Sada příkladů 2/8

Metrické prostory, topologie $\mathbb{R}^n$

1. Jako vzdálenost mezi dvěma místy na území ČR definujme jako a) vzdálenost na mapě b) nejkratší vzdálenost jízdy autem c) cena jízdenky ČD. Jde v těchto případech o metriku? (Pro případ b), c) ji chápeme pouze na takové podmnožině, kde má funkce vzdálenost smysl.)

2. Ověřte, zda následující množiny posloupností $x = (x_1, x_2, \dots)$ jsou metrické prostory.
   a) Množina l_1 všech posloupností splňující $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$ s metrikou $\varrho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|$
   b) Množina l_2 všech posloupností splňující $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ s metrikou $\varrho(x, y) = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2)^{\frac{1}{2}}$
   c) Množina l_∞ všech posloupností splňující $\sup_n |x_n| < \infty$ s metrikou $\varrho(x, y) = \sum_n |x_n - y_n|$.

3. V $\mathbb{R}^2$ s obvyklou metrikou najděte uzávěry grafů následujících funkcí
   a)
   $$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
   b) $f(x) = \mathrm{D}(x)$ (Dirichletova funkce).

4. Najděte vnitřek, uzávěr a hranici následujících množin
   a) Množina všech racionálních čísel z intervalu $(0, 1) \subset \mathbb{R}$
   b) Množina všech $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ splňujících nerovnosti
   $$x^2 + y^2 < 1, \quad y \geq 0$$
   c) Množina všech $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ splňujících nerovnosti
   $$|z| < x^2 + y^2 \leq 1$$
   d) $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$
   e) Jednotkový kruh se středem v počátku bez úsečky $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

5. Které z následujících množin jsou otevřené resp. uzavřené
   a) Množina všech $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ splňujících nerovnost
$$x^2 + y^2 + z^2 > 1.$$
   b) Množina všech $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ splňujících nerovnost
$$1 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 2.$$

6. Najděte vnitřek a uzávěr množin (v závislosti na $t \in \mathbb{R}$)
$$M_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (|x| + |y|)\mathrm{e}^{-(|x|+|y|)} \leq t\}.$$

7. Je množina
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2 \leq xyz < 4\}$$
   omezená?

8. Dokažte omezenost množiny
$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

9. Dokažte souvislost množiny
$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^4 + |\mathrm{arctg}\, x| + y^2 \mathrm{e}^{|y|} = 2\}.$$

10. Nechť $A \subset X$. Dokažte, že $\partial A = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A})$.

11. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^N$. Ukažte, že $(\partial A \times B) \cup (A \times \partial B) \subset \partial(A \times B)$. Kdy platí rovnost?

12. Nechť X, Y jsou metrické prostory (popř. $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}^M$ pokud vám to pomůže pro lepší představu). Nechť $A, B \subset X$. Dokažte
   (a) $\overline{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A$ (disjunktně)
   (b) $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A \cup \partial A$ (disjunktně)
   (c) $\overline{A}$ je nejmenší uzavřená nadmnožina A
   (d) $\operatorname{int} A$ je největší otevřená podmnožina A
   (e) $\operatorname{ext} A$ je největší otevřená množina disjunktní s A
   (f) $x_0 \in \overline{A}$ právě když existují $x_n \in A$, $x_n \to x_0$
   (g) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
   (h) Platí analogické tvrzení pro průnik?
   (i) Je-li $F : X \to Y$ spojité, je $F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$.

Sada příkladů 2/9

Metrické prostory

Stefan Banach a jedna z jeho vět

1. Metodou postupných aproximací nalezněte řešení rovnice $y' = ay$, $y(0) = \kappa$. Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje.

2. Metodou postupných aproximací nalezněte přibližné řešení rovnice $2x + \sin x = 1$. Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje.

3. Metodou postupných aproximací nalezněte přibližné řešení rovnice

$$y(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 s y(s)\,\mathrm{d}s + x.$$

   Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje. Srovnejte toto řešení s přesných řešením, které lze hledat ve tvaru $y(x) = \alpha x^2 + x$.

4. Dokažte: pro každé $0 \le a \le 1$ konverguje posloupnost

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n^2 - a), \quad x_0 = 0$$

   k hodnotě $\sqrt{a}$ (iterační metoda výpočtu odmocniny).

Funkce více proměnných

Limita a spojitost funkcí více proměnných

Spočtěte následující limity

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$

6. $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} \dfrac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$

7. $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \dfrac{\sin xy}{x}$

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^6+y^6}{x^2-y^2}$

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

11. Ukažte, že pro funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

platí

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = 0,$$

ale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

neexistuje.

12. Ukažte, že pro funkci

$$f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

limity

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) \text{ a } \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$$

neexistují, ale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\, x.y\neq 0} f(x,y) = 0.$$

PROSTOR $\mathbb{R}^n$, METRIKY, FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

Metrika: zobecnění vzdálenosti. Zobrazení $\rho: P \times P \to [0,\infty)$, kde P je množina.

