}\,A)\bigwedge(\mathrm{non}\,B))$
   j) $(\mathrm{non}\,(A\bigwedge B))\Leftrightarrow((\mathrm{non}\,A)\bigvee(\mathrm{non}\,B))$

k) $(\text{non}\,(A \Rightarrow B)) \Leftrightarrow (A \bigwedge (\text{non}\,B))$
l) $(\text{non}\,(A \Leftrightarrow B)) \Leftrightarrow ((A \bigwedge (\text{non}\,B)) \bigvee (B \bigwedge (\text{non}\,A))$

7. Zapište negaci výroku
$$\exists x \in \mathbb{R} : \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$
a rozhodněte, který z výroků je pravdivý.

8. Platí následující výroky?
a) $\forall a \in \mathbb{R}\, \exists \varepsilon > 0\, \exists \alpha \in \mathbb{R}\, \forall x \in (a, a + \varepsilon) : x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$
b) $\exists a \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \forall \alpha \in \mathbb{R}\, \exists x \in (a, a + \varepsilon) : x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$

9. Dokažte:
a) $C \setminus (A \bigcup B) = (C \setminus A) \bigcap (C \setminus B)$
b) $C \setminus (A \bigcap B) = (C \setminus A) \bigcup (C \setminus B)$
c) Nechť A_i, $i = 1, 2, \ldots$ je systém libovolných množin a nechť $B_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. Potom $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$.

10. Dokažte, že je-li f zobrazení, pak
$$f(M_1) \setminus f(M_2) \subset f(M_1 \setminus M_2)\,.$$
(M_1, M_2 jsou podmnožiny definičního oboru f.) Kdy platí rovnost?

11. Nechť $\varphi : [0, \infty) \to [1, \infty)$ je bijekce a nechť $\psi(x) = \sqrt{\varphi(x)^2 - 1}$. Dokažte, že existuje inverzní funkce ψ^{-1} a vyjádřete ji pomocí φ^{-1}. Určete $D_{\psi^{-1}}$.

1) $z = \mathrm{Re}\, z + i\, \mathrm{Im}\, z$

Re z ... reálná část z
Im z ... imaginární část z

a) $\frac{2}{1-3i} = \frac{2(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{2+6i}{1+9} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

b) $(1+i\sqrt{3})^3 = 1 + 3\sqrt{3}i + 3(\sqrt{3})^2 i^2 + (\sqrt{3})^3 i^3 = 1 + 3\sqrt{3}i - 9 - 3\sqrt{3}i = -8$

2) Goniometrický tvar komplexního čísla

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$

$|z|$ ... velikost, absolutní hodnota
φ ... argument z
$(\varphi = \arg(z))$

Vztahy: $a + bi = |z|e^{i\varphi}$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\varphi = \begin{cases} \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) & \text{pro } a > 0 \\ \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{pro } a < 0,\ b \geq 0 \\ \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{pro } a < 0,\ b < 0 \\ \pm \pi/2 & \text{pro } a = 0,\ b \gtrless 0 \\ \text{libovolné} & \text{pro } a = 0,\ b = 0 \end{cases}$$

Takto $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$ (lze také definovat podobně, aby $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$)

a) $z = -2-2i$

$|z| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\varphi = \mathrm{arctg}\, 1 - \pi = -\frac{3}{4}\pi$

b) $z = 1 + i^{123}$

$i^4 = 1 \Rightarrow z = 1 + i^{120} i^3 = 1 + i^3 = 1 - i$

$|z| = \sqrt{2}$

$\varphi = \mathrm{arctg}(-1) = -\pi/4$

(3) $z = a + ib \Rightarrow \bar{z} = a - ib$ ... komplexně sdružené číslo

$\left(z = r \cdot e^{i\varphi} \Rightarrow \bar{z} = r \cdot e^{-i\varphi} \right)$

Násobení komplexních čísel : $(a+ib)\cdot(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$

a) Dokažte $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$

LS: $a + bi + (a - bi) = 2a$

PS: $2a$

b) $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$

LS: $a + bi - (a - bi) = 2bi$

PS: $2bi$

c) $\overline{(\bar{z})} = z$

LS: $\overline{(\overline{a+bi})} = \overline{(a - bi)} = a + bi$

PS: $a + bi$

d) $|\bar{z}| = |z|$

LS: $\sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

PS: $\sqrt{a^2+b^2}$

Nebo triviálně z goniometrického tvaru

e) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

LS: $|(ac-bd) + i(ad+bc)| = \sqrt{[a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2] + [a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2]}$