Musí splňovat:
- $\rho(x,y) \geq 0$ a $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$
- $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
- $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ .... Δ-nerovnost

$\forall x,y,z \in P$

V $\mathbb{R}^n$ nejčastěji pracujeme s eukleidovskou metrikou $\rho_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$

Norma: V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$). $\|\cdot\|: V \to [0,\infty)$ je norma, jestliže
- $\|u\| \geq 0$ a $\|u\| = 0 \iff u = 0$
- $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

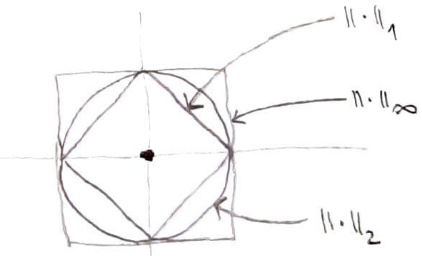
$\forall u,v \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$

Je-li $(V, \|\cdot\|)$ vektorový prostor s normou, pak $\rho(x,y) := \|x-y\|$ je metrika na V.

Eukleidovská norma na $\mathbb{R}^n$: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$

Další normy na $\mathbb{R}^n$: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ $\qquad \|x\|_\infty = \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |x_i|$

Množiny $\|x\| \leq 1$ v $\mathbb{R}^2$ s různými normami:



Normy $\|\cdot\|_A$ a $\|\cdot\|_B$ jsou ekvivalentní, jestliže existují $c_1, c_2 > 0$ t.ž. $\forall x \in V$: $c_1 \|x\|_A \leq \|x\|_B \leq c_2 \|x\|_A$

Platí: Na prostoru konečné dimenze (typicky v $\mathbb{R}^n$) jsou všechny normy ekvivalentní.

V metrických prostorech (P, ρ) definujeme pojmy: $\mathcal{U}_\varepsilon(x_0) = \{x \in P : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$

$P_\varepsilon(x_0) = \mathcal{U}_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$

Tj. zobecnění pojmů okolí do metrických prostorů.

Otevřená množina: $G \subset P$ je otevřená, jestliže $\forall x \in G \ \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(x) \subset G$.

Uzavřená množina: $F \subset P$ je uzavřená, jestliže $P \setminus F$ je otevřená.

Mnoho množin není ani otev. ani uzav.!

Vnitřní bod: Pro libovolnou množinu $A \subset P$ řekneme, že $x_0 \in A$ je vnitřní bod A, jestliže $\exists \varepsilon > 0$: $\mathcal{U}_\varepsilon(x_0) \subset A$

Vnější bod: $x_0 \in P$ je vnější bod A, jestliže je vnitřním bodem $P \setminus A$.

Hraniční bod: $x_0 \in P$ je hraniční bod A, jestliže není ani vnitřní ani vnější

Vnitřek A = množina všech vnitřních bodů A. Značíme A° nebo $\operatorname{int} A$

Vnějšek A = množina všech vnějších bodů A. Značíme $\operatorname{ext} A$

Hranice A = množina všech hraničních bodů A. Značíme ∂A

Uzávěr A = $A \cup \partial A$. Značíme $\overline{A}$

Vnitřek je největší otevřená podmnožina A, Uzávěr je nejmenší uzavřená nadmnožina.

Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Řekneme, že $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, pokud $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : x \in P_\delta(x_0) \cap D_f \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(y_0)$

Řekneme, že f je spojitá v x_0, pokud $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : x \in U_\delta(x_0) \cap D_f \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$

Úlohy na metrické prostory: na cvičení nebudeme probírat. Řešení níže je jen pro zájemce o problematiku.

1) a) ano. Všechny tři podmínky pro metriku jsou očividně splněny

b) ne. Není splněna symetrie, existují jednosměrné silnice

c) ne. Není splněna trojúhelníková nerovnost, existují speciální ceny pro určité trasy

---

2) a) ano: první vlastnost – triviální $\sum |x_i - y_i| \geq 0$ vždy a $\sum |x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i \ \forall i$

tj. $x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\}$ .. $x = y$

druhá vlastnost – triviální: $\sum |x_i - y_i| = \sum |y_i - x_i|$

třetí vlastnost: platí $|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$ pro libovolné i a proto

$$\sum |x_i - z_i| \leq \sum |x_i - y_i| + \sum |y_i - z_i|$$

b) ano: první a druhá vlastnost triviální, viz a), stejné argumenty

třetí vlastnost: Potřebujeme Cauchy–Schwarzovu nerovnost: $\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_1^{\infty} |a_i|^2 \cdot \sum_1^{\infty} |b_i|^2$

Protože $|x_i - z_i|^2 = |x_i - y_i|^2 + |y_i - z_i|^2 + 2(x_i - y_i)(y_i - z_i)$

máme
$$\sum_1^{\infty} |x_i - z_i|^2 = \sum_1^{\infty} |x_i - y_i|^2 + \sum_1^{\infty} |y_i - z_i|^2 + 2 \sum_1^{\infty} (x_i - y_i)(y_i - z_i)$$
$$\leq \sum_1^{\infty} |x_i - y_i|^2 + \sum_1^{\infty} |y_i - z_i|^2 + 2\sqrt{\sum_1^{\infty} |x_i - y_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_1^{\infty} |y_i - z_i|^2}$$
$$= \left(\sqrt{\sum |x_i - y_i|^2} + \sqrt{\sum |y_i - z_i|^2}\right)^2$$
a Δ-nerovnost je dokázána

c) ne: Uvedená metrika není kompatibilní s prostorem. Např. $x = (1, 1, 1, \dots) \in l_\infty$
$y = (0, 0, 0, \dots) \in l_\infty$

a $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |1 - 0| \notin \mathbb{R}$

3) a) Uzávěr dané množiny je $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=\sin\frac{1}{x} \text{ pro } x\neq 0\} \cup \{(0,y), |y|\leq 1\}$.

Tedy samotný graf doplněný o úsečku $x=0, y\in[-1,1]$.

Protože $A\subset\overline{A}$, body grafu samozřejmě patří do jeho uzávěru.

Pro $y\in[-1,1]$ uvažujme bod $(0,y)$. $\forall\delta>0\ \exists x<\delta : \sin\frac{1}{x}=y$,

konkrétně $x=\dfrac{1}{\arcsin y + n\pi}$ pro dost. velké n

b) Uzávěr dané množiny je $\{(x,0), x\in\mathbb{R}\} \cup \{(x,1), x\in\mathbb{R}\}$.

Na libovolně malém okolí rac. čísla je iracionální číslo a naopak.

---

4) a) $A^\circ=\emptyset$ ... neexistuje okolí tvořené jen rac. čísly

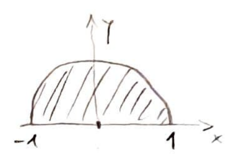
$\overline{A}=[0,1]$ ... viz 3b), libovolně blízko každému irac. číslu je rac. číslo, krajní body zřejmé

$\partial A=[0,1]$ ze stejného důvodu

b) $A^\circ=\{(x,y): x^2+y^2<1, y>0\}$ triviálně

$\overline{A}=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1, y\geq 0\}$

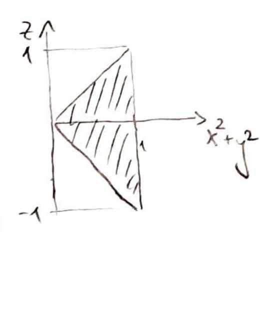
$\partial A=\{(x,y): x^2+y^2=1, y\geq 0\}\cup\{(x,y): y=0, x\in[-1,1]\}$ } triviálně



c) $A^\circ=\{(x,y,z): |z|<x^2+y^2<1\}$

$\overline{A}=\{(x,y,z): |z|\leq x^2+y^2\leq 1\}$

$\partial A=\{(x,y,z): x^2+y^2=1, z\in[-1,1]\}\cup\{(x,y,z): |z|=x^2+y^2, x^2+y^2\leq 1\}$



d) $A^\circ=\mathbb{R}\setminus\left(\{\frac{1}{n}; n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}\right)$

$\overline{A}=\mathbb{R}$

$\partial A=\{\frac{1}{n}; n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$

e) Označme tedy $A=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1\}\setminus\{(x,y): y=0, x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\}$

$A^\circ=\{(x,y): x^2+y^2<1\}\setminus\{(x,y): y=0, x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\}$

$\overline{A}=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1\}$

$\partial A=\{(x,y): x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y): y=0, x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\}$

---

5) a) otevřená: pro lib. $(x,y,z)\in A$ platí $x^2+y^2+z^2=a>1$ a tedy pro $\varepsilon=\frac{a-1}{2}$ platí, že ε-ové okolí bodu (x,y,z) leží rovněž v A.

b) ani otevřená ani uzavřená: Kolem bodů splňujících $x^2+y^2+z^2=2$ nevytvoříme žádné okolí, které by leželo uvnitř A. Body $x^2+y^2+z^2=1$ nepatří do A, patří tedy do $\mathbb{R}^3\setminus A$, ale nevytvoříme kolem nich žádné okolí, které by leželo uvnitř $\mathbb{R}^3\setminus A$

6) Všimneme si, že pro lib. $x,y \in \mathbb{R}$ platí $(|x|+|y|)e^{-(|x|+|y|)} \geq 0$

Proto pro $t<0$ je $M_t = \emptyset$ a tedy $M_t^\circ = \emptyset$ a $\overline{M_t} = \emptyset$.