$= \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2}$

$= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}$

PS: $|a+ib| \cdot |c+id| =$

$= \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}$

Jednodušeji v goniometrickém tvaru

$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$

$z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$

$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{(i\varphi_1 + i\varphi_2)}$

$= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

f) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$ Viz výše $+ e^{2\pi i} = 1$

g) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

(4) Mocnina komplexního čísla

$z = r e^{i\varphi} \Rightarrow z^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$

a) Řešte v $\mathbb{C}$: $x^6 + 1 = 0$

[Rovnice "Polynom n-tého stupně $= 0$" má v $\mathbb{C}$ n kořenů!]
(Některé mohou být vícenásobné)

Ozn. z řešení této rovnice. Pak $z^6 = -1$

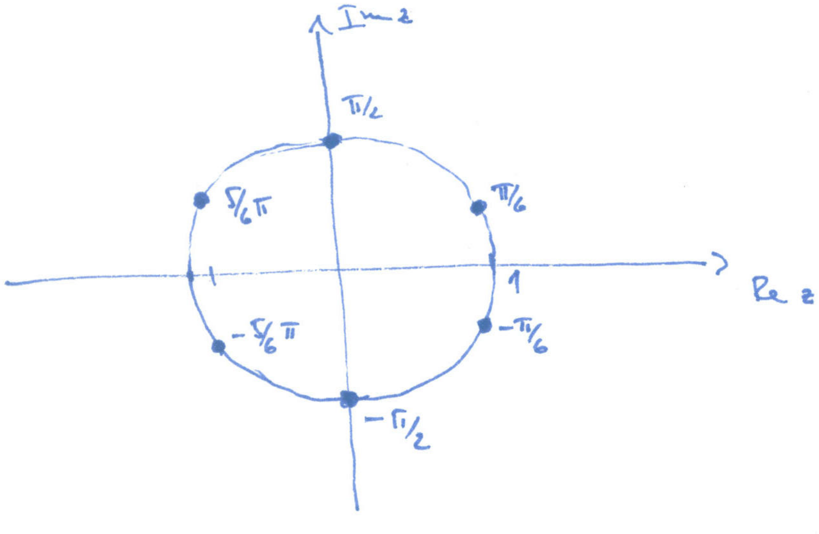
$$r^6 \cdot e^{6i\varphi} = 1 \cdot e^{i\pi}$$

$\Rightarrow r^6 = 1 \Rightarrow r = 1$ $\qquad 6\varphi = \pi + 2k\pi$ pro správně zvolené k!
(tak, aby $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$)

$\Rightarrow k = 0 : \varphi = \pi/6$ $\qquad k = -1 : \varphi = -\pi/6$

$k = 1 : \varphi = \pi/2$ $\qquad k = -2 : \varphi = -\pi/2$

$k = 2 : \varphi = 5\pi/6$ $\qquad k = -3 : \varphi = -5\pi/6$



b) $x^2 + x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2} = -1/2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

5 Řešte v $\mathbb{R}$:

a) $|x+1| + |x-1| \geq 2$

$\boxed{\text{i) } x \geq 1}$: $|x+1| + |x-1| = x+1+x-1 = 2x$

$2x \geq 2 \Rightarrow x \geq 1$ Dohromady: $x \geq 1$ je řešení

$\boxed{\text{ii) } x \in (-1,1)}$: $|x+1|+|x-1| = x+1-x+1 = 2$

$2 \geq 2$ platí $\Rightarrow$ $x \in (-1,1)$ je řešení

$\boxed{\text{iii) } x \leq -1}$: $|x+1|+|x-1| = -x-1-x+1 = -2x$

$-2x \geq 2 \Rightarrow x \leq -1$ Dohromady: $x \leq -1$ je řešení

Celkem: $\forall x \in \mathbb{R}$: $|x+1|+|x-1| \geq 2$

b) $|x-3| + |x+2| \leq 0$

$\boxed{\text{i) } x \geq 3:}$ $|x-3|+|x+2| = x-3+x+2 = 2x-1$

$2x-1 \leq 0$

$x \leq 1/2$ Průnik je $\emptyset$

$\boxed{\text{ii) } x \in (-2,3)}$ $|x-3|+|x+2| = -x+3+x+2 = 5$

$5 \leq 0$ $\emptyset$

$\boxed{\text{iii) } x \leq -2}$

$|x-3|+|x+2| = -x+3-x-2 = -2x+1$

$-2x+1 \leq 0$

$x \geq 1/2$ $\emptyset$

Celkem: Takové $x \in \mathbb{R}$ neexistuje.