Pro $t=0$ je $M_t = \{(0,0)\}$, a tedy $M_t^\circ = \emptyset$ a $\overline{M_t} = \{(0,0)\}$

Dále se bude hodit znát průběh funkce $f(z) = ze^{-z}$. $f'(z) = e^{-z} - ze^{-z} = e^{-z}(1-z)$.

Vidíme, že $f(z)$ má lokální maximum v bodě $z=1$, jeho hodnota je $\frac{1}{e}$

Proto pro $t \geq \frac{1}{e}$ je $M_t = \mathbb{R}^2$, a tedy $M_t^\circ = \mathbb{R}^2$, $\overline{M_t} = \mathbb{R}^2$

[~~Pro $t = \frac{1}{e}$ je $M_t = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : |x|+|y| = 1\}$, $M_t^\circ = M_t$ a $\overline{M_t} = \mathbb{R}^2$~~]

Nakonec nechť $t \in (0, \frac{1}{e})$. Pak existují body z_1, z_2, $z_1 < z_2$, tak, že $f(z_1) = f(z_2) = t$.

$M_t = \{(x,y) : |x|+|y| \leq z_1\} \cup \{(x,y) : |x|+|y| \geq z_2\}$

$M_t^\circ = \{(x,y) : |x|+|y| < z_1\} \cup \{(x,y) : |x|+|y| > z_2\}$

$\overline{M_t} = M_t$, množina M_t je uzavřená

---

7) Množina je omezená, pokud existuje $R>0$ tak, že $M \subset \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq R\}$.

Zadaná množina omezená není, protože obsahuje body $(1, \frac{1}{\varepsilon}, 3\varepsilon)$ a volbou dostatečně malého nebo dostatečně velkého ε se takovými body dostaneme vně koule s libovolným poloměrem.

---

8) Použijeme přepis do polárních souřadnic: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ $\quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ protože $x \geq 0, y \geq 0$.

Dostáváme $r^3\cos^3\varphi + r^3\sin^3\varphi - 2r^2\cos\varphi\sin\varphi = 0 \Rightarrow r = 0$ (tj. $x=y=0$) a

$$r = \frac{\sin 2\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}.$$

Na intervalu $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ je $\cos^3\varphi + \sin^3\varphi \geq \alpha > 0$ pro nějaké α, $|\sin 2\varphi| \leq 1$, proto

$f(\varphi) = \frac{\sin 2\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$ je omezená funkce na $[0, \frac{\pi}{2}]$ a tedy množina $\{r = f(\varphi)\}$ je omezená

---

9) Množina je souvislá, pokud pro každé dva její body a, b existuje spojitá funkce $f : [0,1] \to M$ tak, že $f(0) = a$, $f(1) = b$ a $f(x) \in M$ $\forall x \in [0,1]$.

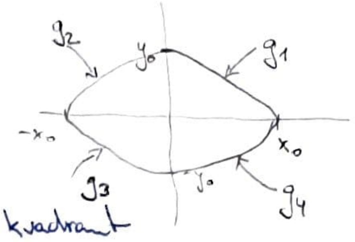
Začneme pozorováním, že pokud $(x,y) \in M$, pak také $(-x,y)$, $(x,-y)$ a $(-x,-y) \in M$. Znalost množiny M na prvním kvadrantu určí znalost celé množiny M. Dále tedy nechť $x,y \geq 0$.

Očividně $g(x) = x^4 + |\operatorname{arctg} x|$ je rostoucí fce a $h(y) = y^2 e^{|y|}$ je také rostoucí fce. Proto existují právě jeden bod $x_0 > 0$ a právě jeden bod $y_0 > 0$ t.ž. $(x_0, 0) \in M$ a $(0, y_0) \in M$.

g a h jsou spojité!

Označme $\tilde{h}(y) = 2 - h(y) = 2 - y^2 e^{|y|}$. Pak $\tilde{h}(y)$ je klesající funkce pro $y \in (0, y_0)$ s hodnotami $\tilde{h}(0) = 2$, $\tilde{h}(y_0) = 0$. Existuje proto spojitá klesající inverzní fce $\tilde{h}^{-1}(z) : (0,2) \to (0, y_0)$. Připomeňme, že $g(x) : (0, x_0) \to (0,2)$ je spojitá rostoucí fce.

Proto předpis $g(x) = \tilde{h}(y)$ dává existenci spojité klesající fce $y = \tilde{h}^{-1}(g(x)) : (0, x_0) \to (0, y_0)$ tak, že $\tilde{h}^{-1}(g(0)) = y_0$ a $\tilde{h}^{-1}(g(x_0)) = 0$. Množina M je tak v prvním kvadrantu grafem klesající funkce a v dalších kvadrantech vypadá symetricky:



Ukážeme sestrojení hledané fce $f : [0,1] \to M$ pro volbu bodů a, b tak, že $a = (-x_1, -y_1)$
$b = (x_2, y_2)$ pro $x_{1,2}, y_{1,2} > 0$, tj. $a \in$ 3. kvadrant
$b \in$ 1. kvadrant.