Nešlo by to snáz a bez práce?

$|z| \geq 0$ pro jakékoli z. Proto $|x-3| \geq 0$
$|x+2| \geq 0$

$\Rightarrow |x-3|+|x+2| \geq 0$ Vždy

Jediná možnost tedy je $x-3=0$ a $x+2=0$. To nelze zároveň.

⑥ Základní operace s výroky : tabulka pravdivostních hodnot

A	B	A∧B	A∨B	A⇒B	A⇔B	non A
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1

a), c), f)

A	A⇒A	A⇔A	non A	non(non A)	non(non A)⇔A
1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1
	✓	✓			✓

b), e)

A	B	C	X=(A⇒B)	Y=(B⇒C)	X∧Y=Z	P=(A⇒C)	Z⇒P	X′ = A⇔B	Y′ = B⇔C	Z′ = X′∧Y′	P′ = A⇔C	Z′⇒P′
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
							✓					✓

d)
g)
h)

A	B	X = A⇔B	Y = B⇔A	X⇔Y	Z = A⇒B	non B	non A	P = non B⇒non A	Z⇔P	R = non B⇔non A	X⇔R
1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
				✓					✓		✓

i)
j)

A	B	non A	non B	X = A∨B	non X	Y = non A ∧ non B	~~X~~ non X ⇔ Y	Z = A∧B	P = non A ∨ non B	non Z	non Z⇔P
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1
							✓				✓

(6)

A	B	non A	non B	X: $A \Rightarrow B$	non X	Y: $A \wedge$ non B	non $X \Leftrightarrow Y$	Z: $A \Leftrightarrow B$	non Z	P: $A \wedge$ non B	R: $B \wedge$ non A	S: $P \vee R$	non $Z \Leftrightarrow S$
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1
							✓						✓

k), l), j)

---

(7) Negace výroku $\exists x \in \mathbb{R} : \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos x \neq \sqrt{1-\sin^2 x}$$

Který z nich platí? Očividně první z nich. Důkaz: Stačí najít jedno takové x. Např. $x=0$: $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $1 = \sqrt{1-0}$ ✓

---

(8) a) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in (a, a+\varepsilon) : x \in (a, a+\varepsilon) \Longleftrightarrow |x-\alpha| < 1$

Série kvantifikátorů = hra s protihráčem: $\forall$ ... volí soupeř

$\exists$ ... volíme my

Náš cíl je, aby tyto 2 intervaly byly totožné.

$a \in \mathbb{R}$ volí protihráč, tj. je libovolné

$\varepsilon > 0$ volíme my: $\varepsilon := 2$!

$\alpha \in \mathbb{R}$ volíme my: $\alpha := a+1$!

Takto $x \in (a, a+2)$ je totéž co $|x-(a+1)| < 1$

Tj. ať mi soupeř zvolí jakékoli $x \in (a, a+2)$ vždy bude platit $|x-(a+1)| < 1$ a naopak pro každé x t.ž. $|x-(a+1)| < 1$ platí $x \in (a, a+2)$

b) $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists x \in (a, a+\varepsilon) : x \in (a, a+\varepsilon) \Longleftrightarrow |x-\alpha| < 1$

Zde je to beznadějné. My volíme $a \in \mathbb{R}$. Soupeř může zvolit $\varepsilon = 1$, $\alpha = a+100$ a intervaly $(a, a+\varepsilon)$, $(\alpha-1, \alpha+1)$ budou disjunktní. Neexistuje žádné $x \in (a, a+\varepsilon)$ aby platilo i $|x-\alpha| < 1$.