Jiné kombinace jsou analogické nebo snazší. Označme grafy příslušných fcí v jednotlivých kvadrantech jako $\{(x, g_1(x))\}$, $\{(x, g_2(x))\}$, $\{(x, g_3(x))\}$ a $\{(x, g_4(x))\}$. Tj. $y = g_i(x)$, $i = 1,2,3,4$.

f bude taková, že pro $t \in [0, 1/3)$ bude $f(t)$ v 3. kvadrantu
pro $t \in (1/3, 2/3)$ bude $f(t)$ v 4. kvadrantu
a pro $t \in (2/3, 1]$ bude $f(t)$ v 1. kvadrantu

$$f(t) = \begin{cases} \left(x_1 \cdot (3t-1),\, g_3(x_1 \cdot (3t-1))\right) & \text{pro } t \in [0, 1/3] \\ \left(x_0 \cdot (3t-1),\, g_4(x_0 \cdot (3t-1))\right) & \text{pro } t \in (1/3, \frac{2}{3}] \\ \left(3t(x_2 - x_0) + 3x_0 - 2x_2,\, g_1(3t(x_2-x_0) + 3x_0 - 2x_2)\right) & \text{pro } t \in (\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Lehce ověříme, že $f(0) = (-x_1, g_3(-x_1)) = (-x_1, -y_1) = a$
$f(1) = (x_2, g_1(x_2)) = (x_2, y_2) = b$
f je spojitá, protože je po částech lineární v první složce a složením spojitých a lineárních fcí ve druhé složce
$f(t) \in M \ \forall t \in [0,1]$ je zřejmé z konstrukce.

---

10) Dokážeme nejprve $\partial A \subset \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$ a poté $\overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)} \subset \partial A$.

a) Nechť $a \in \partial A$. Pak $a \in \overline{A}$, protože $\overline{A} = A \cup \partial A$ z definice. Potřebujeme ještě ukázat $a \in \overline{X \setminus A}$.
Stačí $a \in \partial(X \setminus A)$, protože pak použijeme $\partial(X \setminus A) \subset \overline{X \setminus A}$.
Z definice je jasné, že $a \in \partial A \iff \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \wedge U_\varepsilon(a) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.
~~To~~ Protože $X \setminus (X \setminus A) = A$, tak to je totéž, co $a \in \partial(X \setminus A)$. Proto $a \in \partial A \iff a \in \partial(X \setminus A) \Rightarrow a \in \overline{X \setminus A}$

b) Nechť $a \in \overline{A} \wedge a \in \overline{(X \setminus A)}$. Tj. $(a \in A \vee a \in \partial A) \wedge (a \in (X \setminus A) \vee a \in \partial(X \setminus A))$. Protože $\partial(X \setminus A) = \partial A$, máme
$$((a \in A) \vee a \in \partial A) \wedge (a \in (X \setminus A) \vee a \in \partial A)$$
$\iff a \in \partial A \vee (a \in A \wedge a \in X \setminus A) \iff a \in \partial A$, protože prvek a nemůže být v A i $X \setminus A$.

11) Ukážeme, že $\partial A \times B \subset \partial(A \times B)$, stejný důkaz pak samozřejmě bude platit i pro
$A \times \partial B \subset \partial(A \times B)$

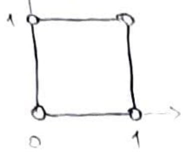
Nechť tedy $a \in \partial A$, $b \in B$ a tedy $(a,b) \in \partial A \times B$. Rozmyslíme si, co je $\mathcal{U}_\varepsilon((a,b)) \subset A \times B$ a lehce zjistíme, že $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \times \{b\} \subset \mathcal{U}_\varepsilon((a,b))$. Pokud tedy víme, že $a \in \partial A$, pak
$\forall \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \wedge \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$

Proto $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \times \{b\} \cap (A \times \{b\}) \neq \emptyset$ a protože $b \in B$, tak $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \times \{b\} \cap (A \times B) \neq \emptyset$
a konečně $\mathcal{U}_\varepsilon((a,b)) \cap (A \times B) \neq \emptyset$

Dále protože $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$, tak existuje $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(a)$ tak, že $x \notin A$. Proto $(x,b) \notin A \times B$ a $(x,b) \in \mathcal{U}_\varepsilon(a) \times \{b\} \subset \mathcal{U}_\varepsilon((a,b))$ a tedy $\mathcal{U}_\varepsilon((a,b)) \cap (X \times X \setminus (A \times B)) \neq \emptyset$.

Ukázali jsme, že každé okolí bodu (a,b) obsahuje bod z $A \times B$ i z jeho doplňku, proto $(a,b) \in \partial(A \times B)$.