Dokážeme sporem: Negace: $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in (a, a+\varepsilon)$: $x \in (a, a+\varepsilon) \wedge |x-\alpha| \geq 1$ $\vee$ $x \notin (a, a+\varepsilon) \wedge |x-\alpha| < 1$

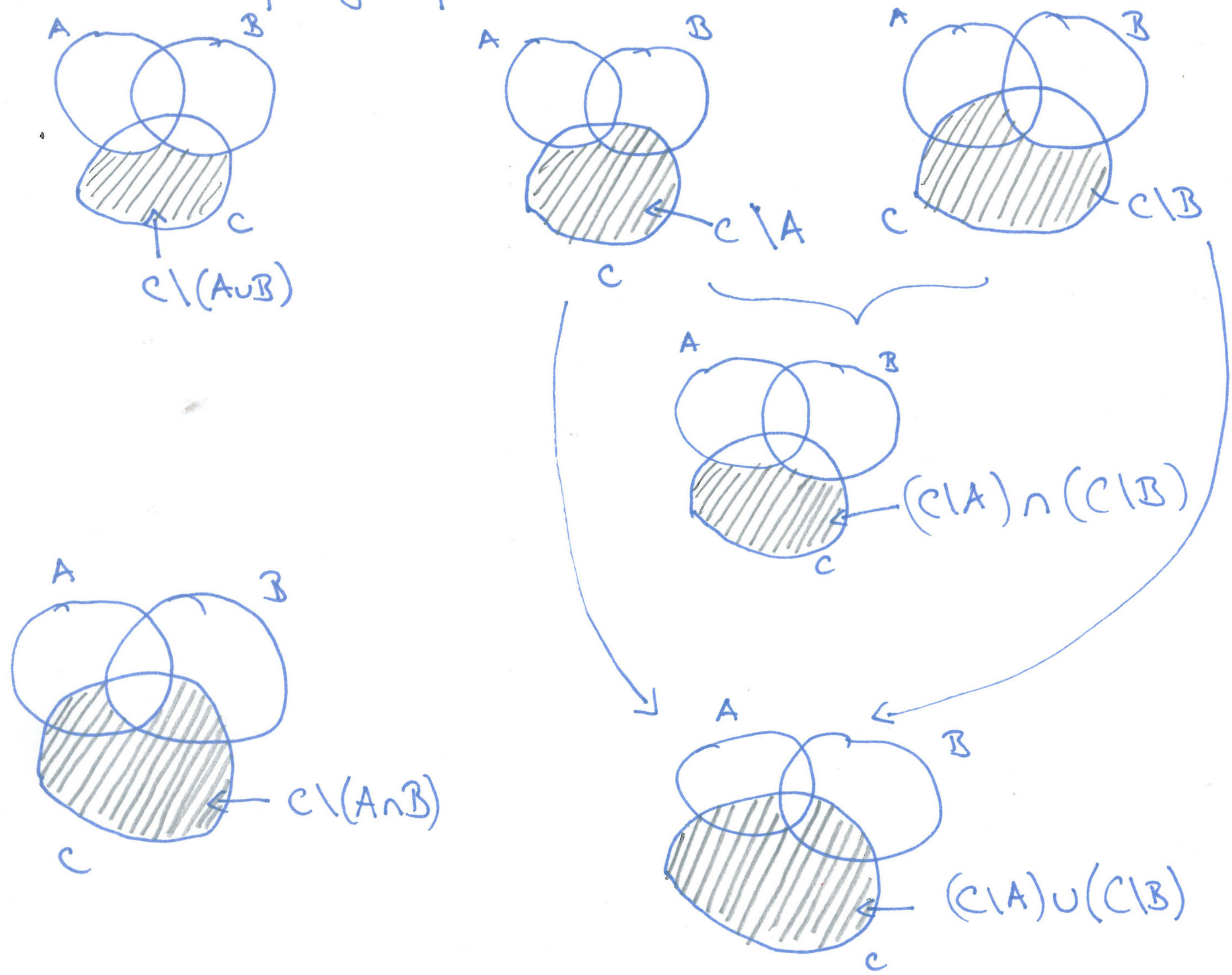
Soupeř volí $a\in\mathbb{R}$.

My: $\varepsilon=1$, $\alpha=a+100$

$\forall x\in(a,a+1)$ platí $x\in(a,a+1)$ a zároveň $|x-(a+100)|\geq 1$. To stačí. ■

---

9 a), b) Vennovy diagramy



c) • Pokud jsou všechny A_i prázdné množiny, pak $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\emptyset$ a $B_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\emptyset$, tj. $Y=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n=\emptyset$. $X=Y$.