Rovnost neplatí, viz $A = (0,1) \subset \mathbb{R}$
$B = (0,1) \subset \mathbb{R}$



Množina na levé straně neobsahuje rohy čtverce, tj. body $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ a $(1,1)$, které očividně patří do hranice $A \times B$

Správná rovnost je $\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)$ a rovnost tedy platí pro A, B uzavřené množiny.

---

12) a) $\overline{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A$: jedna inkluze je zřejmá: $\left.\begin{array}{l}\partial A \subset \overline{A} \text{ z definice} \\ A^\circ \subset A \subset \overline{A} \text{ z definice.}\end{array}\right\} \partial A \cup A^\circ \subset \overline{A}$

Nechť $a \in \overline{A}$. Potom $a \in A$ nebo $a \in \partial A$. Pokud $a \in \partial A$, pak $a \in \partial A \cup A^\circ$ a jsme hotovi.
Pokud $a \in A$, tak buď $\exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(a) \subset A$ a potom $a \in A^\circ$ a tedy $a \in \partial A \cup A^\circ$
nebo $\forall \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$, ale protože $a \in A$, též $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$ a proto $a \in \partial A$, tj. $a \in \partial A \cup A^\circ$.

Že $A^\circ \cap \partial A = \emptyset$ je zřejmé z definice

b) $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A \cup \partial A$: Pro každý bod $x \in X$ platí buď $\exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(x) \subset A$ ... tj. $x \in A^\circ$
nebo $\exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(x) \subset X \setminus A$ ... tj. $x \in \operatorname{ext} A$
nebo $\forall \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \wedge \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$
... tj. $x \in \partial A$.

Opačná inkluze je zřejmá a že jde o disjunktní sjednocení je také zřejmé

c) $\overline{A}$ je nejmenší uzavřená nadmnožina A: $A \subset \overline{A}$ z definice, tj. $\overline{A}$ je nadmnožina A
Už víme $\overline{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A \Rightarrow X \setminus \overline{A} = \operatorname{ext} A$, což je z definice otevřená množina $\Rightarrow \overline{A}$ je uzavřená
Nechť pro spor existuje B uzavřená nadmnožina A tak, že $B \subsetneq \overline{A}$. Odtud tedy
$\operatorname{ext} B \supsetneq \operatorname{ext} \overline{A}$, protože $\operatorname{ext} B = X \setminus B$
a $\operatorname{ext} \overline{A} = X \setminus \overline{A}$

Nechť $b \in \operatorname{ext} B \wedge b \notin \operatorname{ext} \overline{A} = \operatorname{ext} A$.
Podle b) tedy buď $b \in \operatorname{int} A$ nebo $b \in \partial A$. Pokud $b \in \operatorname{int} A \subset A$ dostáváme spor s $A \subset B$.
Pokud $b \in \partial A$, pak z definice $\operatorname{ext} B$ $\exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(b) \subset \operatorname{ext} B$ a zároveň z definice $\partial A : \mathcal{U}_\varepsilon(b) \cap A \neq \emptyset$
Existuje tak $c \in \mathcal{U}_\varepsilon(b)$ tak, že $c \in A \wedge c \in \operatorname{ext} B$, což je spor s $A \subset B$

d) $\operatorname{int} A$ je největší otevřená podmnožina A: $\operatorname{int} A \subset A$ triviálně z definice
$\operatorname{int} A$ je otevřená také triviálně

Nechť pro spor B je otevřená podmnožina A a existuje $b \in B$ t.ž. $b \notin \operatorname{int} A$.
B je otevřená $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: \mathcal{U}_\varepsilon(b) \subset B \subset A$. To ale znamená, že b je vnitřní bod A, což je spor

e) $\operatorname{ext} A$ je největší otevřená množina disjunktní s A: $\operatorname{ext} A \cap A = \emptyset$ triviálně z definice
$\operatorname{ext} A$ je otevřená také triviálně

Nechť pro spor B je otevřená množina, $B \cap A = \emptyset$ a existuje $b \in B$ t.ž. $b \notin \operatorname{ext} A$.
B je otevřená $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: \mathcal{U}_\varepsilon(b) \subset B$ a $\mathcal{U}_\varepsilon(B) \cap A = \emptyset$. To znamená, že b je vnější bod A, což je spor.

f) $x_0 \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists x_n \in A: x_n \to x_0$. Nejprve "$\Leftarrow$"
$x_n \to x_0$ znamená, že $\rho(x_n, x_0) \to 0$. Pokud tedy $\exists x_n \in A: x_n \to x_0$, pak z definice limity
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: x_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$. Tedy $\forall \varepsilon > 0: \mathcal{U}_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow x_0 \notin \operatorname{ext} A \Leftrightarrow x_0 \in \overline{A}$.
Nyní "$\Rightarrow$": Nechť $x_0 \in \overline{A}$. Pak buď $x_0 \in A$ a můžeme vzít $x_n = x_0\ \forall n \in \mathbb{N}$ a je hotovo.
Nebo $x_0 \in \partial A$. Potom $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in A: x_n \in \mathcal{U}_{1/n}(x_0)$. Takto $x_n \to x_0$ a je hotovo.

g) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Očividně pro $P \subset Q$ platí také $\overline{P} \subset \overline{Q}$.
Proto $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ a $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, tedy $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Dokážeme opačnou inkluzi.

Nechť $x \in \overline{A \cup B}$. Pokud $x \in A \cup B$, tedy $x \in A \vee x \in B$, pak také zřejmě $x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}$, tj. $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$
Nechť tedy $x \in \partial(A \cup B)$. Pak $\forall \varepsilon > 0: \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$. Pokud by zároveň $x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$, pak by existovalo $\varepsilon > 0$ t.ž. $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset \wedge \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap B = \emptyset$, tj. $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap (A \cup B) = \emptyset$. To je spor.

h) Neplatí: $A = (0,1)$, $B = (1,2)$: $A \cap B = \emptyset$, tj. $\overline{A \cap B} = \emptyset$
ale $\overline{A} = [0,1]$, $\overline{B} = [1,2]$: $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$
Platí však $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$: Nechť $x \in \overline{A \cap B}$. Pokud $x \in A \cap B$, pak $x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.
Pokud $x \in \partial(A \cap B)$, pak $\forall \varepsilon > 0: \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$, tj. $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \wedge \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset$.
Proto $x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B}$, tedy $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

i) Je-li $F: X \to Y$ spojité, je $F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$.
F je spojité zobrazení, jestliže $\forall x_0 \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: x \in \mathcal{U}_\delta(x_0) \cap D_F \Rightarrow F(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(F(x_0))$
Nechť $y \in F(\overline{A})$. Pak existuje $x \in \overline{A}$, t.ž. $y = F(x)$. Dle f) $\exists x_n \in A: x_n \to x$.
Ze spojitosti F platí $F(x_n) \to F(x) = y$. Protože $x_n \in A$, je $F(x_n) \in F(A)$.
K danému $y \in F(\overline{A})$ jsme našli posloupnost bodů $F(x_n) \in F(A)$, t.ž. $F(x_n) \to y$, proto dle f)
platí $y \in \overline{F(A)}$.

Úlohy na Banachovu větu o kontrakci neřešíme.

5) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \exp\left(x^2y^2 \cdot \ln(x^2+y^2)\right) = \exp \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2 \ln(x^2+y^2)$

↑ VOLSF s vnější fcí spojitou funguje stejně

$= \exp \lim_{r\to 0} r^4 \cos^2\varphi \sin^2\varphi \ln(r^2)$ [používáme $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$]

Nyní víme, že $\lim_{r\to 0} 2r^4 \ln r = 0$ dle škálovacích limit a

$\cos^2\varphi \sin^2\varphi$ je omezená funkce na intervalu $[0, 2\pi)$

Proto dle věty o limitě součinu "0 · omezená" dostáváme výsledek $\exp 0 = \underline{\underline{1}}$

---

6) $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{bmatrix} = \lim_{r\to\infty} \frac{r\cdot(\cos\varphi+\sin\varphi)}{r^2\cdot(1-\cos\varphi\sin\varphi)} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{2\cdot(\cos\varphi+\sin\varphi)}{2-\sin 2\varphi}$

Opět použijeme větu "0 · omezená", $\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} = 0$, $f(\varphi) = \frac{2\cdot(\cos\varphi+\sin\varphi)}{2-\sin 2\varphi}$ je omezená funkce na intervalu $[0, 2\pi)$, protože jmenovatel se nikdy nepřibliží nule.

Proto $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0$

---

7) $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{bmatrix} = \lim_{r\to\infty} \frac{r^2}{r^4\cdot(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi} = 0$

Znovu "0 · omezená": $\frac{1}{r^2}$ jde k nule pro $r\to\infty$

$\frac{1}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}$ je omezená fce na $[0, 2\pi)$, protože jmenovatel se nikdy nepřiblíží 0.

---

8) $\lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,a)} y \cdot \frac{\sin xy}{xy} = a \cdot \lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin(xy)}{xy} = a \cdot 1 = a$

Postupně používáme:
1) rovnost limit pro funkce rovnající se na prstencovém okolí
2) VOAL
3) VOLSF, kde vnitřní fce $\varphi(x,y) = xy$ nenabývá limitní hodnoty 0 na prstencovém okolí bodu $(0,a)$ průnikem s definičním oborem původní funkce $f(x,y) = \frac{\sin xy}{x}$ (tj. $x \neq 0$)

Pro $a = 0$ uvažujeme trošku jinak, protože první krok omezuje definiční obor na $y \neq 0$. $y = 0$ vyšetříme zvlášť a vidíme, že $f(x,y) = \frac{\sin xy}{x} = 0$ pro $y = 0, x \neq 0$, což v kombinaci s předchozím dá stejný výsledek

9) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6+y^6}{x^2-y^2}$ Vidíme, že $f(x,y)=\frac{x^6+y^6}{x^2-y^2}$ je definovaná všude mimo $x=\pm y$.
Tam je jmenovatel nulový a funkce $f(x,y)$ tam proto utíká do $\pm\infty$.