• Nechť je alespoň jedna A_i neprázdná. Dokážeme $X\subseteq Y$ a $Y\subseteq X$.

i) $X\subseteq Y$: Nechť $x\in X$. Pak existuje $m\in\mathbb{N}$ t.ž. $x\in A_m$. Ovšem $B_m=\bigcup_{i=1}^{m}A_i$, a tak $x\in B_m$ a tedy $x\in Y$. Proto $X\subseteq Y$

ii) $Y\subseteq X$: Nechť $x\in Y$. Pak existuje $m\in\mathbb{N}$ t.ž. $x\in B_m$. Z definice B_m existuje $j\in\{1,\dots,m\}$ t.ž. $x\in A_j$. Proto $x\in X$ a $Y\subseteq X$. ■

(10) f je zobrazení znamená, že $\{f(x)\}$ je maximálně jednoprvková (8)

$X := f(M_1) \setminus f(M_2)$

$Y := f(M_1 \setminus M_2)$

Nechť $x \in X$. Pak $\exists y \in M_1 : f(y) = x$ a zároveň $\forall z \in M_2 : f(z) \neq x$

To ovšem znamená, že $y \notin M_2$ a proto $y \in M_1 \setminus M_2$ a tedy $x \in f(M_1 \setminus M_2) = Y$.

Kdy platí rovnost? Zkusme dokázat $Y \subseteq X$.

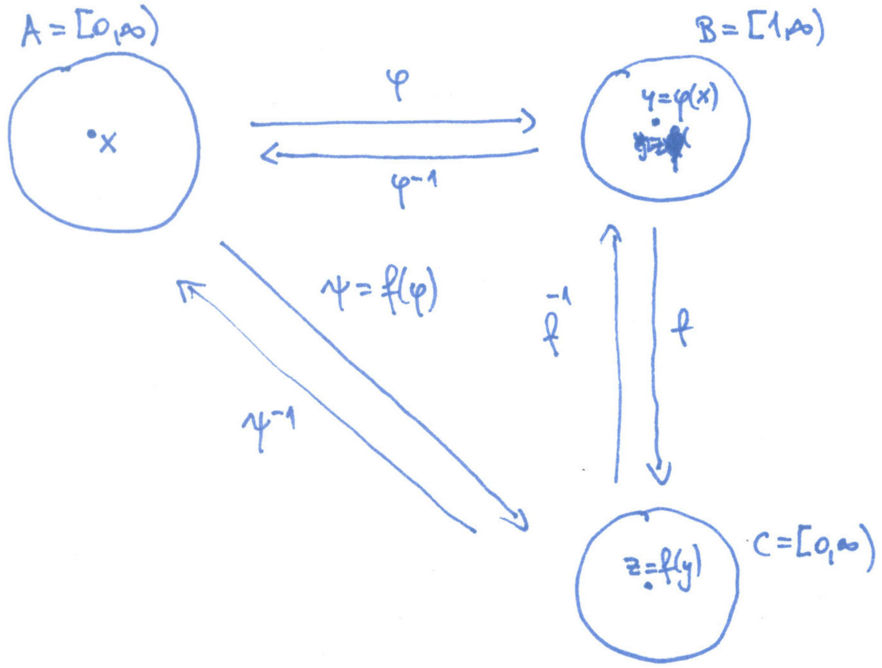
Nechť $x \in Y$. Pak $\exists y \in M_1 \setminus M_2 : f(y) = x$. Tedy $x \in f(M_1)$. Může však $x \in f(M_2)$?

Může, protože x může mít více vzorů než jen y. Pokud je f prosté zobrazení, tak x nemá jiný vzor než y, $y \notin M_2$ a proto $x \notin f(M_2)$.

Tedy je-li f prosté, platí $X = Y$. ▨

(11) $\psi(x)$ je složená funkce a lze napsat jako $\psi(x) = f(\varphi(x))$, kde $f(y) = \sqrt{y^2 - 1}$

Nás zajímá $f(y)$ jen s definičním oborem $[1, \infty) = D_f$ a zde je f bijekce z $[1, \infty)$ na $[0, \infty)$



Spočítáme f^{-1}:

$z = f(y) = \sqrt{y^2 - 1}$

$z^2 + 1 = y^2$

$\sqrt{z^2 + 1} = y$

Tedy $f^{-1}(z) = \sqrt{z^2 + 1}$

a to je také bijekce $[0, \infty)$ na $[1, \infty)$

Viz diagram ↑ $\psi^{-1}(z) = \varphi^{-1}(f^{-1}(z)) = \varphi^{-1}(\sqrt{z^2 + 1})$. $D_{\psi^{-1}} = H_\psi = [0, \infty)$