Fakt, že na okolí přímek $x=\pm y$ jsou libovolně velké hodnoty, zamezí existenci limity.

Nejprve položme $x=0$. Pak $f(0,y)=\frac{y^6}{-y^2}=-y^4$ a $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)=0$. Proto jediným kandidátem na hodnotu limity $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ je nula. Dokážeme, že nula není limitou sporem s definicí limity, neboli ukážeme $\exists \varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists (x,y)\in P_\delta(0,0)\cap D_f \wedge f(x,y)\notin U_\varepsilon(0)$.

Zvolme $\varepsilon=1$. Nechť $\delta>0$ je dáno. Najdeme $(x,y)\in P_\delta(0,0)\cap D_f$ a $|f(x,y)|>1$.

Přechodem k polárním souřadnicím hledáme (r,φ) tak, že $\begin{matrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{matrix}$, $(x,y)\in P_\delta(0,0)\cap D_f$.

Zvolme $r=\frac{\delta}{2}$. Pak očividně $(x,y)\in P_\delta(0,0)$ pro libovolné φ takové, že $(x,y)\in D_f$.

Při přepisu do polárních souřadnic je $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)=r^4\cdot\frac{\cos^6\varphi+\sin^6\varphi}{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}=r^4\cdot\frac{\cos^6\varphi+\sin^6\varphi}{\cos 2\varphi}$

Vidíme, že $\varphi\neq \pi/4 + k\pi/2$, $k=0,1,2,3$ je definiční obor f.

Najdeme $\varphi\neq\pi/4+k\pi/2$ tak, že $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ pro $r=\frac{\delta}{2}$ bude větší než 1.

Máme $\frac{\delta^4}{16}\cdot\frac{\cos^6\varphi+\sin^6\varphi}{\cos 2\varphi}>1$ a hledáme φ na intervalu $(0,\pi/4)$, aby $f(x,y)>0$.

Očividně existuje $c>0$ tak, že $\cos^6\varphi+\sin^6\varphi>c$ $\forall\varphi\in\mathbb{R}$. Pokud najdeme φ t.ž. $\frac{\delta^4}{16}\frac{c}{\cos 2\varphi}>1$, pak jistě bude platit: $\frac{\delta^4}{16}\cdot\frac{\cos^6\varphi+\sin^6\varphi}{\cos 2\varphi}>\frac{\delta^4}{16}\cdot\frac{c}{\cos 2\varphi}>1$.

Nyní než $\cos 2\varphi<c\frac{\delta^4}{16}$, tj. $2\varphi>\arccos\left(c\frac{\delta^4}{16}\right)$ a konečně $\varphi\in\left(\frac{1}{2}\arccos\left(c\frac{\delta^4}{16}\right),\pi/4\right)$

Položme tedy $\varphi=\frac{1}{4}\arccos\left(c\frac{\delta^4}{16}\right)+\pi/8$ a jsme hotovi.

---

10) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2}$ Vidíme, že pro $x=0$ je $f(0,y)=0$ a kandidát na limitu je 0.
Ovšem pro $x=y$ je $f(x,y)=\frac{2x^2}{2x^2}=1$ a kandidát na limitu je 1.

Limita tak neexistuje, na každém prstencovém okolí počátku jsou body s fční hodnotou 0 i body s fční hodnotou 1.

---

11) $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$. Očividně pro $x\neq 0$ je $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\frac{0}{x^2}=0$

a proto $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim\limits_{x\to 0} 0=0$.

Podobně pro $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$.

Kandidát na limitu je tak 0, ovšem pro $x=y$ je $f(x,y)=1$.
Proto na libovolném prstencovém okolí počátku jsou body s fční hodnotou 0 i body s fční hodnotou 1, limita proto neexistuje.

---

12) $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$

Pro $x \neq 0$: $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \sin\frac{1}{x}\cdot\lim\limits_{y\to 0}(x+y)\cdot\sin\frac{1}{y}$.

Funkce $\sin\frac{1}{y}$ nemá pro $y\to 0$ limitu, je jen omezená. $x+y \to x \neq 0$, takže nemůžeme použít ani "0 · omezená". $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ neexistuje. Totéž pro $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$.

Ovšem $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, protože $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y) = 0$ a funkce $\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}$ je na svém definičním oboru omezená, takže zde už můžeme použít větu "0 · omezená".
